УДК 533.9

ПОДОБИЕ В ОПИСАНИИ 1D ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛЕГНМЮРОВСКИХ ВОЛН

В.М. Куклин
Харьковский Национальный университет имени В.Н. Каразина
г. Харьков, пл. Свободы, 4, Украина, 61022
E-mail: kuklinvm1@rambler.ru
Received January 15, 2013, accepted February 21, 2013

Показано, что процессы модуляционной неустойчивости длинноволновых ленгмюровских колебаний как в горячей, так и в холодной плазме имеют ту же симметрию и механизмы возбуждения коротковолнового спектра. При уменьшении амплитуды накачки максимум инкремента в холодной плазме сдвигается в коротковолновую область, а в горячей плазме – уменьшает инкременты во всей области спектра. Максимальный инкремент в холодной плазме при уменьшении амплитуды поля накачки не изменяется, в горячей – уменьшается. Движение энергии в коротковолновую часть спектра обусловлено взаимодействием мод, но в холодной плазме этому также способствует сдвиг максимума линейного инкремента, а в горячей плазме - большие инкременты в коротковолновой части спектра. Если возмущения ионов симметричны в пространстве, то структура поля и электронной плотности будет представлять собой стоячую волну, амплитуда которой растет, а полуширина уменьшается. При отсутствии такой симметрии поле и искажения плотности формируются за счет сложной интерференции возмущений разных масштабов.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: модуляционная неустойчивость, ленгмюровские колебания, горячая и холодная плазма, симметрии пространственных возмущений

SIMILARITY IN 1D DESCRIPTION PARAMETRIC INSTABILITIES OF LANGMUIR WAVES

V.M. Kuklin
V.N. Karazin Kharkiv National University
4, Svobody Sq., Kharkov, Ukraine, 61022

It is shown, the modulation instability processes of long-wave Langmuir oscillation in hot and cold plasmas are possessed such a symmetry and mechanism of short-wave oscillation excitation. The maximum of the growth rate of the instability in cold plasma moves in short-wave part of spectrum, in hot plasma the growth rates in all over the spectral region are reduced, if the amplitude of pump wave has decreased. The value of the growth rate maximum in cold plasma in this case not changes, but in hot plasma similar value decreases. The energy motion along the spectrum is due to mode coupling and in cold plasma the drift of the growth rate maximum, in hot plasma – large-scale increments in short-wave part of spectrum. The spatial symmetry of ions perturbation is associated with such symmetry type of field and electrons perturbation. The amplitude of standing wave structure, which is appeared in that case, is increasing and the half-width of it is reducing in initial stage of the instability. When such symmetry is absent, the field and the density deformation are formed at the expense of the interference of different scale perturbation.
KEY WORDS: modulation instability, Langmuir oscillation, hot and cold plasmas, spatial symmetry

ПОДІБНІСТЬ В ОПИСІ 1D ПАРАМЕТРИЧНОЇ НЕСТІЙКОСТІ ЛЕНГМЮРІВСЬКИХ ХВИЛЬ

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
м. Харків, пл. Свободи, 4, Україна, 61022

Показано, що процеси модуляційної нестійкості довгохвилевих ленгмюрівських коливань, як у гарячій, так і в холодній плазмі мають таку ж симетрію та механізми збудження короткохвилевого спектру. При зменшенні амплітуди накачки максимум інкременту в холодній плазмі прямує до короткохвилевої частини спектру, а у гарячій плазмі це зменшує інкременти всього спектру нестійкості. Максимальний інкремент у холодній плазмі при зменшенні амплітуди поля накачки не змінюється, а максимальний інкремент у гарячій плазмі за тих умов стає меншим. Рух енергії в напрямку короткохвилевої частини спектру, що обумовлено взаємодією мод, у холодній плазмі також підтримується зсувом максимуму інкременту, а в гарячій плазмі пов'язано з тим, що в короткохвилевої частині спектру найбільші інкременти лінійної нестійкості. Коли іонні збудження симетричні в просторі, то структура поля та електронні збудження формують стоячу хвилю, амплітуда якої зростає, а напівширина зменшується на начальної стадії процесу. За відсутності такої симетрії поле та порушення густини формуються за рахунок складної інтерференції збуджень різного масштабу.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: модуляційна нестійкість, ленгмюровські коливання, гаряча та холодна плазма, симетрії просторових збуджень

Интерес к параметрической неустойчивости интенсивных ленгмюровских волн, которые легко возбуждаются в плазме различными источниками [1-9], был обусловлен, в частности, открывшимися возможностями нагрева электронов и ионов. Корректный аппарат описания параметрической неустойчивости длинноволновых ленгмюровских колебаний фактически был создан в основополагающих работах В.П. Силина [10] и В.Е. Захарова [11]. Уже в первых численных 1D экспериментах по параметрическому распаду ленгмюровских колебаний [12] были подтверждены теоретические представления [10] (см. также [13,14] и обзор [15]). Однако наибольший интерес у экспериментаторов вызвал обнаруженный В.Е. Захаровым механизм диссипации волновой энергии. Аналитические исследования, аппаратные и численные эксперименты еще на ранней стадии [16-18].изучения этих явлений подтвердили тот факт, что в некоторых случаях заметная часть энергии поля накачки в результате неустойчивости переходит в энергию коротковолнового ленгмюровского спектра и появляются выбросы быстрых частиц [16-27].

В частности, даже в одномерном численном моделировании процесса на базе обобщенных уравнений Силина [28-30] можно было наблюдать частичный обмен энергией между спектром и интенсивной волной накачки. Ионная каверна «схлопывалась», то есть, переходила в режим пересечения траекторий частиц [31]. Отметим, что динамика процесса совпадала с ранее выполненными численным расчетами [19]. Энергия, которую отбирали ионы, оказалась порядка $(m_e / m_i)^{1/3}$ начальной энергии волны накачки [31] (здесь m_e и m_i - массы электронов и ионов, соответственно). Для электронов переход в режим пересечения траекторий мог сдерживаться существованием ионных каверн, что способно было синхронизовать выброс быстрых электронов и ионов в момент её разрушения. Эксперименты по созданию вблизи плазменного резонанса в неоднородной плазме значительной плотности энергии поля W, превышающей плотность тепловой энергии плазмы $n_{e0}T_e$, с частотой, близкой к ленгмюровской, демонстрировали на фоне нагрева электронов вблизи плазменного резонанса появление коротких импульсов быстрых частиц. Причем, наряду с электронами имел место вынос энергии из области плазменного резонанса ионами [32-33] с достаточно большими энергиями (см., например, обзорную работу [34]). Область источников электронных импульсов соответствовала малым размерам каверн плотности. Соотношение энергии, запасенной как в быстрых ионах, так и в быстрых электронах, после разрушения каверны примерно отвечало приведенным в теории [31] значениям.

Рассмотрение процессов параметрической неустойчивости ленгмюровских волн в условиях применимости уравнений Захарова и уравнений Силина обычно рассматривалось теоретиками раздельно, хотя эксперименты часто не разделяли эти процессы. В данной работе автор сделал попытку на примере одномерного описания согласовать эти близкие по физическому проявлению модели, изучить симметрию возмущений и найти условия перехода от одной модели к другой. Выбор одномерных моделей процессов, как отметил Дж. Даусон, часто сохраняет основные черты процессов, существенно упрощая описание и понимание физических явлений [35]. Обсуждение особенностей подобия и симметрии уравнений, кроме всего прочего, способно прояснить причину достаточно редких случаев наблюдения в экспериментах режимов с обострением, приводящих к аномальному нагреву электронов и тем более ионов.

ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНАЯ ПЛАЗМА, ОДНОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАХАРОВА

Описание поведения электронов плазмы в условиях, когда фазовые скорости ленгмюровских волн превосходят их тепловую скорость может быть гидродинамическим. Ионы можно описывать как гидродинамически, так и кинетически. Для упрощения описания ниже ограничимся одномерным случаем. При этом, для скорости v_e и плотности n_e электронов справедливы следующие уравнения

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} + \frac{e}{m_e}E + \frac{1}{m_e n_e}\frac{\partial P_e}{\partial x} = -\{v_e \cdot \frac{\partial}{\partial x} v_e\}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + n_0 \frac{\partial}{\partial x} v_e = -\frac{\partial}{\partial x}(n_e \cdot v_e), \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E = 4\pi e \cdot (n_i - n_e), \tag{3}$$

где $E = -\partial\phi / \partial x$, ϕ - напряженность и потенциал электрического поля колебаний, $P_e = n_e T_e$ - давление, T_e - температура в энергетических единицах и $v_{Te} = \sqrt{T_e / m_e}$ - тепловая скорость электронов, $c_s = \sqrt{T_e / m_i}$ - скорость звука, n_e и n_i - возмущенные плотности электронов и ионов плазмы, n_0 - невозмущенная плотность как электронов, так и ионов плазмы, $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m_e}$, $\Omega_i = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m_i}$ - ленгмюровская электронная и плазменная ионная частоты.

Представим электрическое поле в виде $E = \sum_n E_n \exp\{ik_n x\} = \sum_n E_n \exp\{ink_0 x\}$, где величина $k_n = nk_0$ определяет дискретный набор волновых чисел мод спектра. Перепишем уравнения (1) - 2) в виде

$$\frac{\partial v_{en}}{\partial t} - \frac{e}{m_e}E_n + \frac{v^2_{Te}}{n_0} \cdot ik_0 n \cdot n_e = -ik_0 \sum_m m \cdot v_{en-m} \cdot v_{em}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial n_{en}}{\partial t} + n_0 \cdot ik_0 n \cdot v_{en} = -ik_0 \cdot n \cdot \sum_m n_{en-m} \cdot v_{em}, \tag{5}$$

$$ik_0 n \cdot E_n = 4\pi e(n_{in} - n_{en}) \,. \tag{6}$$

Исключим $E_n = -4\pi ie(n_{in} - n_{en}) / k_0 n$ и (4) примет вид

$$\frac{\partial v_{en}}{\partial t} = \frac{4\pi e^2 i}{k_0 n \cdot m_e}(n_{in} - n_{en}) - \frac{v^2_{Te}}{n_0} \cdot ik_0 n \cdot n_e - ik_0 \sum_m m \cdot v_{en-m} \cdot v_{em}. \quad (7)$$

Представим, следуя [36] плотность и скорость электронов в виде

$$-en_{en} = \sum_s u_n^{(s)} \cdot \exp\{is\omega_0 \cdot t\} = u_n^{(0)} + u_n^{(1)} \cdot e^{i\omega_0 t} + u_n^{(-1)} \cdot e^{-i\omega_0 t} + u_n^{(2)} \cdot e^{i2\omega_0 t} + u_n^{(-2)} \cdot e^{-i2\omega_0 t}, \quad (8)$$

$$v_{en} = \sum_s v_n^{(s)} \cdot \exp\{is\omega_0 \cdot t\} = v_n^{(0)} + v_n^{(1)} \cdot e^{i\omega_0 t} + v_n^{(-1)} \cdot e^{-i\omega_0 t} + v_n^{(2)} \cdot e^{i2\omega_0 t} + v_n^{(-2)} \cdot e^{-i2\omega_0 t}, \quad (9)$$

$$E_n = \sum_s E_n^{(s)} \cdot \exp\{is\omega_0 \cdot t\} = \overline{E}_n + \frac{1}{2}(E_n^{(1)} \cdot e^{i\omega_0 t} + E_n^{(-1)} \cdot e^{-i\omega_0 t}) + E_n^{(2)} \cdot e^{i2\omega_0 t} + E_n^{(-2)} \cdot e^{-i2\omega_0 t}. \quad (10)$$

Воспользуемся линейными соотношениями $u^{(\pm1)}{}_{n-m} = \pm k_0 (n-m) \cdot en_0 \omega_0^{-1} v^{(\pm1)}{}_{n-m}$ и найдем нерезонансные величины

$$v^{(0)}{}_n = \frac{1}{en_0}\sum_m (u^{(1)}{}_{n-m} \cdot v^{(-1)}{}_m + u^{(-1)}{}_{n-m} \cdot v^{(1)}{}_m) = \frac{1}{i\omega_0}[\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x} v^{(1)}]_n, \quad (11)$$

$$u^{(0)}{}_n + en_{in} = -\frac{m_e}{4\pi e}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[v^{(1)} v^{(-1)}]_n, \quad (12)$$

$$v^{(\pm2)}{}_n = \mp \frac{k_0}{\omega_0}\sum_m m v^{(\pm1)}{}_{n-m} \cdot v^{(\pm1)}{}_m = \mp \frac{1}{i\omega_0}[\frac{\partial v^{(\pm1)}}{\partial x} v^{(\pm1)}]_n, \quad (13)$$

$$u^{(\pm2)}{}_n = -\frac{k_0{}^2 n \cdot en_0}{\omega^2{}_{pe}}\sum_s s v^{(\pm1)}{}_s \cdot v^{(\pm1)}{}_{n-s} = +\frac{en_0}{\omega^2{}_{pe}}\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial v^{(\pm1)}}{\partial x} v^{(\pm1)}]_n. \quad (14)$$

Уравнение для резонансных величин принимает вид

$$\begin{aligned} &\pm 2i\omega_0\{\frac{\partial u^{(\pm1)}{}_n}{\partial t} \mp i\frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0{}^2 + k^2{}_0 n^2 v^2{}_{Te}}{2\omega_0} u^{(\pm1)}{}_n \mp i\frac{\omega_0 n}{2n_0}\sum_m n_{in-m}\frac{u^{(\pm1)}{}_m}{m}\} = \\ &+k^2{}_0 n \cdot en_0 \sum_m m[v^{(0)}{}_{n-m} \cdot v^{(\pm1)}{}_m + v^{(\pm1)}{}_{n-m} \cdot v^{(0)}{}_m] - \\ &-ik_0 \cdot n \cdot (\pm i\omega_0)\sum_m [(u^{(0)}{}_{n-m} + v_{in-m}) \cdot v^{(\pm1)}{}_m + u^{(\pm1)}{}_{n-m} \cdot v^{(0)}{}_m] + \\ &+k^2{}_0 n \cdot en_0 \sum_m m v^{(\mp1)}{}_{n-m} \cdot v^{(\pm2)}{}_m - ik_0 \cdot n \cdot (\pm i\omega_0)\sum_m [u^{(\pm2)}{}_{n-m} \cdot v^{(\mp1)}{}_m. \end{aligned} \quad (15)$$

Правая часть (15) определяет так называемую электронную нелинейность, которая в одномерном случае обращается в нулю [36,37]. Действительно, правая часть (15) равна $(k_0 n \cdot en_0 / \omega_0) \cdot I$, где для I справедливо тождество

$$\begin{aligned} I = \{&-\frac{\partial}{\partial x}\{v^{(\pm1)}[\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x} v^{(1)}] \mp v^{(\pm1)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[v^{(1)} v^{(-1)}] - \frac{\partial v^{(\pm1)}}{\partial x}[\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x} v^{(1)}] \pm \\ &\pm v^{(\mp1)}\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial v^{(\pm1)}}{\partial x} v^{(\pm1)}] \pm v^{(\mp1)}\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial v^{(\pm1)}}{\partial x} v^{(\pm1)}] = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, для резонансных возмущений плотности справедливо уравнение

$$\frac{\partial u^{(\pm1)}{}_n}{\partial t} \mp i\frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0{}^2 + k^2{}_0 n^2 v^2{}_{Te}}{2\omega_0} u^{(\pm1)}{}_n \mp \frac{\omega_0}{2n_0} n \cdot \sum_m \frac{n_{in-m}}{m} \cdot u_m{}^{(\pm1)} = 0, \quad (17)$$

или переходя к напряженности электрического поля

$$E^{(\pm1)}{}_n = 4\pi ieu^{(\pm1)}{}_n / 2k_0 n, \quad (18)$$

$$\frac{\partial E^{(\pm1)}{}_n}{\partial t} \mp i\frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0{}^2 + k^2{}_0 n^2 v^2{}_{Te}}{2\omega_0} E^{(\pm1)}{}_n \mp i\frac{\omega_0}{2n_0} \cdot \sum_m n_{in-m} E_m{}^{(\pm1)} = 0. \quad (19)$$

Если ионы описывать крупными частицами, уравнение движения для которых

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = \frac{e}{m_i}\sum_n \overline{E}_n \cdot \exp\{ik_0 n x_s\}, \quad (20)$$

то плотность ионов определим как

$$n_{in} = n_0 \cdot \frac{k_0}{2\pi}\int_{-\pi/k_0}^{\pi/k_0} \exp[-ink_0 \cdot x_s(x_0, t)] \cdot dx_{s0}. \quad (21)$$

Заметим, что описание ионов крупными частицами, кроме всего прочего, как показано в [31] позволяет увеличить устойчивость расчетной схемы. Компонент медленно меняющегося электрического поля может быть определен следующим образом. Так как для медленных движений справедливо приближение

$$n_e = n_0 \cdot \exp\left\{\frac{e\tilde{\phi} - U}{T}\right\}, \tag{22}$$

то удерживая в уравнении Пуассона первые члены разложения получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{\phi} = 4\pi e \cdot \left(\frac{e\bar{\phi} - U}{T} n_0 - n_i\right), \tag{23}$$

где $\bar{\phi}$ и $\bar{E}_n = -ik_0 n\tilde{\phi}_n$ потенциал и напряженность усредненного по быстрым осцилляциям поля. Для ВЧ потенциала $U = \sum_n U_n \exp\{ik_0 nx\}$, причем $U_n = \dfrac{e^2}{4m_e\omega_p^{\;2}} \sum_m E^{(1)}_{n-m} E^{(-1)}_m$.

Очевидно левой частью уравнения (23) можно пренебречь в условиях $k_0^2 n^2 v_{Te}^2 / \omega_{pe}^2 = v_{Te}^2 / v_\Phi^2 << 1$ и тогда напряженность усредненного по быстрым осцилляциям поля

$$\bar{E}_n = -ik_0 n\tilde{\phi}_n = \frac{-ik_0 n n_{in} T}{e n_0} + \frac{-ik_0 n e}{4m_e\omega_p^{\;2}} \sum_m E^{(1)}_{n-m} E^{(-1)}_m. \tag{24}$$

Описывать ионы можно и гидродинамически. Уравнение для медленных возмущений плотности и скорости ионов имеют вид

$$\frac{\partial n_{in}}{\partial t} + v_{in} \cdot ik_0 n \cdot n_0 = -ik_0 \cdot n \cdot \sum_m n_{in-m} \cdot v_{im}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial v_{in}}{\partial t} - \frac{e}{m_i}\bar{E} = -ik_0 \cdot \sum_m m v_{in-m} \cdot v_{im} \quad . \tag{26}$$

Правыми частями (25) и (26) пренебрежем, полагая их малыми. Тогда для возмущений плотности справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2 n_{in}}{\partial t^2} + k_0^2 n^2 c_s^2 n_{in} = -\frac{k_0^2 n^2}{16\pi m_i} \sum_m E^{(1)}_{n-m} E^{(-1)}_m \tag{27}$$

где скорость звука $c_s = \sqrt{T_e / m_i}$. Отметим, что при выполнении условий $k_0^2 n^2 v_{Te}^2 / \omega_{pe}^2 = v_{Te}^2 / v_\Phi^2 << 1$ данное уравнение можно получить, используя соотношение (22) и первые члены разложения (23).

Уравнения (19) и (27) при $\omega_0 = \omega_{pe}$ в виде

$$i\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{v^2_{Te}}{2\omega_{pe}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} E - \frac{\omega_{pe}}{2n_0} \cdot n_i E = 0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 n_i}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} = \frac{1}{16\pi m_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |E|^2 \ , \tag{29}$$

известны как уравнения Захарова [11] в одномерном случае.

Симметрии

Можно убедиться, в том, что комплексно сопряженное уравнение (19) при верхнем знаке принимает вид

$$\frac{\partial (E^{(1)}{}_n)^*}{\partial t} + i\frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^{\;2} + k^2{}_0 n^2 v^2{}_{Te}}{2\omega_0} (E^{(1)}{}_n)^* + i\frac{\omega_0}{2n_0} \cdot \{n^*{}_{in} (E_0^{(1)})^* + \sum_{m\neq 0} n^*{}_{in-m} (E_m{}^{(1)})^*\} = 0 \ , \tag{30}$$

В то же время для отрицательных индексов, это же уравнение может быть записано (при суммировании можно заменить немой индекс $m \to -m$)

$$\frac{\partial E^{(-1)}_{-n}}{\partial t} + i\frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^{\;2} + k^2{}_0 n^2 v^2{}_{Te}}{2\omega_0} E^{(-1)}_{-n} + i\frac{\omega_0}{2n_0} \cdot \{n_{i,-n} E^{(-1)}_0 + \sum_{m\neq 0} n_{i,-n+m} E^{(-1)}_{-m}\} = 0. \tag{31}$$

а) Легко видеть, что при $E^{(-1)}_{-n} = (E^{(1)}_n)^*$ и $n_{i,-n} = (n_{i,n})^*$ уравнения (30) и (31) идентичны. Точно также можно убедиться, что из подобных преобразований следует $E^{(-1)}_n = (E^{(1)}_{-n})^*$ и $n_{i,-n} = (n_{i,n})^*$. То есть, возмущение плотности ионов обладает симметрией $n_{i,-n} = (n_{i,n})^*$. При этом для корректного описания такой ионной каверны достаточно использовать компоненты ВЧ поля $E^{(1)}_n$, $E^{(1)}_{-n}$ и $E^{(1)}_0$, а также возмущения плотности ионов $n_{i,n}$, так как остальные величины выражаются через них, то есть можно отказаться от использования верхнего индекса.

Система уравнений (18), (27) в этих условиях может быть записана в виде

$$\frac{\partial E_n}{\partial t} - i\frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k^2{}_0 n^2 v^2{}_{Te}}{2\omega_0} E_n - i\frac{\omega_0}{2n_0}\cdot\sum_m n_{in-m} E_m = 0, \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2 n_{in}}{\partial t^2} + k_0^2 n^2 c_s^2 n_{in} = -\frac{k_0^2 n^2}{16\pi m_i}\sum_m E_{n-m} E^*_{-m} \quad \cdot \tag{33}$$

или при описании ионов частицами, можно воспользоваться уравнениями движения (20) и выражением для ионной плотности (2.21), где напряженность медленно меняющегося электрического поля

$$\overline{E}_n = -ik_0 n\tilde{\phi}_n = \frac{-ik_0 n n_{in} T}{e n_0} + \frac{-ik_0 n e}{4 m_e \omega_p{}^2}\sum_m E_{n-m} E^*_{-m}. \tag{34}$$

Для поля накачки, которой является длинноволновая ленгмюровская волна большой амплитуды, получим

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} - i\frac{\omega_0}{2n_0}\cdot\sum_m n_{i,-m} E_m = 0. \tag{35}$$

Отметим, что величины, отвечающие разному знаку нижнего индекса при этом независимы, что приводит к пространственному искажению интегральных возмущений, не только из-за изменения амплитуды, но и за счет пространственного сдвига возмущений разного масштаба.

б) Кстати, если $n_{i,-n} = n_{i,n} = (n_{i,n})*$, то есть, возмущения ионной плотности не меняют своего положения в пространстве, то ВЧ электрическое поле также остается симметричным в пространстве $E_n^{(1)} = E_{-n}^{(1)} = (E_n^{(-1)})* = (E_{-n}^{(-1)})*$ и для описания процесса достаточно значений $E_n^{(1)}$ и $n_{i,n}$, что обусловлено жесткой связью величин, отвечающих разному знаку нижнего индекса. Структура поля и плотности будет представлять собой неподвижную пространственную структуру, амплитуда которой растет, а полуширина уменьшается, по крайней мере в определенной области.

в) С другой стороны, возмущение ионов вида $n_{i,-n} = -(n_{i,n})*$ оказывается запрещено электронной дисперсией.

Дозвуковой режим

В условиях, когда $\partial^2 n_{in} / n_{in}\partial t^2 << k_P^2 c_s^2$, где k_P - волновой вектор колебаний, уравнение (33) упрощается

$$n_{in} = -\frac{1}{16\pi m_i c_s^2}\sum_m E_{n-m}^{(1)} E_m^{(-1)}. \tag{36}$$

Подставляя значения n_{in} в уравнение (28), представим его в виде

$$i\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{v^2{}_{Te}}{\omega_{pe}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}E + \frac{\omega_{pe}}{32 m_i c_s^2 n_0}\cdot |E|^2 E = 0. \tag{37}$$

В другой форме может быть записано в виде

$$\frac{\partial E_n}{\partial t} - i\frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k^2{}_0 n^2 v^2{}_{Te}}{2\omega_0} E_n + \frac{i\omega_0}{32\pi m_i n_0 c_s^2}\cdot\sum_m\sum_p E_{n-m-p} E^*_{-p} E_m = 0. \tag{38}$$

Сверхзвуковой режим

При $\partial^2 n_{in} / n_{in}\partial t^2 >> k_P^2 c_s^2$ возможно развитие сверхзвукового режима процесса. В этом случае уравнение (27) для медленных возмущений принимает вид

$$\frac{\partial^2 n_{in}}{\partial t^2} = -\frac{k_0^2 n^2}{16\pi m_i}\sum_{m\neq 0,n} E_{n-m} E^*_{-m}, \tag{39}$$

или

$$\frac{\partial^2 n_i}{\partial t^2} = \frac{1}{16\pi m_i}\frac{\partial^2}{\partial x^2}|E|^2. \tag{40}$$

Для волны большой амплитуды (волны накачки) волновой вектор которой стремится к нулю справедливо уравнение (35), а для коротковолновых возмущений

$$\frac{\partial E_n}{\partial t} - i\frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2 + k^2{}_0 n^2 v^2{}_{Te}}{2\omega_0} E_n - i\frac{\omega_0}{2n_0}\cdot\{n_{in} E_0 + \sum_{m\neq 0} n_{in-m} E_m\} = 0, \tag{41}$$

$$\frac{\partial^2 n_{in}}{\partial t^2} = -\frac{k_0^2 n^2}{16\pi m_i}\{E_n E_0^* + E_0 E_{-n}^* + \sum_{m\neq 0,n} E_{n-m} E^*_{-m}\}\cdot \tag{42}$$

Приведем также значение для медленно меняющейся напряженности поля с учетом волны накачки

$$\bar{E}_n = -ik_0 n\tilde{\phi}_n = \frac{-ik_0 n n_{in} T}{en_0} + \frac{-ik_0 ne}{4m_e \omega_p^{\ 2}}(E_n E_0^* + E_0 E_{-n}^* + \sum_{m\neq 0,n} E_{n-m} E_{-m}^*). \tag{43}$$

ХОЛОДНАЯ ПЛАЗМА, ОДНОМЕРНЫЕ ОБОЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ СИЛИНА

В случае большой интенсивности внешнего длинноволнового поля для холодной плазмы, следует воспользоваться подходом, изложенным в работах В.П.Силина [38].

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + u_{0\alpha}\frac{\partial}{\partial x}v_\alpha - \frac{e_\alpha}{m_\alpha}E = -\{v_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x}v_\alpha\}, \tag{44}$$

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + u_{0\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial x}n_\alpha + n_{\alpha 0}\frac{\partial}{\partial x}v_\alpha \cdot = -\{\frac{\partial}{\partial x}(n_\alpha \cdot v_\alpha)\}, \tag{45}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}E = 4\pi\sum_\beta e_\beta \cdot n_\beta. \tag{46}$$

Частицы находятся в поле внешней волны, длину которой для упрощений расчетов положим равной бесконечности, осциллируя со скоростью $u_{0\alpha} = -(e_\alpha |\mathrm{E}_0| / m_\alpha \cdot \omega_0)\cdot Cos\Phi$, компоненты напряженности поля внешней волны определяются следующим образом

$$E_0 = -i(|E_0|\exp\{i\omega_0 t + i\phi\} - |E_0|\exp\{-i\omega_0 t - i\phi\})/2. \tag{47}$$

Исключая $E_n = -4\pi ie(n_{in} - n_{en})/k_0 n$, перепишем первое уравнение системы (44)-(46) в следующем виде

$$\frac{\partial v_{\alpha n}}{\partial t} + u_{0\alpha}\cdot ik_0 n \cdot v_{\alpha n} + \frac{4\pi e_\alpha i}{k_0 n \cdot m_\alpha}\sum_\beta e_\beta \cdot n_{\beta m} = -ik_0\sum_m m\cdot v_{\alpha n-m}\cdot v_{\alpha m}. \tag{48}$$

Используем ниже следующие переменные

$$\nu_{\alpha n} = e_\alpha \cdot n_{\alpha n}\cdot \exp\{-ia_{\alpha n}\cdot Sin\Phi\}, \tag{49}$$

$$\theta_{\alpha n} = v_{\alpha n}\cdot \exp\{-ia_{\alpha n}\cdot Sin\Phi\}, \tag{50}$$

где $a_{\alpha n} = ne_\alpha k_0 E_0 / m_\alpha \cdot \omega_0^2$, $\Phi = \omega_0 t + \phi$. (51)

При этом первые два уравнения системы (44)-(46) можно записать в виде

$$\frac{\partial \nu_{\alpha n}}{\partial t} + \theta_{\alpha n}\cdot ik_0 n\cdot e_\alpha n_{\alpha 0} = -ik_0\cdot n\cdot\sum_m \nu_{\alpha n-m}\cdot\theta_{\alpha m}, \tag{52}$$

$$\frac{\partial \theta_{\alpha n}}{\partial t} + \frac{4\pi e_\alpha i}{k_0 n\cdot m_\alpha}\sum_\beta \nu_{\beta n}\cdot\exp\{i(a_{\beta n} - a_{\alpha n})\cdot Sin\Phi\} = -ik_0\cdot\sum_m m\theta_{\alpha n-m}\cdot\theta_{\alpha m}. \tag{53}$$

Очевидно, что $a_{in} - a_{en} = n(ek_0 E_0 / m_i\cdot\omega_0^2) + n(ek_0 E_0 / m_e\cdot\omega_0^2) \approx n(ek_0 E_0 / m_e\cdot\omega_0^2) = a_n$, где величина $k_n = nk_0$, как и прежде, определяет дискретный набор волновых чисел мод спектра. Для электронов уравнения (52)-(53) можно записать как

$$\frac{\partial \nu_{en}}{\partial t} - \theta_{en}\cdot ik_0 n\cdot en_0 = -ik_0\cdot n\cdot\sum_m \nu_{en-m}\cdot\theta_{em}, \tag{54}$$

$$\frac{\partial \theta_{en}}{\partial t} - \frac{4\pi ei}{k_0 n\cdot m_e}(\nu_{en} + \nu_{in}\cdot\exp\{ia_n\cdot Sin\Phi\}) = -ik_0\cdot\sum_m m\theta_{en-m}\cdot\theta_{em}. \tag{55}$$

Используем представление

$$\nu_{en} = \sum_s u_n^{(s)}\cdot\exp\{is\omega_0\cdot t\} = u_n^{(0)} + u_n^{(1)}\cdot e^{i\omega_0 t} + u_n^{(-1)}\cdot e^{-i\omega_0 t} + u_n^{(2)}\cdot e^{i2\omega_0 t} + u_n^{(-2)}\cdot e^{-i2\omega_0 t}, \tag{56}$$

$$\theta_{en} = \sum_s v_n^{(s)}\cdot\exp\{is\omega_0\cdot t\} = v_n^{(0)} + v_n^{(1)}\cdot e^{i\omega_0 t} + v_n^{(-1)}\cdot e^{-i\omega_0 t} + v_n^{(2)}\cdot e^{i2\omega_0 t} + v_n^{(-2)}\cdot e^{-i2\omega_0 t}, \ , \tag{57}$$

и известное разложение

$$\exp\{ia\cdot Sin\Phi\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(a)\cdot\exp\{im\Phi\}, \tag{58}$$

где $J_m(x)$- функция Бесселя, причем $J_0(x) = J_0(-x)$, $J_1(x) = -J_1(-x) = J_{-1}(-x)$, $J_2(x) = J_{-2}(x) = J_2(-x)$ [39], найдем нерезонансные величины возмущений плотности $u_n^{(0)}, u_n^{(2)}, u_n^{(-2)}$ и скорости $v_n^{(0)}, v_n^{(2)}, v_n^{(-2)}$ в осциллирующей системе отсчета:

$$v^{(0)}{}_n = \frac{k_0}{\omega_0}\sum_m (n-m)[v^{(+1)}{}_{n-m}\cdot v^{(-1)}{}_m - v^{(-1)}{}_{n-m}\cdot v^{(1)}{}_m) = \frac{1}{i\omega_0}[\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x}v^{(-1)} - \frac{\partial v^{(-1)}}{\partial x}v^{(1)}]_n, \tag{59}$$

$$u^{(0)}{}_n = -\nu_{in}\cdot J_0(a_n) + \frac{k_0^{\ 2}n^2\cdot m_e}{4\pi e}\cdot\sum_m v^{(1)}{}_{n-m}\cdot v^{(-1)}{}_m = -\nu_{in}\cdot J_0(a_n) - \frac{m_e}{4\pi e}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[v^{(1)}v^{(-1)}]_n, \tag{60}$$

$$
\begin{aligned}
v^{(\pm 2)}{}_n &= \pm\frac{2\omega_0}{3k_0 n\cdot en_0}\nu_{in}\cdot J_{\pm 2}(a_n)\exp[\pm 2i\phi]\mp\frac{k_0}{\omega_0}\sum_m m v^{(\pm 1)}{}_{n-m}\cdot v^{(\pm 1)}{}_m = \\
&= \pm\frac{2\omega_0}{3k_0 n\cdot en_0}\nu_{in}\cdot J_{\pm 2}(a_n)\exp[\pm 2i\phi]\mp\frac{1}{i\omega_0}[\frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x}v^{(\pm 1)}]_n,
\end{aligned}
\tag{61}
$$

$$
\begin{aligned}
u^{(\pm 2)}{}_n &= \frac{1}{3}\nu_{in}\cdot J_{\pm 2}(a_n)\exp[\pm 2i\phi]-\frac{k_0{}^2 n\cdot en_0}{\omega^2{}_{pe}}\sum_s s v^{(\pm 1)}{}_s\cdot v^{(\pm 1)}{}_{n-s} = \\
&= \frac{1}{3}\nu_{in}\cdot J_{\pm 2}(a_n)\exp[\pm 2i\phi]+\frac{en_0}{\omega^2{}_{pe}}\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial v^{(\pm 1)}}{\partial x}v^{(\pm 1)}]_n.
\end{aligned}
\tag{62}
$$

Для резонансных величин справедливо уравнение

$$
\begin{aligned}
&\pm 2i\omega_0\{\frac{\partial u^{(\pm 1)}{}_n}{\partial t}\mp i\frac{\omega_{pe}^2-\omega_0{}^2}{2\omega_0}u^{(\pm 1)}{}_n\mp i\nu_{in}\cdot\frac{\omega_{pe}^2 J_{\pm 1}(a_n)\cdot\exp(\pm i\phi)}{2\omega_0}\} = \\
&+k^2{}_0 n\cdot en_0\sum_m m[v^{(0)}{}_{n-m}\cdot v^{(\pm 1)}{}_m+v^{(\pm 1)}{}_{n-m}\cdot v^{(0)}{}_m]- \\
&-ik_0\cdot n\cdot(\pm i\omega_0)\sum_m[u^{(0)}{}_{n-m}\cdot v^{(\pm 1)}{}_m+u^{(\pm 1)}{}_{n-m}\cdot v^{(0)}{}_m]+ \\
&+k^2{}_0 n\cdot en_0\sum_m m v^{(\mp 1)}{}_{n-m}\cdot v^{(\pm 2)}{}_m-ik_0\cdot n\cdot(\pm i\omega_0)\sum_m[u^{(\pm 2)}{}_{n-m}\cdot v^{(\mp 1)}{}_m.
\end{aligned}
\tag{63}
$$

В работах [28-30] было использовано представление $u^{(\pm 1)}{}_n = \pm k_0 n\cdot en_0 v^{(\pm 1)}{}_n/\omega_0 = ik_0 n\cdot E_n^{(\pm 1)}/4\pi$ (где $v_n^{(\pm 1)} = \pm ieE_n^{(\pm 1)}/m_e\omega_0$). В этом случае, выделяя в правую часть (63) слагаемые, ответственные только за электронную нелинейность, перепишем это уравнение для коротковолновых возмущений в виде

$$
\begin{aligned}
&\pm 2i\omega_0\{\frac{\partial u^{(\pm 1)}{}_n}{\partial t}\mp i\frac{\omega_{pe}^2-\omega_0{}^2}{2\omega_0}u^{(\pm 1)}{}_n\mp i\nu_{in}\cdot\frac{\omega_{pe}^2 J_{\pm 1}(a_n)\cdot\exp(\pm i\phi)}{2\omega_0}\}\cdot e^{\pm i\omega_0 t}+ \\
&+\frac{\omega^2{}_0}{en_0}n\cdot e^{\pm i\omega_0 t}\sum_m\frac{\nu_{in-m}}{m}\cdot[u_m{}^{(\mp 1)}\cdot J_{\pm 2}(a_{n-m})\exp[\pm 2i\phi]+u_m{}^{(\pm 1)}\cdot J_0(a_{n-m})] = (k_0 n\cdot en_0/\omega_0)\cdot I.
\end{aligned}
\tag{64}
$$

Очевидно, и в этом случае правая часть (64) оказывается равной нулю. Перепишем (64) в виде [28]

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u^{(\pm 1)}{}_n}{\partial t}\mp i\frac{\omega_{pe}^2-\omega_0{}^2}{2\omega_0}u^{(\pm 1)}{}_n\mp i\nu_{in}\cdot\frac{\omega_{pe}^2 J_{\pm 1}(a_n)\cdot\exp(\pm i\phi)}{2\omega_0}+ \\
&\mp i\frac{\omega_0 n}{2en_0}\sum_m\frac{\nu_{in-m}}{m}\cdot[u_m{}^{(\mp 1)}\cdot J_{\pm 2}(a_{n-m})\exp[\pm 2i\phi]+u_m{}^{(\pm 1)}\cdot J_0(a_{n-m})] = 0.
\end{aligned}
\tag{65}
$$

Если использовать представление для поля в виде (2.10) тогда $E_n^{(\pm 1)}\to E_n^{(\pm 1)}/2 = -4\pi iu_n^{(\pm 1)}/k_0 n$, и уравнение (65), можно записать иначе

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial E^{(\pm 1)}{}_n}{\partial t}\mp i\frac{\omega_{pe}^2-\omega_0{}^2}{2\omega_0}E^{(\pm 1)}{}_n\mp\frac{8\pi\omega_{pe}\nu_{in}}{2k_0 n}J_{\pm 1}(a_n)\cdot\exp(\pm i\phi)+ \\
&\mp i\frac{\omega_0}{2en_0}\sum_m\nu_{in-m}\cdot[E_m{}^{(\mp 1)}\cdot J_{\pm 2}(a_{n-m})\exp[\pm 2i\phi]+E_m{}^{(\pm 1)}\cdot J_0(a_{n-m})] = 0.
\end{aligned}
\tag{66}
$$

Приведем также уравнение для волны накачки

$$
\frac{\partial E_0^{(\pm 1)}}{\partial t}\mp\frac{8\pi\omega_0}{2en_0 k_0}\sum_m\frac{\nu_{i,-m}}{m}\cdot[u_m{}^{(\mp 1)}\cdot J_{\pm 2}(a_{-m})\exp[\pm 2i\phi]+u_m{}^{(\pm 1)}\cdot J_0(a_{-m})] = 0. \tag{67}
$$

Из представления волны накачки, соответствующего выбранной скорости осцилляций $u_{0\alpha} = -(e_\alpha E_0/m_\alpha\cdot\omega_0)\cdot Cos\Phi$ (3.4), получим $E_0\to -iE_0$ и $E_0^*\to iE_0^*$ и для E_0 уравнение (67) можно переписать [28]

$$
\frac{\partial E_0}{\partial t} = \frac{8\pi i\omega_0}{2en_0 k_0}\sum_m\frac{\nu_{i,-m}}{m}\cdot[u_m^{(-1)}\cdot J_2(a_{-m})\exp[+2i\phi]+u_m^{(+1)}\cdot J_0(a_{-m})], \tag{68}
$$

где $\Delta = (\omega_{pe}^2-\omega_0{}^2)/2\omega_0$, или, выражая возмущения плотности через напряженности электрического поля мод,

$$
\frac{\partial E_0}{\partial t} = -\frac{\omega_0}{2en_0}\sum_m\nu_{i,-m}\cdot[E_m{}^{(-1)}\cdot J_2(a_m)\exp[2i\phi]+E_m{}^{(+1)}\cdot J_0(a_m)]. \tag{69}
$$

Медленно изменяющаяся во времени напряженность электрического поля [30]

$$\bar{E}_n = (-\frac{4\pi i}{k_0 n})(\langle\{\nu_{en}\cdot\exp\{-ia_n\cdot Sin\Phi\}\rangle + \nu_{in}) =$$
$$= (-\frac{4\pi i}{k_0 n})\{\nu_{in}[1-J_0^2(a_n)+\frac{2}{3}J_2{}^2(a_n)] + [u_n^{(1)}J_1(a_n)\cdot e^{-i\phi} + u_n^{(-1)}\cdot J_{-1}(a_n)\cdot e^{i\phi}] -$$
$$-\frac{n^2}{en_0}J_0(a_n)\sum_m\frac{u^{(1)}{}_{n-m}\cdot u^{(-1)}{}_m}{(n-m)m} - \frac{n}{en_0}J_2(a_n)\cdot\sum_m\frac{1}{m}[u^{(1)}{}_{n-m}\cdot u^{(1)}{}_m e^{-2i\phi} + u^{(-1)}{}_{n-m}\cdot u^{(-1)}{}_m e^{2i\phi}]\}. \quad (70)$$

может быть представлена иначе

$$\bar{E}_n = (-\frac{4\pi i}{k_0 n})\nu_{in}[1-J_0^2(a_n)+\frac{2}{3}J_2{}^2(a_n)] + \frac{1}{2}[E_n^{(1)}J_1(a_n)\cdot e^{-i\phi} + E_n^{(-1)}\cdot J_{-1}(a_n)\cdot e^{i\phi}] -$$
$$-\frac{ink_0}{16\pi en_0}J_0(a_n)\sum_m E^{(1)}{}_{n-m}\cdot E^{(-1)}{}_m -$$
$$-\frac{ik_0}{16\pi en_0}J_2(a_n)\cdot\sum_m(n-m)[E^{(1)}{}_{n-m}\cdot E^{(1)}{}_m e^{-2i\phi} + E^{(-1)}{}_{n-m}\cdot E^{(-1)}{}_m e^{2i\phi}]. \quad (71)$$

что позволяет описывать ионы крупными частицами, уравнения движения для которых приведены выше (2.20) и плотность ионов также определяется выражениями (21). Используя уравнения (52)–(53), в которых правыми частями можно пренебречь вследствие их малости, можно перейти к гидродинамическому описанию ионов. Уравнение для ионной плотности при этом [28]

$$\frac{\partial^2\nu_{in}}{\partial t^2} = -\Omega_i^2\{\nu_{in}[1-J_0^2(a_n)+\frac{2}{3}J_2{}^2(a_n)] + [u_n^{(1)}J_1(a_n)\cdot e^{-i\phi} + u_n^{(-1)}\cdot J_{-1}(a_n)\cdot e^{i\phi}] -$$
$$-\frac{n^2}{en_0}J_0(a_n)\sum_m\frac{u^{(1)}{}_{n-m}\cdot u^{(-1)}{}_m}{(n-m)m} - \frac{n}{en_0}J_2(a_n)\cdot\sum_m\frac{1}{m}[u^{(1)}{}_{n-m}\cdot u^{(1)}{}_m e^{-2i\phi} + u^{(-1)}{}_{n-m}\cdot u^{(-1)}{}_m e^{2i\phi}]\}, \quad (72)$$

или

$$\frac{\partial^2\nu_{in}}{\partial t^2} = -\Omega_i^2\{\nu_{in}[1-J_0^2(a_n)+\frac{2}{3}J_2{}^2(a_n)] + \frac{ik_0 n}{8\pi}[E_n^{(1)}J_1(a_n)\cdot e^{-i\phi} + E_n^{(-1)}\cdot J_{-1}(a_n)\cdot e^{i\phi}] -$$
$$+\frac{in^2k_0^2}{64\pi^2 en_0}\sum_m J_0(a_n)\cdot E^{(1)}{}_{n-m}\cdot E^{(-1)}{}_m +$$
$$+\frac{ink_0^2}{64\pi^2 en_0}\sum_m(n-m)[E^{(1)}{}_{n-m}\cdot E^{(1)}{}_m e^{-2i\phi} + E^{(-1)}{}_{n-m}\cdot E^{(-1)}{}_m e^{2i\phi}]\}. \quad (73)$$

Симметрии

Так как и выше, можно убедиться, в том, что комплексно сопряженное уравнение (67) при нижнем знаке принимает вид (при суммировании можно заменить немой индекс $m \to -m$)

$$\frac{\partial(E^{(-1)}{}_{-n})^*}{\partial t} - i\frac{\omega_{pe}^2-\omega_0{}^2}{2\omega_0}(E^{(-1)}{}_{-n})^* - \frac{4\pi\omega_{pe}(\nu_{i,-n})^*}{k_0 n}J_1(a_n)\cdot\exp(i\phi) -$$
$$-i\frac{\omega_0}{2en_0}\sum_m(\nu_{i,-n+m})^*\cdot[(E_{-m}{}^{(1)})^*\cdot J_{-2}(a_{-n+m})\exp[2i\phi] + (E_{-m}{}^{(-1)})^*\cdot J_0(a_{-n+m})] = 0. \quad (74)$$

В то же время для положительных индексов, это же уравнение может быть записано

$$\frac{\partial E^{(1)}{}_n}{\partial t} - i\frac{\omega_{pe}^2-\omega_0{}^2}{2\omega_0}E^{(1)}{}_n - \frac{4\pi\omega_{pe}\nu_{in}}{k_0 n}J_{\pm 1}(a_n)\cdot\exp(i\phi) -$$
$$-i\frac{\omega_0}{2en_0}\sum_m\nu_{in-m}\cdot[E_m{}^{(-1)}\cdot J_2(a_{n-m})\exp[2i\phi] + E_m{}^{(1)}\cdot J_0(a_{n-m})] = 0. \quad (75)$$

а) Легко видеть, что при $E_{-n}^{(-1)} = (E_n^{(1)})^*$ и $\nu_{i,-n} = (\nu_{i,n})^*$ уравнения (72) и (73) идентичны. Точно также можно убедиться, что из подобных преобразований следует $E_n^{(-1)} = (E_{-n}^{(1)})^*$ и $\nu_{i,n} = (\nu_{i,-n})^*$. То есть, возмущения заряда ионов обладают симметрией $n_{i,-n} = (n_{i,n})^*$. При этом для корректного описания процесса неустойчивости достаточно использовать компоненты ВЧ поля $E_n^{(1)}$, $E_{-n}^{(1)}$ и $E_0^{(1)}$, а также возмущения заряда ионов $\nu_{i,n}$ при положительно определенных значениях индекса n. Так как остальные величины выражаются через них, то есть можно отказаться от использования верхнего индекса. Система уравнений (66), (71) в этих условиях может быть записана в виде

$$\frac{\partial E_n}{\partial t} - i\frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^{\,2}}{2\omega_0}E_n - \frac{4\pi\omega_{pe}\nu_{in}}{k_0 n}J_1(a_n)\cdot\exp(i\phi) -$$
$$-i\frac{\omega_0}{2en_0}\sum_m \nu_{in-m}\cdot[E_{-m}*\cdot J_2(a_{n-m})\exp[2i\phi] + E_m\cdot J_0(a_{n-m})] = 0, \quad (76)$$

$$\frac{\partial^2\nu_{in}}{\partial t^2} = -\Omega_i^2\{\nu_{in}[1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3}J_2^{\,2}(a_n)] + \frac{ik_0 n}{8\pi}J_1(a_n)[E_n\cdot e^{-i\phi} - E_{-n}^*\cdot e^{i\phi}] -$$
$$+\frac{in^2k_0^2}{64\pi^2 en_0}\sum_m J_0(a_n)\cdot E_{n-m}\cdot E_{-m}^* + \frac{ink_0^2}{64\pi^2 en_0}\sum_m (n-m)[E_{n-m}\cdot E_m\cdot e^{-2i\phi} + E_{m-n}^*\cdot E_{-m}^*\cdot e^{2i\phi}]\}, \quad (77)$$

или при описании ионов частицами, можно воспользоваться уравнениями движения (20) и выражением для ионной плотности (21), где напряженность медленно меняющегося электрического поля

$$\bar{E}_n = (-\frac{4\pi i}{k_0 n})\nu_{in}[1 - J_0^2(a_n) + \frac{2}{3}J_2^{\,2}(a_n)] + \frac{1}{2}J_1(a_n)[E_n\cdot e^{-i\phi} - E_{-n}^*\cdot e^{i\phi}] -$$
$$-\frac{ink_0}{16\pi en_0}J_0(a_n)\sum_m E_{n-m}\cdot E_{-m}^* -$$
$$-\frac{ik_0}{16\pi en_0}J_2(a_n)\cdot\sum_m (n-m)[E_{n-m}\cdot E_m\cdot e^{-2i\phi} + E_{m-n}^*\cdot E_{-m}^*\cdot e^{2i\phi}]. \quad (78)$$

Для E_0 также можно записать уравнение

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} = -\frac{\omega_0}{2en_0}\sum_m \nu_{i,-m}\cdot[E_{-m}^*\cdot J_2(a_m)\exp[2i\phi] + E_m\cdot J_0(a_m)]. \quad (79)$$

Отметим, что величины, отвечающие разному знаку нижнего индекса при этом независимы, что приводит к пространственному искажению интегральных возмущений, не только из-за изменения амплитуды, но и за счет пространственного сдвига отдельных компонент пакета.

б) В случае если $n_{i,-n} = n_{i,n} = (n_{i,n})*$, то есть, возмущения ионной плотности не меняют своего положения в пространстве, то ВЧ электрическое поле также остается симметричным в пространстве $E_n^{(1)} = E_{-n}^{(1)} = (E_n^{(-1)})* = (E_{-n}^{(-1)})*$ и для описания процесса достаточно значений $E_n^{(1)}$ и $n_{i,n}$, что, как отмечено выше, обусловлено жесткой связью величин, отвечающих разному знаку нижнего индекса. Структура поля и плотности как в случае описанном в модели Захарова, будет представлять собой неподвижную пространственную структуру, амплитуда которой растет, а полуширина уменьшается, по крайней мере в определенной области.

в) Растущие во времени возмущения для ионов вида $n_{i,-n} = -(n_{i,n})*$ не реализуются.

При $a_n << 1$ уравнения (76)-(78) с учетом представления $J_1(a_n) \approx a_n/2$, $J_0(a_n) \approx 1$, $J_2(a_n) \approx a_n^2/8$ совпадает с полученными ранее для высокотемпературного случая (41)-(43), с точностью до величины расстройки и с учетом замен $E_0 \to -iE_0$ и $E_0^* \to iE_0^*$ Точно также совпадают при этих же условиях уравнения для волны накачки (79) и (35).

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ

Ограничимся ниже рассмотрением наиболее интересного случая длинноволновой накачки. Из уравнений Захарова (32) и (33) в линейном случае, используя представление $\partial E / E\partial t = i\Omega$ можно получить дисперсионное уравнение для высокотемпературного случая в сверхзвуковом пределе $\partial^2 n_{in} / n_{in}\partial t^2 >> k_0^2 c_s^2 n^2$

$$-\Omega^2\{\Omega^2 - \Delta^2\} + \Delta\cdot A = 0, \quad (80)$$

где расстройка равна $\Delta = v_{Te}^2 n^2 k_0^2 / 2\omega_p$, $A = \frac{1}{2}\left\{\frac{m_e}{m_i}\frac{k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_{pe}}\frac{|E_0|^2}{4\pi n_0 T_e}\right\}\omega_{pe}^3$.С другой стороны, линеаризуя уравнения (76) и (77), получим точно такое же дисперсионное уравнение для случая холодной плазмы, где, однако, $\Delta = \Delta_0 = \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^{\,2}}{2\omega_0}$, а величина $A = J_1^{\,2}(a_n)\omega_{pe}^3\frac{m_e}{m_i}$. Заметим, что дисперсионные уравнения (80) при $a_n << 1$ и с учетом замен $E_0 \to -iE_0$ и $E_0^* \to iE_0^*$ в этих двух случаях совпадают. Положительная определенность расстройки $\Delta = v_{Te}^2 n^2 k_0^2 / 2\omega_p$ в модели Захарова очевидна, а что касается расстройки $\Delta = (\omega_{pe}^2 - \omega_0^{\,2}) / 2\omega_0$ в модели Силина, то, в книге [9] показано, что она также положительно определена, по крайней мере, в случае возбуждения длинноволновых ленгмюровских колебаний с частотой $\omega_0 \le \omega_{pe}$ сильноточным релятивистским пучком электронов.

Для нормированных величин $\delta = \Omega / \omega_{pe}$ и $A \to A/\omega_{pe}^3$ в таблице приведены значения, отвечающие двум моделям описания модуляционной неустойчивости ленгмюровских волн.

Таблица.

Параметры моделей		
Модели	Захаровская модель	Силинская модель
Условия применимости	$\frac{\lvert E_0\rvert^2}{4\pi n_0 T_e} \equiv \frac{W}{n_0 T_e} << 1$	$\frac{\lvert E_0\rvert^2}{4\pi n_0 T_e} \equiv \frac{W}{n_0 T_e} >> 1$
Квадрат поправки к нормированной частоте	$\delta_1^2 = \frac{\Delta^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta^4}{4} + A\Delta}$	$\delta^2 = \frac{\Delta^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta^4}{4} + A\Delta}$
Расстройки	$\Delta_n = \frac{\omega_{pe}^2 + v_{Te}^2 k_0^2 n^2 - \omega_0^2}{2\omega_{pe}^2} \approx \frac{v_{Te}^2 k_0^2 n^2}{2\omega_{pe}^2}$	$\Delta = \Delta_0 = \frac{\omega_{pe}^2 - \omega_0^2}{2\omega_{pe}^2}$
Коэффициент A	$A = A(n) = \frac{1}{2}\left\{\frac{m_e}{M}\frac{k_0^2 n^2 v_{Te}^2}{2\omega_{pe}}\frac{\lvert E_0\rvert^2}{4\pi n_0 T_e}\right\}$	$A = A(n) = \left(\frac{m_e}{m_i}\right) J_1^2(a_n)$

В модели Захарова, нормированная на ленгмюровскую частоту поправка $\delta = \Omega / \omega_{pe}$, вообще говоря, должна быть записана в виде

$$\delta^2 = \frac{\Delta^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta^4}{4} + B\Delta^2}\,, \tag{81}$$

где

$$B = \frac{1}{2}\{\frac{m_e}{m_i}\frac{|E_0|^2}{4\pi n_0 T_e}\}. \tag{82}$$

Так как $(\Delta^4 + 4B\Delta^2)^{1/2} - \Delta^2$ с ростом Δ монотонно растет, не имея выраженного максимума, то при малых $\Delta^2 << B$, $\Omega^2 \approx -\Delta\sqrt{B}$, при этом $|\Omega^2| < B$, а инкремент неустойчивости равен

$$\operatorname{Im}\Omega = |\Omega| \approx \left(\frac{k_0^2 n^2 v^2{}_{Te}}{2\omega_{pe}^2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2}\frac{|E_0|^2}{4\pi n_0 T_e}\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/4}\omega_{pe}. \tag{83}$$

При больших $\Delta^2 >> B$, $\Omega^2 \approx -B$, при этом инкремент неустойчивости

$$\operatorname{Im}\Omega = |\Omega| \approx \left(\frac{1}{2}\frac{|E_0|^2}{4\pi n_0 T_e}\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}. \tag{84}$$

То есть, инкремент увеличивается с ростом волнового числа возмущений, выходя при больших значениях волнового числа на свое наибольшее значение (84).

В модели Силина при значениях расстройки $\Delta^3 = A/2$ или, что то же самое $\Delta = (\frac{m_e}{2m_i})^{1/3} J_1^{2/3}(a_{n_m})$, относительный инкремент достигает значений

$$\delta = \pm\frac{i}{\sqrt[3]{2}}\cdot A^{1/3} = \pm\frac{i}{\sqrt[3]{2}}(\frac{m_e}{m_i})^{1/3} J_1^{2/3}(a_n). \tag{85}$$

Возмущения с волновым числом $k_m = k_0 n_m$ для которых $a_{n_m} = 1,84$, значение функции Бесселя максимально и величина относительного инкремента для таких возмущений достигает своего наибольшего значения

$$\delta_{\max} = \pm 0.44 i (\frac{m_e}{m_i})^{1/3}. \tag{86}$$

Таким образом, в модели Силина наибольшим инкрементом обладают волновые вектора, для которых $a_{n_m} = 1,84$. При развитии неустойчивости амплитуда волны накачки убывает, и максимум инкремента перемещается в коротковолновую область.

Важно отметить, что значения максимальных инкрементов параметрической неустойчивости увеличиваются при уменьшении масштаба возмущений. Причем, если в модели Захарова уменьшение амплитуды поля накачки приводит снижению инкрементов во всей области неустойчивости, то в модели Силина подобный процесс сдвигает максимум инкремента в коротковолновую область, не уменьшая его значения (8б). Таким образом, процесс перекачки по спектру в двух моделях в значительной степени обусловлен линейными механизмами роста возмущений.

ВЫВОДЫ

Существует глубокая связь между процессами модуляционной неустойчивости длинноволновых ленгмюровских колебаний как в горячей, так и в холодной плазме. Характер возбуждения имеет ту же симметрию, механизмы возбуждения обширного коротковолнового спектра также подобны. Движение энергии спектру в моделях Захарова и Силина связано не только с перестройкой поля - взаимодействием мод между собой, а в значительной степени есть следствие линейной неустойчивости. Максимальные инкременты для модели Захарова с уменьшением масштаба возмущений увеличиваются. В модели Силина максимальный инкремент при уменьшении амплитуды накачки сдвигается в коротковолновую область [10,38], что подтвердили результаты изучения нелинейной стадии процесса [29]. Важно также, что максимальный инкремент в холодной плазме при уменьшении амплитуды поля накачки не изменяется, а инкременты в горячей плазме при тех же условиях уменьшаются во всей области неустойчивости.

Возбуждаемые сильноточным пучком заряженных частиц ленгмюровские колебания большой амплитуды имеют длину волны не более чем на два порядка большую длин волн возбуждаемого спектра. Возбуждения в плазме в этом случае представляют собой даже при полной синхронизации фаз мод спектра кноидальную волну. Такую синхронизацию мод спектра можно формально моделировать, предполагая, что возмущения ионной плотности не меняют своего положения в пространстве, при этом электрическое поле также остается симметричным в пространстве. Структура поля и плотности будет представлять собой стоячую волну, амплитуда которой растет, а полуширина уменьшается. Подобная симметрия обсуждалась выше (б). Понятно, что каверны плотности в такой симметризованной задаче будут наиболее глубокими [31]. Их можно рассматривать как предельный и, видимо, трудно достижимый случай. В других обсуждаемых выше случаях (а) возмущения одного масштаба, но имеющие разное направление фазовой скорости, остаются независимыми. Медленно меняющееся во времени поле будет представлять собой сложную интерференцию возмущений разных масштабов. Интерференция в этом случае будет вынужденная [40], управляемая внешним полем накачки. Возникновение глубоких каверн, способных захватывать заметную часть ионов, подобно [31,41], в произвольном случае может осложняться интерференционными процессами и будет относительно редким, что, видимо, и наблюдали экспериментаторы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Silin V.P., Rukhadze A.A. Elektromagnitnye svoystva plazmy i plazmopodobnykh sred. – M.: Atomizdat, 1961. – 244s.
2. Basov N.G., Krokhin O.N. Usloviya razogreva plazmy izlucheniem opticheskogo generatora // ZhETF. – 1964. - T.46, v.1. - C.171-175.
3. Dawson J.M. On the production of plasma by giant pulse lasers // Phys. Fluids. – 1964. - Vol.7, №7. - P.981-987.
4. Pashinin P.P., Prokhorov A.M. Poluchenie vysokotemperaturnoy plotnoy plazmy pri lazernom nagreve spetsial'noy gazovoy misheni // ZhETF. – 1971. – T.60, v.5. – C.1630-1636.
5. Buts V.A., Lebedev A.N. Kogerentnoe izluchenie intensivnykh elektronnykh puchkov. – M.: Izd. FIAN RAN, 2006. - 333s.
6. Faynberg Ya.B. Plazmennaya elektronika // Ukr. fiz. zhurn. – 1978. – T. 23, v. 11. – S. 1885-1901; Nekotorye voprosy plazmennoy elektroniki // Fizika plazmy. – 1985. – T.11, v.11. – S. 1398-1410.
7. Kuzelev M.V., Rukhadze A.A. Elektrodinamika plotnykh elektronnykh puchkov v plazme. – M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1990. – 336s.
8. Shapiro V.D., Shevchenko V.I. Vzaimodeystvie volna-chastitsa v neravnovesnykh sredakh // Izv. VUZov Radiofizika. – 1976. – T.19, v.5-6. – S.787-791.
9. Kondratenko A.N., Kuklin V.M. Osnovy plazmennoy elektroniki. – M.: Energoatomizdat, 1988. – 320s.
10. Silin V.P. Parametricheskiy rezonans v plazme // ZhETF. – 1965. – T. 48, v.6. – S. 1679-1691.
11. Zakharov V.E. O spektre slaboy turbulentnosti v plazme bez magnitnogo polya //ZhETF. – 1966. – T. 51, v.6. – S. 688-696; Zakharov V.E. Weak-turbulence Spectrum in a Plasma Without a Magnetic Field // Sov. Phys. JETP. –1967. – Vol. 24(2), P.455-459.
12. Kruer, W. L., Kaw P. K., Dawson J. M., Oberman C. Anomalous high-frequency resistivity and heating of a plasma // Phys. Rev. Lett. – 1970. – Vol.24, №18. - P.987-990.
13. Aliev Yu.M., Silin V.P. Teoriya kolebaniy plazmy, nakhodyashcheysya v vysokochastotnom elektromagnitnom pole // ZhETF. – 1965. –T.48, v.3. – C.901-912.
14. Gorbunov L.M., Silin V.P. O neustoychivosti plazmy v sil'nom vysokochastotnom pole // ZhETF. - 1965. – T.49, v.6. – C.1973-1981.
15. Silin V.P. Anomal'naya nelineynaya dissipatsiya vysokochastotnykh radiovoln v plazme //UFN. – 1972. – T 108, v. 4. – C.625-654.
16. Kruer W.L. Heating of underdense plasma by intense lasers // Phys. Fluids. – 1973. – Vol.16, №9. – P.1548-1550.
17. Ivanov A.A. Nikulin M.G. Nelineynoe vzaimodeystvie lengmyurovskikh voln bol'shoy amplitudy v besstolknovitel'noy plazme

// ZhETF. – 1973. – T.65, v.1. – S.168-174.
18. Kim H.C., Stenzel R.L., Wong A.Y. Development of "Cavitons" and Trapping of rf Field. II // Phys. Rev. Lett. – 1974. – Vol. 33. – P. 886.
19. Andreev N.E. Silin V.P., Stenchikov G.L. O nasyshchenii parametricheskoy neustoychivosti plazmy v sil'nom elektricheskom pole // Fizika plazmy. – 1977. – T.3, v.5. – S.1088-1096.
20. Kovrizhnykh L.M. Modulyatsionnaya neustoychivost' i nelineynye volny v kholodnoy plazme //Fizika plazmy. – 1977. – T.3, v.5. – S. 1097-1105.
21. Buchel'nikova N.S., Matochkin E.P. Neustoychivost' i zatukhanie odnomernykh lengmyurovskikh voln / Preprint № 79-115. AN SSSR, In-t. yadernoy fiziki, 1979. – 20s.
22. Antipov S.V., Nezlin M.V., Snezhkin E.N., Trubnikov A.S. Kvazisolitonnye lengmyurovskie kolebaniya, lokalizuyushchiesya v «yamkakh» plotnosti zamagnichennoy plazmy // Pis'ma v ZhETF. – 1976. – T. 23, v.11. – S. 613-616.
23. Sagdeev R.Z., Shapiro V.D., Shevchenko V.I. Dissipatsiya moshchnoy elektromagnitnoy volny v neodnorodnoy plazme i «sverkhsil'naya» plazmennaya turbulentnost' // Fizika plazmy. – 1980. – T.6, v.3. – S. 377-386.
24. Wong A.Y., Cheung P.Y. Three-Dimensional Self-Collapse of LangmuirWaves // Phys. Rev. Lett. – 1984. – Vol. 52. – P.1222 1228.
25. Cheung P.Y., Wong A.Y. Nonlinear evolution of electron electron-beam-plasma interaction // Phys. Fluids. –1985. – Vol. 28, №5. – P. 1538-1548.
26. Karfidov D.M., Rubenchik A.M., Sergeychev K.F., Sychev I.A. Sil'naya lengmyurovskaya turbulentnost', vozbuzhdaemaya v plazme elektronnym puchkom //ZhETF. – 1990. – T. 98, v.5(11). – S. 1592-1599.
27. Zakharov B.E., Pushkarev A.H., Rubenchik A.M., Sagdeev R.Z., Shvets V.F. Kinetika trekhmernogo lengmyurovskogo kollapsa // ZhETF. – 1989. – T. 96, v.2. – S.591-603.
28. Kuklin V.M. Instability of intensive longitudinal oscillations and structures in plasma // Proc. Contr. Papers. Int. Conf. on Plasma Physics. Kiev, Apr.6-12, 1987. – Vol.4. - P.101-104.
29. Kuklin V.M., Sevidov S.M. K nelineynoy teorii ustoychivosti intensivnykh kolebaniy kholodnoy plazmy // Fizika plazmy. – 1988. – T.14, v.10. – C. 1180-1185.
30. Kuklin V.M., Panchenko I.P., Sevidov S.M. Neustoychivost' intensivnoy lengmyurovskoy volny v kholodnoy plazme // Radiotekhnika i elektronika. – 1988. – T.33, v.10. – S. 2135-2140.
31. Chernousenko V.M., Kuklin V.M., Panchenko I.P. Struktury v neravnovesnykh sredakh / V kn.: Integriruemost' i kineticheskie uravneniya dlya solitonov: Sb. nauch. tr. AN USSR. In-t teoret. fiziki; Otv. red. Bar'yakhtar V.G., Zakharov V.E., Chernousenko V.M. – K.: Nauk. Dumka, 1990. – 472s.
32. Koch P., Albritton J. Electron and ion heating through resonant plasma oscillations // Phys. Rev. Lett.. – 1974. - Vol.32, №25. - P.1420-1423.
33. Bulanov S.V., Sasorov P.V. Ob uskorenii ionov na nelineynoy stadii bunemanovskoy neustoychivosti // Fizika plazmy. – 1986. – T.12, v. 1. – C.54-56.
34. Batanov G.M., Ivanov V.A., Kosykh I.A., Sergeychev K.F. Lengmyurovskie volny bol'shoy amplitudy i uskorenie chastits v plazmennoy korone SVCh-razryada // Fizika plazmy. – 1986. – T.12, v.5. – S.552-565.
35. Dawson J.M. Some Investigations of Plasma Instabilities in One-Dimensional Plasmas. – Princeton, N.J.: Princeton University, Plasma Physics Laboratory. – 1962. – R.45.
36. Kuznetsov E.A. Ob usrednennom opisanii lengmyurovskikh voln v plazme // Fizika plazmy. – 1976. – T 2. v.2. – S.327-333.
37. Zakharov V.E. O spektre slaboy turbulentnosti v plazme bez magnitnogo polya // ZhETF. – 1966. – T 51, v.6. – S. 688-696.
38. Silin V.P. Parametricheskoe vozdeystvie izlucheniya bol'shoy moshchnosti na plazmu. – M.: Nauka, 1973. – 287s.
39. Dvayt G.B. Tablitsy integralov i drugie matematicheskie formuly (2-e izd.). – M.: Nauka, 1966. – 228s.
40. Kuklin V.M. Effect of induced interference and the formation of spatial perturbation fine structure in nonequlibrium open-ended system // Voprosy atomnoy nauki i tekhniki (VANT) Ser. «Plazmennaya elektronika i novye metody uskoreniya. – 2006. – T 5, v.5 – S. 63-68.
41. Kuklin V.M. On new representation of well-known physical phenomena // The Journal of Kharkiv National University, physical series "Nuclei, Particles, Fields". – 2012. – №1017. - Issue 3/55. – R.19-27.

Kuklin Volodymyr Michailovich - Ph.D.; D.Sc.; Professor of Department of Reactor Material Science; Head of Department of Artificial Intelligence and Software, School (Faculty) of Computer Science, Karazin's Kharkiv National University.