УДК 530.145

# BFV-BRST КВАНТОВАНИЕ МАССИВНОЙ ЧАСТИЦЫ ПРОИЗВОЛЬНОГО СПИНА

*В.Г.Зима,*
*С.А.Федорук*

*Харьковский государственный университет,* 310 077 Харьков, пл.Свободы 4 , Украина, e-mail: tovstiak@pem.kharkov.ua
*Украинская Инженерно-Педагогическая Академия,* 310003 Харьков, ул.Университетская 16, Украина.

Выполнено квантование массивной частицы произвольного спина в формулировке с индексным спинором, посредством вычисления континуального интеграла в BFV-BRST подходе. Амплитуда перехода находится в "релятивистской" калибровке с производными для лагранжевых множителей. В результате вычисления функционального интеграла получен вайнберговский пропагатор для массивной частицы произвольного спина, записанный в безиндексной форме с использованием индексного спинора. Вычисление проведено без неконтролируемых перенормировок меры континуального интеграла. Показано, что выбор граничных условий для индексного спинора определяет голоморфное или антиголоморфное представление канонического описания спина частиц и античастиц.

В создании теорий протяженных объектов задача ковариантного описания частиц со спином, в частности, задача ковариантного квантования таких частиц, играет двоякую роль. С одной стороны это учебная модель, позволяющая проиллюстрировать достигнутое и потренироваться в применении разрабатываемых методов, а с другой — это отправная точка и, в известном смысле, желаемый итог этих теорий, призванных последовательно реализовать фундаментальные квантовые и релятивистские принципы, так чтобы можно было говорить о создании теорий взаимодействия частиц, остающихся единственным реально наблюдаемым проявлением фундаментальной структуры материи.

Хорошо известно, что спин можно описывать используя как коммутирующие , так и антикоммутирующие координаты, которые могут применяться как независимо, так и как равноправные партнеры в рамках суперсимметричных теорий. Наиболее адекватное применение в теории спина бозонные координаты, как и фермионные, находят в виде спиноров. Этому не противоречит существование псевдоклассичесой механики, где спин возникает как некоторое новое качество в процедуре квантования. В теориях со спинорами у спина есть нетривиальный "классический предел", т. ч. квантование нуждается только в уточнении констант упорядочения. До последнего времени бозонные спиноры в теории спина применялись достаточно ограниченно, в первую очередь как переменные твисторного типа, разрешающие массовую связь в безмассовом случае. Этим, однако, далеко не исчерпывается роль таких переменных. Так в теории с бозонными спинорами существует элементарное решение проблемы бесконечной приводимости фермионной $\kappa$-симметрии, связь которого с решением в рамках дважды суперсимметричных моделей пока не ясна. Это обстоятельство оправдывает дальнейший анализ моделей частиц с бозонными спинорами, поскольку указывает на возможность существования более тонких геометрических и теоретико-групповых аспектов.

BFV-BRST квантование [1] массивной частицы со спином рассматривалось в весьма ограниченном числе работ [2] с использованием грассмановых векторов и с ограничением случаем спина $1/2$. В этих моделях получение пропагатора не сводится к вычислению изначального функционального интеграла, а требует дополнительных шагов, связанных с выбором реализации операторов спина.

В настоящей работе мы применяем BFV-BRST процедуру квантования к массивной частице произвольного спина в обычной пространственно-временной размерности. Используемая схема описания спина с помощью индексного спинора [3] очевидным образом применима к безмассовому случаю и в высших пространственно-временных размерностях, т. е. решенная задача – лишь пробный шаг для оценки эффективности указанного подхода.

Рассмотрение свободной массивной частицы произвольного спина в рамках современных методов квантования проводится впервые. Кроме распространения рассмотрения на высшие спины, впервые в такой задаче удалось в полном объеме воспользоваться преимуществами гамильтоновой формулировки и вычислить континуальный интеграл, не прибегая к произвольным неконтролируемым перенормировкам меры. Полученный пропагатор совпадает с найденным ранее в традиционной теории поля в рамках $(2J+1)$ – компонентного формализма [4].

Мы не прибегаем к процедуре конверсии связей второго рода, поскольку такое рассмотрение естественно провести при изучении безмассового случая, где бозонная $\kappa$-симметрия модели приводит к нетривиальной алгебре связей первого рода. Ключевой для подобного рассмотрения вопрос о выборе области интегрирования по калибровочным степеням свободы решается нахождением и выбором фундаментальной области модулярной группы в пространстве Тейхмюллера. Указанный выбор не связан с неоднозначностью процедуры, скорее это выбор решений задачи из класса возможных для фиксированной системы. В итоге естественно возникает причинный пропагатор.

Тщательный анализ граничных условий требует модификации выражения для амплитуды перехода в виде континуального интеграла добавлением граничных членов к классическому действию [5]. Из-за наличия связей второго рода возникает каноническая сопряженность индексного спинора комплексно-сопряженному. Поэтому граничные члены для них различны: один фиксируется в начальный момент времени, другой – в конечный. Показано, что возникающая альтернатива соответствует выбору описания спина частиц: голоморфному – непунктирными спинорами, или антиголоморфному – пунктирными. Переход от одного выбора к другому равносилен обмену ролями между частицами и античастицами.

В работе использованы спинорные соглашения из [6].

В $D4$ частица со спином описывается коммутирующими координатами $(z^A)=(x^\mu,\zeta^\alpha,\bar\zeta^{\dot\alpha})$, где $x$ – вектор пространственно-временных координат, $\zeta$ – индексный вейлевский спинор. В формализме первого порядка её лагранжиан [3] имеет вид

$$L = p\dot\omega - \frac{e}{2}(p^2+m^2) - \lambda(\zeta\hat p\bar\zeta - j) \tag{1}$$

где бозонная "суперформа"

$$\omega \equiv \dot\omega d\tau = dx - id\zeta\sigma\bar\zeta + i\zeta\sigma d\bar\zeta.$$

Кинетический член $p\dot\omega$ представляет собой сумму обычного кинетического члена для бесспиновой частицы $p\dot x$, где $p_\mu$ – вспомогательный вектор энергии-импульса, и спиновой добавки, принимающей в системе покоя стандартную осцилляторную форму. Вследствии этого $\omega$ совпадает с суперформой N=1 SUSY, если в последней заменить грассманов спинор на индексный. В лагранжиане (1) $e$ (айнбайн) и $\lambda$ — лагранжевы множители, $j$ — классический спин, знак которого определяет знак энергии. Действие

$$A = \int_{\tau_i}^{\tau_f} L d\tau$$

корректно как для массивного, так и для безмассового случаев, однако в этой работе мы ограничиваемся рассмотрением только массивной частицы, т.ч. $m^2 > 0$. В отсутствие последнего слагаемого в лагранжиане (1) наше действие совпадает с действием CBS [7], если интерпретировать $\zeta$ как грассманов спинор.

Гамильтонизация теории [8] наряду со связями явно заложенными в действие, т.е. массовой связью

$$T \equiv \frac{1}{2}(p^2 + m^2) \approx 0 \qquad (2)$$

и спиновой

$$\zeta\hat{p}\bar{\zeta} - j \approx 0\,, \qquad (3)$$

выявляет также спинорные бозе-связи

$$d_\zeta \equiv ip_\zeta - \hat{p}\bar{\zeta} \approx 0,\ \bar{d}_\zeta \equiv -i\bar{p}_\zeta - \zeta\hat{p} \approx 0\,. \qquad (4)$$

Связь на импульс, канонически сопряженный переменной $p$, учет которой в сильном смысле введением скобок Дирака тривиален и не модифицирует скобки для основных переменных, а также очевидные связи первого рода для импульсов, сопряженных лагранжевым множителям, опускаем. На поверхности связей спиновая связь (3) эквивалентна связи

$$S \equiv S_\zeta - j \equiv \frac{i}{2}(\zeta p_\zeta - \bar{p}_\zeta\bar{\zeta}) - j \approx 0\,, \qquad (5)$$

поскольку $S \equiv \frac{1}{2}(\zeta d_\zeta - \bar{d}_\zeta\bar{\zeta}) + i(\zeta\hat{p}\bar{\zeta} - j)$ .

Фундаментальные скобки $\{z^A, p_B\} = \delta^A{}_B$ ; $\bar{p}_\zeta \equiv p_{\bar{\zeta}}$ .

Непосредственно находится алгебра связей, ненулевые скобки которой — это

$$\{d_\zeta, \bar{d}_\zeta\} = 2i\hat{p}\,, \{S, d_\zeta\} = \frac{i}{2}d_\zeta\,, \{S, \bar{d}_\zeta\} = -\frac{i}{2}\bar{d}_\zeta\,. \qquad (6)$$

Т.о. связи $(F_a) = (F_1, F_2) \equiv (T, S)$ — первого рода, а спинорные связи $(G_i) = (d_{\zeta\alpha}, \bar{d}_{\zeta\dot{\alpha}})$ — второго. Последнее подразумевает рассмотрение частицы с ненулевой массой, т. ч. $\hat{p}\tilde{p} = m^2 > 0$. Конечно спинорные связи (4) — первичные, а массовая (2) и спиновая (3) — связи второго этапа процедуры гамильтонизации. Вследствие репараметризационной инвариантности полный гамильтониан — линейная комбинация связей первого рода.

Массовая связь (2) генерирует обычные репараметризации пространственно-временных координат фазового пространства

$$\delta x^\mu = p^\mu\varepsilon\,, \delta p_\mu = 0\,, \delta e = \dot{\varepsilon}\,,$$

где последнее равенство следует из условия инвариантности действия в гамильтоновой форме с точностью до поверхностных членов.

Спиновая связь (5) порождает фазовые (в смысле умножения на фазовый множитель) преобразования спинорных координат фазового пространства :

$$\delta\zeta^\alpha = \frac{i}{2}\zeta^\alpha\varphi\ , \delta p_{\zeta\alpha} = -\frac{i}{2}p_{\zeta\alpha}\varphi \text{ и к.с. ; } \delta\lambda = \dot{\varphi}\,.$$

Соответствующая вариация действия

$$\delta A = \frac{1}{2}(p^2 - m^2)\varepsilon\Big|_{\tau_i}^{\tau_f} + j\varphi\Big|_{\tau_i}^{\tau_f}$$

обращается в ноль только при условии, что $\varepsilon(\tau_i) = \varepsilon(\tau_f) = 0$ и $\varphi(\tau_i) = \varphi(\tau_f)$. Это обстоятельство делает непосредственно допустимыми лишь релятивистские калибровки с производными, выражающие $\dot{e}$ через переменные задачи, т. ч. условие сохранения калибровки приводит к уравнению второго порядка на параметр $\varepsilon$, имеющее единственное решение с найденными граничными условиями [9]. Канонической калибровкой без производных можно воспользоваться, рассматривая ее как определенный предел допустимой [10], или при введении в действие подходящих граничных членов [5].

Последовательным методом вычисления амплитуды перехода для систем со связями является BFV-BRST формализм [1]. В этом подходе координаты исходного фазового пространства для каждой связи $F_a$ первого рода дополняются "динамическими" лагранжевыми множителями $(\lambda^a) \equiv (\lambda_T, \lambda_S)$ той же грассмановой четности и канонически сопряженными им импульсами $\pi_a$, $\{\lambda^a, \pi_b\} = \delta^a_b$, а также духовыми переменными противоположной четности. Духовый сектор содержит грассманово нечетные духи $C^a$ и антидухи $\tilde{C}_a$ и канонически сопряженные им величины $\tilde{P}_a$ и $P^a$ : $\{C^a, \tilde{P}_b\} = \{P^a, \tilde{C}_b\} = \delta^a_b$. Переменные $\lambda, \pi, C, P$ вещественны, а $\tilde{P}, \tilde{C}$ — мнимые.

Переменные исходного фазового пространства подчинены связям второго рода (4), однако алгебра связей первого рода $F_a$ остается абелевой и после введения скобки Дирака

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \frac{i}{2p^2}\{A, \bar{d}_\zeta\}\tilde{p}\{d_\zeta, B\} + (-1)^{AB}\frac{i}{2p^2}\{B, \bar{d}_\zeta\}\tilde{p}\{d_\zeta, A\},$$

т. ч. BRST заряд имеет нулевой ранг и представляет собой линейную комбинацию связей первого рода, $F_a$ и $\pi_a$, расширенного фазового пространства :

$$\Omega = F_a C^a + \pi_a P^a; \tag{7}$$

$$\{\Omega, \Omega\} = \{\Omega, \Omega\}_D = 0, \ \overline{\Omega} = \Omega.$$

BRST заряд $\Omega$ грассманово нечетный, $\varepsilon(\Omega) = 1$, имеет духовый заряд, равный единице: $gh(\Omega) = 1$;

$$gh(C) = gh(P) = -gh(\tilde{C}) = -gh(\tilde{P}) = 1.$$

В выражении для амплитуды перехода в виде континуального интеграла

$$Z_\Psi = \int D[z, p_z; \lambda, \pi; C, \tilde{P}; P, \tilde{C}]\prod_{i,\tau}\delta(G_i)\prod_\tau (2\pi)^2 |\det{}^{1/2}\{G_i, G_j\}|^{1/2}\exp(iS_{eff}) \tag{8}$$

используется обычная мера Лиувилля для бозе- и ферми- переменных. Для обычных интегралов, используемых при конечномерной апроксимации континуального интеграла, это означает, что произведение дифференциалов каждой пары канонически сопряженных вещественных бозе-переменных в мере делится на $2\pi$; для грассмановых величин подобных множителей нет. В гамильтоновом подходе в мере не возникают (точнее сокращаются) множители, соответствующие якобиану овеществления используемых комплексных переменных.

Выполнение связей второго рода (4) в (8) обеспечивается фунциональной $\delta$-функцией; при овеществлении переменных множители, соответствующие якобиану перехода, не возникают в произведении $\prod\delta(G_i)$ от комплексных связей второго рода. Мера нормируется детерминантом матрицы скобок Пуассона вещественных связей второго рода

$$\det\{G_i, G_j\} = (\det\{d_\zeta, \bar{d}_\zeta\})^2 = (4p^2)^2.$$

Кроме того, в меру для каждого "момента времени" $\tau$ должен быть введен множитель $2\pi$ на каждую пару вещественных канонически сопряженных бозе-связей второго рода.

Числовой множитель в выражении для BFV-BRST амплитуды (8) перед континуальным интегралом связан с необходимостью уточнения определения скалярного произведения в нединамическом секторе. Такое уточнение для лагранжевых множителей осуществляется в процессе вычисления ниже. Для духовых переменных оно приводит к умножению континуального интеграла в (8) на множитель (- $i$) на каждую связь первого рода.

Эффективное гамильтоново действие

$$S_{eff} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} (p\dot{x} + \dot{\zeta}p_{\zeta} + \overline{p}_{\zeta}\dot{\overline{\zeta}} + \pi\dot{\lambda} + \tilde{P}\dot{C} + \tilde{C}\dot{P} - H_{\Psi})d\tau + S_{b.t.}. \tag{9}$$

Выбор BRST гамильтониана $H_{\Psi}$ и граничного члена $S_{b.t.}$ обсуждается ниже.

Для репараметризационно инвариантной теории BRST гамильтониан $H_{\Psi}$ является BRST производной калибровочного фермиона $\Psi$ :

$$H_{\Psi} = \{\Omega, \Psi\}.$$

В амплитуде (8) можно на равном основании пользоваться как скобками Пуассона, так и скобками Дирака, поскольку в нашем случае скобки Пуассона связей первого рода (входящих в $\Omega$ ) с произвольной функцией отличаются от скобок Дирака на слагаемые, пропорциональные связям второго рода, обращающиеся в нуль на поверхности связей второго рода. Калибровочный фермион грассманово нечетен , $\varepsilon(\Psi) = 1$, чисто мнимый , $\overline{\Psi} = -\Psi$, и является антидухом , $gh(\Psi) = -1$. Известно [1], что амплитуда перехода не зависит от выбора калибровочного фермиона, если фунциональный интеграл берется по путям, принадлежащим одному классу эквивалентности относительно BRST преобразований. Последний выделяется выбором подходящих калибровочных и граничных условий. Релятивистская калибровка с производными для лагранжевых множителей ( $\dot{\lambda}^a = 0$ ) получается используемым нами выбором

$$\Psi = \tilde{P}_a\lambda^a, \tag{10}$$

тогда

$$H_{\Psi} = F_a\lambda^a + \tilde{P}_aP^a. \tag{11}$$

Подчеркнем, что дальнейшее упрощение выражения для $\Psi$ путем исключения некоторых слагаемых, нежелательно, т. к. тогда не выделяется один класс эквивалентности путей и результат "усредняется" по многим классам, а его получение нуждается в бесконечных перенормировках меры интегрирования [11].

Вычисление амплитуды перехода проведем в координатном представлении для переменных $z^A$ и в смешанном представлении для духов, т.е. выберем граничные условия

$$x^{\mu}(\tau_i) = x_i^{\ \mu}, x^{\mu}(\tau_f) = x_f^{\ \mu}; \tag{12}$$

$$\zeta^{\alpha}(\tau_f) = \zeta_f^{\ \alpha}, \overline{\zeta}^{\dot{\alpha}}(\tau_i) = \overline{\zeta}_i^{\ \dot{\alpha}} \text{ (голоморфные условия для } \zeta \text{)} \tag{13a}$$

или

$$\zeta^{\alpha}(\tau_i) = \zeta_i^{\ \alpha}, \overline{\zeta}^{\dot{\alpha}}(\tau_f) = \overline{\zeta}_f^{\ \dot{\alpha}} \text{ (антиголоморфные условия для } \zeta \text{);} \tag{13b}$$

$$\pi_a(\tau_i) = \pi_a(\tau_f) = 0;\ C^a(\tau_i) = C^a(\tau_f) = 0;\ \tilde{C}_a(\tau_i) = \tilde{C}_a(\tau_f) = 0. \tag{14}$$

Для остальных переменных значения на границе не фиксируются. Накладываемые граничные условия BRST инвариантны и обеспечивают обращение в нуль BRST заряда на границах. Это гарантирует форм-инвариантность амплитуды (8); обращение в нуль граничных значений можно понимать как классическое выражение условия $\hat{\Omega}|\psi_{phys}>=0$ [12]. Условия для индексного спинора — ковариантный выбор, согласованный с канонической сопряженностью $\zeta$ и $\bar{\zeta}$ , возникающей из-за связей второго рода. Конечно, такой выбор не является единственно возможным. Используя комбинации индексного спинора и сопряженного ему импульса с другими переменными фазового пространства, можно предложить бесчисленное множество вариантов ковариантных граничных условий на индексные переменные. Все они по существу эквивалентны и связаны с выбором конкретного способа описания спина (реализации гильбертова пространства состояний). Мы ограничиваемся здесь рассмотрением двух основных вариантов (13а) и (13b), как простейших и связанных с уже описанным в литературе [3].

При граничных условиях (13) корректность вариационного принципа (независимость вариации действия от вариаций переменных, которые не фиксируются на границе) требует введения граничного члена

$$S_{b.t.} = \mp\frac{1}{2}(\zeta_i p_{\zeta i} + \zeta_f p_{\zeta f} - \bar{p}_{\zeta i}\bar{\zeta}_i - \bar{p}_{\zeta f}\bar{\zeta}_f), \tag{15}$$

где минус соответствует голоморфному, а плюс — антиголоморфному выбору.

В рассматриваемой калибровке (10) фунциональный интеграл (8) факторизуется:

$$Z_\Psi = Z \cdot Z_{gh}, \tag{16}$$

где функциональный интеграл по нечетным духовым переменным имеет простой гауссов вид

$$Z_{gh} = \int D[C,\tilde{P};P,\tilde{C}]\exp\{i\int_{\tau_i}^{\tau_f}(\tilde{P}_a\dot{C}^a - \dot{\tilde{C}}_a P^a - \tilde{P}_a P^a)d\tau\}. \tag{17}$$

Здесь выполнено интегрирование по частям в показателе экспоненты с учетом граничных условий для $\tilde{C}$ . Этот интеграл можно вычислить, разбивая интервал изменения параметра эволюции $\tau$ на $N$ равных частей, положим $T_\tau \equiv \tau_f - \tau_i$ и $\Delta\tau = T_\tau / N$ . Тогда интегрирование по $P$ и $\tilde{P}$ автоматически определяет нормировочный множитель $(i\Delta\tau)^{2N}$ для лагранжевой меры в интеграле

$$Z_{gh} = \int \tilde{D}[C,\tilde{C}]\exp\{-i\int_{\tau_i}^{\tau_f}\dot{\tilde{C}}_a\dot{C}^a d\tau\}, \tag{18}$$

при вычислении его дискретизацией промежутка $[\tau_i, \tau_f]$ ; не заботясь о нормировке, (18) можно получить из (17) без дискретизации последовательным интегрированием по $\tilde{P}$ , дающем $\delta(P-\dot{C})$ , и по $P$. Результат интегрирования в (18), не предполагающий нулевые граничные значения духовых переменных $C$ и $\tilde{C}$ , имеет вид

$$Z_{gh} = -T_\tau^2\exp\{-i(\tilde{C}_{fa} - \tilde{C}_{ia})(C_f^a - C_i^a)/T_\tau\}. \tag{19}$$

Приведем некоторые подробности вычисления интеграла по духам. Т. к. в показателе подинтегральной экспоненты в (17) нет перекрестных членов с духами для разных связей, достаточно ограничиться вычислением для случая одной связи. Имеем

$$Z_{gh} = \lim_{N\to 0} Z_{gh}[C_i, C_f; \tilde{C}_i, \tilde{C}_f; T_\tau, N],$$

где

$$Z_{gh}[C_i, C_f; \tilde{C}_i, \tilde{C}_f; T_\tau, N] = \int \prod_{k=1}^{N-1} dC_k d\tilde{C}_k \cdot \prod_{k=1}^{N} d\tilde{P}_k dP_k \cdot$$

$$\cdot \exp\{i \sum_{k=1}^{N} [\tilde{P}_k (C_k - C_{k-1}) - (\tilde{C}_k - \tilde{C}_{k-1}) P_k - \tilde{P}_k P_k \Delta\tau]\};$$

$$C_0 = C_i, \tilde{C}_0 = \tilde{C}_i, C_N = C_f, \tilde{C}_N = \tilde{C}_f.$$

Сдвижка $\tilde{P}_k = \tilde{P}_k - (\tilde{C}_k - \tilde{C}_{k-1}) / \Delta\tau$, $P_k = P_k + (C_k - C_{k-1}) / \Delta\tau$ позволяет проинтегрировать по $P_k$ и $\tilde{P}_k$:

$$Z_{gh} = [C_i, C_f; \tilde{C}_i, \tilde{C}_f; T_\tau, N] = i\Delta\tau \int \prod_{k=1}^{N-1} dC_k d\tilde{C}_k (i\Delta\tau) \cdot$$

$$\cdot \exp\{-\frac{i}{\Delta\tau} \sum_{k=1}^{N} (\tilde{C}_k - \tilde{C}_{k-1})(C_k - C_{k-1})\}.$$

Индукцией по $N$ легко проверяется, что для $N > 1$

$$Z_{gh}[C_i, C_f; \tilde{C}_i, \tilde{C}_f; T_\tau, N] = iT_\tau \exp\left\{-\frac{iN}{T_\tau(N+1)} (\tilde{C}_f - \tilde{C}_i)(C_f - C_i)\right\}.$$

Отсюда, в пределе при $N \to \infty$, получаем

$$Z_{gh} = iT_\tau \exp\left\{\frac{i}{T_\tau} (\tilde{C}_f - \tilde{C}_i)(C_f - C_i)\right\}.$$

Для двух коммутирующих связей это дает (19).

Для нулевых значений $C$ и $\tilde{C}$ (14) имеем

$$Z_{gh} = -T_\tau^2. \tag{20}$$

Итак амплитуда перехода

$$Z_{gh}[C_i, C_f; \tilde{C}_i, \tilde{C}_f; T_\tau, N] = \int \prod_{k=1}^{N-1} dC_k d\tilde{C}_k \cdot \prod_{k=1}^{N} d\tilde{P}_k dP_k \times$$

$$\times \exp\{i \sum_{k=1}^{N} [\tilde{P}_k (C_k - C_{k-1}) - (\tilde{C}_k - \tilde{C}_{k-1}) P_k - \tilde{P}_k P_k \Delta\tau]\} \tag{21}$$

где осталось функциональное интегрирование только по четным переменным.

Интегралы по импульсам $\pi_a$ лагранжевых множителей $\lambda^a$ дают $\delta$-функции $\delta(\dot{\lambda}^a)$, так что после функционального интегрирования по $\lambda^a$ в $Z_\Psi$ остаются лишь обычные интегралы по $\lambda^a$. Уточнение области интегрирования по нулевым модам лагранжевых множителей, играющее ключевую роль в нашем рассмотрении, будет выполнено ниже.

В показателе экспоненты (21) удобно выполнить интегрирование по частям: $\int_{\tau_i}^{\tau_f} p\dot{x} d\tau = px\Big|_{\tau_i}^{\tau_f} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} \dot{p} x d\tau$. Тогда функциональное интегрирование по $x$ дает $\delta$-функцию $\delta(\dot{p})$, так что функциональный интеграл по $p$ в (21) редуцируется к обычному интегралу по нулевым модам $p$ и вместо рассматриваемого интеграла в показателе экспоненты появляется выражение $ip(x_f - x_i)$.

Связи второго рода (4) имеют вид разрешенный относительно спинорных импульсов $p_\zeta$ и $\bar{p}_\zeta$, что позволяет легко проинтегрировать по этим переменным, воспользовавшись функциональными $\delta$-функциями в мере.

Теперь амплитуда перехода (21) приобретает вид

$$Z_\Psi = T_\tau^{\,2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{ip(x_f-x_i)}d\lambda_T d\lambda_S\exp\{-i\frac{T_\tau}{2}\lambda_T(p^2+m^2)+iT_\tau\lambda_S J\}\cdot Z_\zeta\,, \tag{22}$$

где

$$Z_\zeta=\int\prod_\tau d^2\zeta d^2\bar{\zeta}|p^2|/\pi^2\cdot\exp\{i\int_{\tau_i}^{\tau_f}(-i\dot{\zeta}\hat{p}\bar{\zeta}+i\zeta\hat{p}\dot{\bar{\zeta}}-\lambda_S\zeta\hat{p}\bar{\zeta})d\tau+i\tilde{S}_{b.t.}\}, \tag{23}$$

$$\tilde{S}_{b.t.}=\mp i(\zeta_i\hat{p}\bar{\zeta}_i+\zeta_f\hat{p}\bar{\zeta}_f) \tag{24}$$

(знаки $\mp$ соответствуют голоморфному и антиголоморфному выборам (13)). В (22) фигурирует квантовый спин $J$, введенный для того, чтобы подчеркнуть возможность переопределения классического спина $j$ из (1) константами упорядочения при квантовании классической теории. Как и в исходной функциональной мере Лиувилля в (8), в формуле (22) дифференциал каждой координаты здесь уже нулевой моды вектора энергии-импульса $p$ делится на $2\pi$.

Экспоненциальный множитель в выражении для гауссова интеграла (23), как обычно, легко находится методом перевала. Условия экстремума показателя подинтегральной экспоненты по $\bar{\zeta}$ и $\zeta$, с учетом граничных условий (13), дают уравнения движения для $\zeta$ и $\bar{\zeta}$ :

$$2i\dot{\zeta}\hat{p}+\lambda_S\zeta\hat{p}=0 \text{ и к. с. }, \tag{25}$$

т. ч. нетривиальный вклад при подстановке решений в показатель подинтегральной экспоненты в (23) дает только граничный член (24). Решения уравнений (25), с учетом граничных условий (13), имеют вид

$$\zeta\hat{p}=e^{\frac{i}{2}\lambda_S(\tau-\tau_f)}\zeta_f\hat{p},\ \hat{p}\bar{\zeta}=e^{-\frac{i}{2}\lambda_S(\tau-\tau_i)}\hat{p}\bar{\zeta}_i \tag{26}$$

для голоморфного случая (13a). Решения для антиголоморфного выбора (13b) отличаются от (26) заменой индексов $i\Leftrightarrow f$. Результат вычисления интеграла (23) :

$$Z_\zeta=\exp\{2\zeta_f\hat{p}\bar{\zeta}_i e^{-i\lambda_S T_\tau/2}\} \tag{27a}$$

для голоморфного (13a) и

$$Z_\zeta=\exp\{-2\zeta_i p\bar{\zeta}_f e^{i\lambda_S T_\tau/2}\} \tag{27b}$$

для антиголоморфного (13b) выбора.

Предэкспоненциальный множитель в (27) можно найти, составляя допредельное выражение для вычисления рассматриваемого гауссовского интеграла (23), путем дискретизации промежутка изменения параметра развития $\tau$. При разбиении $[\tau_i,\tau_f]$ на $N$ равных подпромежутков $T_\tau=N\Delta\tau$, $\bar{\zeta}_i=\bar{\zeta}_0, \zeta_f=\zeta_N$ и для голоморфного выбора граничных условий

$$Z_\zeta[\zeta_f,\bar{\zeta}_i;T_\tau,N]=\int\prod_{k=1}^{N}d^2\zeta_{k-1}d^2\bar{\zeta}_k|p^2|/\pi^2\cdot\exp\left\{-2(1+i\lambda_S\frac{T_\tau}{2N})\sum_{k=1}^{N}\zeta_{k-1}\hat{p}\bar{\zeta}_k+2\sum_{k=0}^{N}\zeta_k\hat{p}\bar{\zeta}_k\right\}$$

Используя метод математической индукции нетрудно проверить, что

$$Z_{\zeta}[\zeta_f,\bar{\zeta}_i;T_\tau,N] = [1+(\frac{\lambda_S T_\tau}{2N})^2]^{-N}\exp\left\{2\zeta_f\hat{p}\bar{\zeta}_i(1+i\lambda_S\frac{T_\tau}{2N})^{-N}\right\},$$

откуда в пределе $N\to\infty$, очевидно, получаем (27a).

Теперь в амплитуде перехода (8) выполнены все функциональные интегрирования:

$$Z_\Psi = T_\tau^{\ 2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{ip(x_f-x_i)}d\lambda_T d\lambda_S\exp\{-i\frac{T_\tau}{2}\lambda_T(p^2+m^2)+i\lambda_S T_\tau J\}\times$$

$$\times\exp\{2\zeta_f\hat{p}\bar{\zeta}_i e^{-i\lambda_S T_\tau/2}\}. \tag{28}$$

Это выражение для голоморфного выбора (13a), выражение для амплитуды (8) в случае антиголоморфного выбора (13b) отличается от (28) заменой последней экспоненты (27a) на (27b).

Для характеристики орбит калибровочной группы в расширенном фазовом пространстве введем параметры Тейхмюллера

$$C_T = \frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_f}\lambda_T(\tau)d\tau,\ C_S = \frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_f}\lambda_S(\tau)d\tau. \tag{29}$$

Параметр $C_T$ имеет прозрачный физический смысл — в подходящей калибровке это собственное время [9]. Появление в теории параметра $C_S$ связано с тем, что внутренние квантовые числа, такие как спин, заряд, и т. п., реализуются в классических терминах как топологические характеристики торических путей. Будем называть параметр $C_S$ собственным спиновым фазовым углом. Вследствие граничных условий на параметры репараметризаций, $\varepsilon(\tau_i)=\varepsilon(\tau_f)=0$, и фазовых преобразований индексных спиноров, $\varphi(\tau_i)=\varphi(\tau_f)=0$, параметры Тейхмюллера не могут быть изменены калибровочными преобразованиями, поскольку $\delta\lambda_T=\dot{\varepsilon}$, $\delta\lambda_S=\dot{\varphi}$. Допустимость используемой нами калибровки с производными, $\dot{\lambda}_T=\dot{\lambda}_S=0$, означает, что орбиты калибровочной группы взаимно однозначно характеризуются нулевыми модами лагранжевых множителей, для которых, очевидно,

$$C_T=\lambda_T\cdot T_\tau/2,\ C_S=\lambda_S\cdot T_\tau/2. \tag{30}$$

Поскольку параметр эволюции должен биективно соответствовать точкам мировой линии частицы [9], допустимы только репараметризации со строго монотонными функциями. Вследствие этого группа репараметризаций распадается на две связные компоненты: подгруппу, сохраняющую ориентацию мировой линии, и множество репараметризаций, изменяющих ориентацию. Соответствующая модулярная группа (фактор полной калибровочной группы по связной компоненте единицы) есть $Z_2$. BFV-BRST квантование включает только калибровочные преобразования, непрерывно связанные с тождественным, т.ч. интегрирование должно проводится по фундаментальной области модулярной группы в пространстве Тейхмюллера. Выберем область по параметру $C_T$, полагая $C_T>0$, тогда частицы с положительной энергией движутся вперед по времени и амплитуда перехода (8) является причинным пропагатором.

Если подразумевать независимость внутренних квантовых чисел от состояния движения частицы, то фундаментальная область модулярной группы для фазовых преобразований индексных спиноров очевидна из найденного выражения для амплитуды (28). Вследствие периодичности подинтегрального выражения по параметру $C_S=\lambda_S T_\tau/2$ при полуцелых $J$ в качестве фундаментальной области можно взять любой промежуток длиной в период, скажем $[0,2\pi]$. Сама модулярная группа фазовых преобразований — это группа $Z$.

Интегрирование в (29) по параметру Тейхмюллера $C_T$ выполняется с использованием хорошо известного равенства

$$\int_0^{\infty} dC_T \exp\{-iC_T(p^2+m^2)\} = \frac{-i}{p^2+m^2-i0}. \tag{31}$$

Т.о. сделанный выбор фундаментальной области эквивалентен обычному правилу обхода полюсов в интегральном представлении причинного пропагатора.

Интеграл по параметру $C_S$ находится применением интегральной формулы Коши: $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')}{(z'-z)^{n+1}}dz'$ для функции $f(z)$ одной комплексной переменной $z$, аналитичной внутри области ограниченной контуром $C$. Если функция $f(z)=e^{Az}$, а контур $C$ является единичной окружностью с центром в точке $z$, т. ч. $z'=z+e^{i\alpha}$, легко находим

$$\int_0^{2\pi} e^{-in\alpha+Ae^{i\alpha}}d\alpha = \frac{2\pi A^n}{n!}. \tag{32}$$

Окончательно, выполняя в (29) интегрирования по параметрам Тейхмюллера с помощью найденных равенств (31) и (32), получаем для амплитуды перехода (8) при допустимых в голоморфном случае положительных $J$ [3] выражение

$$Z_\Psi = \frac{-i}{(2J)!}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{ip(x_f-x_i)}\frac{(2\zeta_f\hat{p}\bar{\zeta}_i)^{2J}}{p^2+m^2-i0}, \tag{33}$$

которое, как будет показано ниже, совпадает с пропагатором для массивной частицы со спином, полученным в $(2J+1)$ – компонентном формализме теории поля Вайнбергом [4]. Конечно (33) представляет собой использующую индексный спинор безиндексную запись указанного пропагатора в предположении, что частицы описываются симметричными спинорами ранга $2J+1$ с непунктирными индексами. Для антиголоморфного выбора результат отличается перестановкой индексов $i$ и $f$ у индексных спиноров, знаковым множителем $(-1)^{2J}$ и тем, что вместо $J$ следует подставить $|J|$, т. к. в антиголоморфном случае корректный знак $J$ отрицателен [3]. В таком случае частицы описываются спинорами с пунктирными индексами. Связь между знаком $J$ и знаком энергии показывает, в соответствии с обычными соображениями [9], что изменение выбора граничных условий (13a) на (13b) равносильно изменению определения частиц и античастиц.

Заметим, что зависящий от спина множитель в подинтегральном выражении в (33) можно представить в виде $(2\zeta_f\hat{p}\bar{\zeta}_i)^{2J}/(2J)! = (2\zeta_f\hat{p}\bar{\zeta}_i)^{2J}/\Gamma(2J+1)$, едином для башни всех спинов, и указывающем на возможность аналитического продолжения по $J$ [13,14], важную для теории движущихся полюсов Редже и струнной теории.

Сопоставление полученного результата с результатом работы [4] можно осуществить следующим образом. Характеристики вигнеровской волновой функции $u(p,\zeta;\sigma)$ определяются процедурой первичного квантования [3], поэтому она подчинена спиновой связи $(\hat{S}_\zeta - J)u = 0$ и, в голоморфном случае, связи $\bar{d}_\zeta u = 0$, где операторы индексных спиноров $\zeta$ реализуются как операторы умножения: $\hat{\zeta}=\zeta$, а операторы канонически сопряженных им импульсов $p_\zeta$ – как операторы дифференцирования: $\hat{p}_\zeta = -i\partial/\partial\zeta$. Вследствие этого [3] $u(p,\zeta;\sigma) = e^{-\zeta\hat{p}\bar{\zeta}}[\zeta]^{J,\sigma}$, где $[\zeta]^{J,\sigma}$ – однородный полином по $\zeta$ степени $2J$, $\sigma = -J,-J+1,\cdots,J-1,J$.

Важно, что вигнеровская волновая функция произвольного импульса получается из волновой функции стандартного импульса преобразованием индексного спинора

$$u(p,\zeta;\sigma)=u(\overset{\circ}{p},\zeta B_p;\sigma)\,,$$

где $B_p = B_p{}^+$ — оператор Вигнера: $\hat{p} = B_p\,\overset{\circ}{\hat{p}}\,B_p{}^+$, а $\overset{o}{p}=(m,0)$ — стандартный импульс. Это обстоятельство позволяет так легко переходить из системы произвольного импульса в систему стандартного импульса и обратно, что в дальнейшем мы обычно не будем тщательно оговаривать, в какой именно системе отсчета производится рассмотрение.

В системе покоя полином $[\zeta]^{J,\sigma}$ удовлетворяет тому же условию, что и вигнеровская волновая функция: $(\hat{M}_3-\sigma)u(\overset{\circ}{p},\zeta;\sigma)=0$, где спинорная часть третьей компоненты момента $\hat{M}_3=\frac{1}{2}(-\zeta^1\dfrac{\partial}{\partial\zeta^1}+\zeta^2\dfrac{\partial}{\partial\zeta^2}+\kappa.c.)$. Этим определяется степень $(J\mp\sigma)$, с которой в $[\zeta]^{J,\sigma}$ входит координата $\zeta^{1,2}$ индексного спинора: $[\zeta]^{J,\sigma}=N_J\begin{pmatrix}2J\\J-\sigma\end{pmatrix}(\zeta^1)^{J-\sigma}(\zeta^2)^{J+\sigma}$. Здесь $\begin{smallmatrix}2J\\J-\sigma\end{smallmatrix}$ — биномиальный коэффициент, позволяющий отождествить свертки по спинорным индексам и по проекции спина $\sigma$, а нормировочный множитель $N_J$ находится ниже.

Для перехода в произвольную систему отсчета следует воспользоваться тем, что

$$[\zeta B]^{J,\sigma}=[\zeta]^{J,\sigma'}D^J(B)_{\sigma'}{}^{\sigma}\,,$$

где $B$ — произвольная $2\times 2$ матрица, а $D^J$ — $D$-функции Вигнера.

Обычная полуторалинейная форма в пространстве голоморфных функций от индексного спинора индуцирует для полиномиальных по $\zeta$ функций скалярное произведение вида

$$\left(\varphi\ ,\psi\right)=N\int d^2\zeta d^2\bar{\zeta}\ \ e^{-2\zeta\hat{p}\bar{\zeta}}\,\overline{\varphi}\ \psi\,. \tag{34}$$

Это скалярное произведение для однородных функций степени $J$ может быть записано в виде дифференциального оператора

$$\left(\varphi^J,\psi^J\right)=\frac{2^{-(2J+2)}}{(2J)!\,m^{4J}}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\,\hat{p}\,\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\right)^{2J}\overline{\varphi^J}\ \ \psi^J\cdot N\cdot\frac{4\pi^2}{m^2}\,. \tag{35}$$

Правая часть в (35) с точностью до множителя совпадает с известным выражением (см., напр., [14], где общий множитель не фиксирован). Теперь из условия ортонормированности $\left([\zeta]^{J',\sigma'},[\zeta]^{J,\sigma}\right)=\delta_{J'J}\delta_{\sigma'\sigma}$ легко находится нормировка базисных симметричных спиноров $[\zeta]^{J,\sigma}$. В вычислении достаточно ограничиться случаем $\sigma=-J$:

$$N_J{}^2=\frac{2^{2J+2}}{(2J)!\,m^{2J}}\cdot\frac{m^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{N}\,. \tag{36}$$

Нормировочный множитель $N$ находится из условия обращения в единицу выражения (36) при $J=0$: $N=m^2\,/\,\pi^2$.

Теперь для получения вайнберговского пропагатора необходимо проинтегрировать по начальному $\zeta_i$ и конечному $\zeta_f$ индексным спинорам подинтегральное выражение в (33), умноженное на $[\zeta_i]^{J,\sigma}[\bar{\zeta}_f]^{J,\sigma'}$, по мере из (34). Получим в соответствии с [4] пропагатор

$$G^J_{\sigma'\sigma}(x)=-im^{-2J}\Pi^J_{\sigma'\sigma}(i\partial)\ \ \Delta^c(x)\,, \tag{37}$$

где

$$\Delta^c(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\ e^{ipx}\ /\,(p^2+m^2-i0)$$

— причинная функция Грина скалярного поля, а $(2J+1)\times(2J+1)$ — компонентная матрица $\Pi^J_{\sigma'\sigma}$ определяется тождествами в следующей цепочке

$$(\zeta_i\hat{p}\bar{\zeta}_f)^{2J} = ((\zeta_i B_p)\overset{o}{\hat{p}}(B_p\bar{\zeta}_f))^{2J} \equiv [\zeta_i B_p]^{J,\sigma'}\Pi^J_{\sigma'\sigma}(\overset{o}{p})[B_p\bar{\zeta}_f]^{J,\sigma} = \tag{38}$$

$$= [\zeta_f]^{J,\sigma'}\Pi^J_{\sigma'\sigma}(p)[\bar{\zeta}_i]^{J,\sigma} \equiv p_{\mu_1}\cdots p_{\mu_{2J}}[\zeta_f]^{J,\sigma'}t^{\mu_1\ldots\mu_{2J}}_{\sigma'\sigma}[\bar{\zeta}_i]^{J,\sigma}(-1)^{2J} .$$

Свойства величин $t^{\mu_1\ldots\mu_{2J}}_{\sigma'\sigma}$ и $\Pi^J_{\sigma'\sigma}(p)$ подробно описаны в [4].

В частности, в выкладке (38) существенно используется, что величины $t^{\mu_1\ldots\mu_{2J}}_{\sigma'\sigma}$

а) симметричны по 4-векторным индексам, как определяемые сверткой с тензорной степенью вектора энергии-импульса;

б) бесследовы по этим 4-векторным индексам, поскольку $\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma_{\mu\beta\dot{\beta}} = -2\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ и в степени (38) есть автоматическая симметризация по спинорным индексам;

в) являются тензорами

$$D^J(A)\Pi^J(p)D^J(A)^+ = \Pi^J(p') ,$$

где $A \in SL(2,C)$, $\hat{p}' = A\hat{p}A^+$. Неприводимость представлений группы вращений в системе покоя, являющаяся автоматическим следствием рассматриваемой модели, и лемма Шура означают, что величина $\Pi(\overset{o}{p})$ кратна единичной матрице и нормирована так, что $\Pi^J_{\sigma'\sigma}(\overset{o}{p}) = m^{2J}\delta_{\sigma'\sigma}$. Нетрудно показать [4], что $\Pi(p)$ — полином $2J$ степени по оператору спиральности $\vec{p}\cdot\vec{M}^{(J)}/|\vec{p}|$; на массовой поверхности

$$\Pi^J(p) = m^{2J}D^J(B_p)^2 = m^{2J}\exp(-2\theta\ \vec{p}\cdot\vec{M}^{(J)}/|\vec{p}|) ,$$

где $sh\ \theta = |\vec{p}|/m$. Конкретные выражения для матрицы $\Pi^J$ приведены в [4].

Теперь связь между выражениями (33) и (37) очевидна.

Таким образом, как и следовало ожидать, полученная амплитуда (33) совпадает с безиндексной формой записи вайнберговского пропагатора (37) [4] массивной частицы спина $J$, полученного в $(2J+1)$-компонентном формализме теории поля. С использованием BFV-BRST функционального квантования спиновой частицы этот результат получен впервые. Подчеркнем, что он получен без неконтролируемых перенормировок меры континуального интеграла. Вычисление для безмассового случая, а также для спиновой частицы в формулировке с дираковскими индексными бозе-спинорами $2(2J+1)$-компонентный формализм теории поля) и для высших пространственно-временных размерностей, а также для суперсимметричных теорий, будет проведено в последующих работах.

Авторы признательны И.А.Бандосу, Д.П.Сорокину, А.Ю.Нурмагамбетову за гостеприимство в ННЦ ХФТИ и полезные дискуссии. Благодарим Е.А.Иванова и С.О.Кривоноса за гостеприимство в ОИЯИ, а А.И.Пашнева также и за предоставленную литературу. Один из нас (В.З.) благодарен А.А.Капустникову за продуктивное обсуждение $\kappa$-симметрии и А.И.Ахиезеру за полезную критику.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] E.S.Fradkin and G.A.Vilkovisky. Phys.Lett.,**55B**,1975,p.224; I.A.Batalin and G.A.Vilkovisky. Phys.Lett.,**69B**,1977,p.309; E.S.Fradkin and T.E.Fradkina. Phys.Lett.,**72B**,1978,p.343; I.A.Batalin and E.S.Fradkin. Group theor. methods in physics,Vol.2,Proc. of the internat. seminar, Zvenigorod,1979,p.247

[2] S.Monaghan. Phys.Lett.**181B**,1986,p.101; C.Batlle, J.Gomis and J.Roca. Phys.Rev.,**D40**,1989,p.1950

[3] В.Г.Зима, С.А.Федорук. Письма в ЖЭТФ,**61**,1995,с.241

[4] S.Weinberg. Phys.Rev.,**133**,1964,p.B1318

[5] M.Henneaux, C.Teitelboim and J.D.Vergara. Nucl.Phys.,**B387**,1992,p.391

[6] Ю.Весс. Дж.Беггер. Суперсимметрия и супергравитация. Пер. с англ.-М.:Мир,1986. – 184с.
[7] R.Casalbuoni. Nuovo Cim.,**A35**,1976,377; L.Brink and J.H.Schwarz. Phys.Lett.,**B100**,1981,310
[8] П.А.М.Дирак. Лекции по квантовой механике. Пер. с англ.-М.:Мир, 1968. –84с.
[9] C.Teitelboim. Phys.Rev.,**D25**,1982,p.3159
[10] E.S.Fradkin and A.A.Vilkovisky. CERN Report TH-2332,1977; S.A.Frolov and A.A.Slavnov. Phys.Lett.,**B208**,1988,p.245
[11] I.Bandos, A.Maznytsia, I.Rudychev and D.Sorokin. Int.J.Mod.Phys., **A12**, 1997, p.3259.
[12] M.Henneaux. Phys.Rep.,**126**,1985,p.1
[13] И.М.Гельфанд, М.И.Граев, Н.Я.Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений (Обобщенные функции.Вып.5).-М.:Физматгиз, 1962.-656с
[14] Н.Н.Боголюбов, А.А.Логунов, А.И.Оксак, И.Т.Тодоров. Общие принципы квантовой теории поля.-М.:Наука.Гл.ред.физ.-мат.лит.,1987.-616с