УДК 539.1

КОРРЕКТНА ЛИ ЗАДАЧА О ДИНАМИЧЕСКОМ ХАОСЕ?

В.П. Демуцкий,
С.С. Зуб,
В.М. Рашкован,
Р.П. Половин

Харьковский государственный университет, 310108, Украина, г.Харьков, ул.Курчатова 31, кафедра "Теоретической ядерной физики".
Харьковский авиационный институт, 310070, Украина, г.Харьков, ул. Чкалова 17, кафедра "ЭУ и ЭРД космических летательных аппаратов".

1. ВЕДЕНИЕ

Вопрос о хаотизации в детерминированной механической системе возник после создания молекулярно-кинетической теории, ставившей себе целью механическое объяснение термодинамических и кинетических процессов [1стр.392, 2-6]. Несколько десятилетий назад было обнаружено, что динамический хаос возникает также в детерминированных системах с малым числом степеней свободы [7-10]. Вскоре оказалось, что динамический хаос является не исключением, а правилом [11,12].

В силу нелинейности уравнений аналитические результаты были получены только в отдельных случаях [13-15]. При этом молчаливо предполагалось, что корреляции двух произвольных функций фазовых точек $\vec{x} f(\vec{x})$ и $g(\vec{x})$ убывает по закону

$$C(g,f;t) = A(f,g)\exp(-\nu t), \qquad (1)$$

где "скорость хаотизации" ν не зависит от исходных функций $f(\vec{x})$ и $g(\vec{x})$ и определяется свойствами динамической системы (показателями Ляпунова). Однако в статьях H.Frish [16a], Crawford, Carry [16] показано, что скорость хаотизации зависит от гладкости $f(\vec{x})$ и $g(\vec{x})$, т.е. бесконечно малое возмущение функций $f(\vec{x})$ или $g(\vec{x})$ существенно изменяет корреляцию в момент времени $t > 0$. Иными словами, это означает, что задача о нахождении корреляции некорректна. Эта некорректность ставит под сомнение не только теорию динамического хаоса, но и всю физическую кинетику.

Цель настоящей статьи — показать, что задача о затухании корреляций поддаётся регуляризации, т.е. является корректной не по Адамару [17], а по Тихонову [18].

2. ХАОТИЗАЦИЯ И ПЕРЕМЕШИВАНИЕ

Рассмотрим динамическую систему, состояние которой в момент времени t характеризуется d-мерным вектором $\vec{x}(t)$

$$\vec{x}(t) = \left(x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \ldots, x_d^{(t)}\right). \qquad (2)$$

Мерой "памяти" системы в момент времени $t > 0$ о её состоянии в начальный момент времени $t = 0$ является корреляция $C(t)$:

$$C(t) \equiv \left\langle \left[f\left(\vec{x}^{(t)}\right) - \left\langle f\left(\vec{x}^{(t)}\right)\right\rangle\right]\left[g\left(\vec{x}^{(0)}\right) - \left\langle g\left(\vec{x}^{(0)}\right)\right\rangle\right]\right\rangle . \qquad (3)$$

Здесь $f(\vec{x})$ и $g(\vec{x})$ — две произвольные функции и угловые скобки означабт осреднение по фазовому объёму:

$$\langle\vec{\varphi}(x)\rangle = \frac{1}{V(\Gamma)}\int_{\Gamma} dx_1 dx_2 \ldots dx_d \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_d), \tag{4}$$

где $V(\Gamma)$-объём всего фазового пространства Γ. Пользуясь определением среднего (4), выражение (4) для корреляции можно упростить:

$$C(t) \equiv \left\langle f\left(\vec{x}^{(t)}\right) g\left(\vec{x}^{(0)}\right)\right\rangle - \left\langle f\left(\vec{x}^{(t)}\right)\right\rangle\left\langle g\left(\vec{x}^{(0)}\right)\right\rangle. \tag{5}$$

Одним из проявлений динамического хаоса является стремление корреляции к нулю при $t \to +\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} C(t) = 0. \tag{6}$$

В системе с сохраняющимся фазовым объёмом,

$$\det \frac{dx_i^{(t)}}{dx_j^{(0)}} = 1 \tag{7}$$

затухание корреляций (6) означает перемешивание фазового объёма. В самом деле, пусть о положении точки $\vec{x}^{(0)}$ в начальный момент времени ($t = 0$) известно только то, что она находилась в области Γ_i. Тогда плотность вероятности $f\left(\vec{x}^{(0)}\right)$ в начальный момент времени равна

$$f\left(\vec{x}^{(0)}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{V(\Gamma_i)}, & if \quad \vec{x}^{(0)} \in \Gamma_i \\ 0, \quad if & \vec{x}^{(0)} \notin \Gamma_i, \end{cases} \tag{8}$$

где $V(\Gamma_i)$ — объём области Γ_i. Вероятность p того, что в момент времени $t > 0$ фазовая точка будет находиться в области Γ_f, равна

$$p = \left\langle f\left(\vec{x}^{(t)}\right) g\left(\vec{x}^{(0)}\right)\right\rangle, \tag{9}$$

где $g\left(\vec{x}^{(0)}\right)$ — характеристическая функция в области Γ_f,

$$g\left(\vec{x}^{(0)}\right) = \begin{cases} 1, & if \quad \vec{x}^{(0)} \in \Gamma_f \\ 0, & if \quad \vec{x}^{(0)} \notin \Gamma_f. \end{cases} \tag{10}$$

Величина $\left\langle f\left(\vec{x}^{(t)}\right)\right\rangle$, входящая в формулу (5) равна 1 в силу сохранения фазового объёма (5а). Величина $\left\langle g\left(\vec{x}^{(0)}\right)\right\rangle$, также входящая в формулу (5), равна, очевидно

$$\left\langle g\left(\vec{x}^{(0)}\right)\right\rangle = \frac{V(\Gamma_f)}{V(\Gamma)}. \tag{11}$$

Поэтому затухание корреляции означает

$$\lim_{t\to+\infty}\left\langle f\left(\vec{x}^{(t)}\right) g\left(\vec{x}^{(0)}\right)\right\rangle = \frac{V(\Gamma_f)}{V(\Gamma)}. \tag{12}$$

Иными словами, вероятность того, что фазовая точка находится в области Γ_f, равна отношению объёма области Γ_f к объёму всего фазового пространства Γ. Это и означает перемешивание.

Заметим, что при перемешивании функции $f(\vec{x})$ и $g(\vec{x})$ играют различную роль. А именно, $f(\vec{x})$ характеризует начальную неопределённость, а $g(\vec{x})$ характеризует погрешность "измерительного прибора".

3. РЕШАЕМАЯ МОДЕЛЬ

Чтобы лучше представить себе ситуацию, мы ограничимся случаем двумерного фазового пространства и рассмотрим модель динамического хаоса, допускающую аналитическое решение. Такое решение возможно при выполнении трёх условий :

1.Преобразование $\vec{x}^{(t)} \to \vec{x}^{(t+1)}$ является кусочно-линейным вида

$$x_i^{(t+1)} = \left\{\alpha_{ij} x_j^{(t)}\right\}, \tag{13}$$

где α_{ij} -константы; $i, j = 1,2$; по повторяющимся индексам производится суммирование и символ $\{\ldots\}$ означает дробную часть числа

2.Коэффициенты α_{ij} – целые числа,

$$\left\{\alpha_{ij}\right\} = 0. \tag{14}$$

3.Функция $f(\vec{x})$ зависит только от одной пространственной координаты, скажем, от $\vec{x}_1^{(0)}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2^{(0)}} = 0. \tag{15}$$

Вместе с тем мы будем полагать, что функция $g\left(\vec{x}_1^{(0)}, \vec{x}_2^{(0)}\right)$ зависит от обеих координат,

$$\frac{\partial g}{\partial x_1^{(0)}} \neq 0 \text{ и } \frac{\partial g}{\partial x_2^{(0)}} \neq 0. \tag{16}$$

Нарушение последнего условия приводит к тому, что "измерительный прибор" является слишком грубым: он регистрирует перемешивание, т.е. $C(t) = 0$, (d-мерная решаемая модель была исследована в работе [15]) уже после первого шага. Выражение (13) означает, что мы рассматриваем преобразование тора [16, 19].

Благодаря условию 2 операция взятия дробной части коммутирует с операцией $\vec{x}^{(t)} \to \vec{x}^{(t+1)}$. Поэтому в выражениях (13) временно отбросить символ $\{\ldots\}$ превратив эти соотношения в линейные разностные уравнения,

$$x_i^{(t+1)} = \alpha_{ij} x_j^{(t)}. \tag{17}$$

После решения этих уравнений в окончательном результате следует заменить $\vec{x}(t)$ на $\{\vec{x}(t)\}$.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИЙ

Разложим функцию $f\left(\vec{x}_1^{(0)}\right)$ в ряд Фурье :

$$f\left(x_1^{(0)}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \exp\left(2\pi i m x_1^{(0)}\right), \tag{18}$$

где

$$f_m = \int_1^0 dx_1^{(0)} f\left(x_1^{(0)}\right) \exp\left(-2\pi i m x_1^{(0)}\right). \tag{19}$$

В силу соотношений (13), (14)

$$f\left(x^{(t)}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \exp\left(2\pi i m\left(\alpha_{11}^{(t)} x_1^{(0)} + \alpha_{12}^{(t)} x_2^{(0)}\right)\right), \tag{20}$$

где $\alpha_{ij}^{(t)}$ – элементы $t^{ой}$ степени матрицы α_{ij}.

Согласно определению корреляции

$$C(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' f_m \int_0^1 dx_1^{(0)} \int_0^1 dx_2^{(0)} g\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) \exp\left[2\pi i m\left(\alpha_{11}^{(t)} x_1^{(0)} + \alpha_{12}^{(t)} x_2^{(0)}\right)\right], \tag{21}$$

где штрих у знака суммы означает, что опускается слагаемое с $m = 0$.

5. РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Линейные разностные уравнения решаются аналогично линейным дифференциальным уравнениям. Для простоты мы ограничимся случаем "кота Арнольда"

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Система (17) имеет частное решение

$$\begin{aligned} x_1^{(t)} &= A_1 \lambda^t; \\ x_2^{(t)} &= A_2 \lambda^t. \end{aligned} \tag{23}$$

Подставляя эти выражения в (17), находим два значения λ:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right). \tag{24}$$

Общее решение системы (17) имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1^{(t)} &= A_1^+ \lambda_+^t + A_1^- \lambda_-^t; \\ x_2^{(t)} &= A_2^+ \lambda_+^t + A_2^- \lambda_-^t. \end{aligned} \tag{25}$$

Из (17) следует, что

$$\begin{aligned} A_2^+ &= \frac{\lambda_+ - \alpha_{11}}{\alpha_{12}} A_1^+; \\ A_2^- &= \frac{\lambda_- - \alpha_{11}}{\alpha_{12}} A_1^-. \end{aligned} \tag{26}$$

Полагая в (25) $t = 0$ и пользуясь выражением (26), находим

$$\alpha_{11}^{(t)} = \frac{shtL - sh(t-1)L}{shL}; \tag{27}$$

$$\alpha_{12}^{(t)} = \frac{shtL}{shL},$$

где

$$L = \ln \lambda_+ \tag{28}$$

При $t \to \infty$

$$\alpha_{11}^{(t)} = \frac{1 - e^{-L}}{2shL} \exp(tL); \tag{29}$$

$$\alpha_{12}^{(t)} = \frac{1}{2shL} \exp(tL). \tag{30}$$

6. РАЗРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ

В качестве примера выберем $f(\vec{x})$ и $g(\vec{x})$ в виде:

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} 1: & если \quad 0 \le x_1 \le 1/2 \\ 0: & in \quad the \quad opposite \quad case. \end{cases} \tag{31}$$

и

$$g(\vec{x}) = \begin{cases} 1: & if \quad 0 \le x_1 \le 1/3; 0 \le x_2 \le 1/3 \\ 0: & in \quad the \quad opposite \quad case. \end{cases} \tag{32}$$

При этом

$$f\left(\vec{x}^{(t)}\right) = 1 + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\sin\left(2\pi(2k+1)\left(\alpha_{11}^{(t)}x_1^{(0)} + \alpha_{12}^{(t)}x_2^{(0)}\right)\right) \tag{33}$$

Подставляя это выражение в формулу (5) и пользуясь равенством (32), находим

$$C(t) = \frac{1}{2\pi\alpha_{11}^{(t)}\alpha_{12}^{(t)}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{3}(2k+1)\alpha_{11}^{(t)}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}(2k+1)\alpha_{12}^{(t)}\right) - \right.$$
$$\left. - \sin\left(\frac{2\pi}{3}(2k+1)\left(\alpha_{11}^{(t)} + \alpha_{12}^{(t)}\right)\right)\right]. \tag{34}$$

Подставляя в эту формулу выражение (29), (30), получим асимптотику корреляции при $t \to +\infty$:

$$C(t) = B(t)\exp(-2Lt), \tag{35}$$

где

$$B(t) = \begin{cases} \pm\dfrac{sh^2 L}{24\left(1 - e^{-L}\right)} : if \quad t = 4N \pm 1; \\ 0: in \quad the \quad opposite \quad case. \end{cases} \tag{36}$$

$$N = 0,1,2,3,\ldots.$$

Мы видим, что скорость убывания корреляции равна $2L$:

$$\nu = 2L. \tag{37}$$

7. НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ

Пусть теперь функция $g(\vec{x})$ непрерывна по переменной :

$$g(\vec{x}) = \begin{cases} x_1/\varepsilon: & if \quad 0 \le x_1 \le \varepsilon; \quad 0 \le x_2 \le 1/3; \\ 1: & if \quad \varepsilon \le x_1 \le 1/3 - \varepsilon; \quad 0 \le x_2 \le 1/3; \\ 1/\varepsilon(1/3 - x_1): & if \quad 1/3 - \varepsilon \le x_1 \le 1/3; \quad 0 \le x_2 \le 1/3; \\ 0: & in \quad the \quad opposite \quad case. \end{cases} \tag{38}$$

Что же касается функции $f\left(\vec{x}^{(0)}\right)$, то она по прежнему определяется выражением (31). В этом случае

$$C(t)=\frac{1}{4\pi^4\left(\alpha_{11}^{(t)}\right)^2\alpha_{12}^{(t)}\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}\left[\cos\left(2\pi(2k+1)\alpha_{11}^{(t)}\varepsilon\right)+\right.$$

$$+\cos\left(2\pi(2k+1)(1/3-\varepsilon)\alpha_{11}^{(t)}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}(2k+1)\left(\alpha_{11}^{(t)}+\alpha_{12}^{(t)}\right)\right)+\cos\left(2\pi(2k+1)\alpha_{12}^{(t)}\right)-$$

$$-1-\cos\left(2\pi(2k+1)\left(\alpha_{11}^{(t)}\varepsilon+\alpha_{12}^{(t)}/3\right)\right)-\cos\left(2\pi(2k+1)\left((1/3-\varepsilon)\alpha_{11}^{(t)}+\alpha_{12}^{(t)}/3\right)\right)-$$

$$\left.-\cos\left(2\pi(2k+1)\alpha_{11}^{(t)}/3\right)\right]. \tag{39}$$

Поэтому асимптотика корреляций в этом случае имеет вид:

$$C(t)=D(t)\exp(-3Lt), \tag{40}$$

где $D(t)$ — быстро осциллирующая ограниченная функция

$$|D(t)|\le\frac{sh^2L}{48\varepsilon\left(1-e^{-L}\right)}. \tag{41}$$

Таким образом, если $g(\vec{x})$ непрерывно по переменной x_1, то

$$\nu=3L \tag{42}$$

С другой стороны, при малых выражения (32) и (38) близки друг к другу. Это означает, что бесконечно малое изменение функции $g(\vec{x})$ вызывает существенное изменение корреляции, т.е. что задача о нахождении корреляции некорректна (отметим попутно, что в противоположность термодинамике, стремление корреляций (35),(40) к нулю никогда не бывает монотонным даже по прошествии как угодно большого промежутка времени).

8. КОРРЕКТНОСТЬ

Математическая задача называется корректной по Адамару, если выполняются три условия [18]:

1. Решение существует.
2. Решение единственно.
3. Решение непрерывно зависит от исходных данных.

Как было показано в предыдущем разделе, задача об определении скорости хаотизации некорректна, так как две бесконечно близкие функции $g(\vec{x})$ (32) и (38) приводят к двум различным скоростям хаотизации (37) и (42).

Нам представляется, что в данном случае корректность следует понимать не по Адамару, а по Тихонову [19]. Иными словами, некорректную по Адамару задачу следует регуляризовать. Регуляризация состоит в сужении класса допустимых исходных данных (начальных функций). Например задача Коши для уравнения Лапласа становится корректной, если решение искать классе ограниченных функций [20]. В случае задачи о затухании корреляций регуляризация основана на том факте, что почти все взятые наугад функции разрывные (за исключением множества меры нуль). Это рассуждение аналогично выводу о несоизмеримости частот при условно термодинамическом движении [22,23]. Таким образом, пренебрегая множеством меры нуль, можно сказать, что почти все функции $g(\vec{x})$ разрывные. Поэтому регуляризующий алгоритм в задаче о скорости хаотизации состоит в том, что в качестве начальной функции $g(\vec{x})$ следует выбрать функцию, имеющую разрыв первого рода. В кинетической теории это соответствует заданию начального состояния в виде "грубого" распределения: μ — пространство (фазовое пространство одной частицы) разбито на ячейки и заданы числа частиц в каждой ячейке [5].

"...делаемые нами предположения о частости различных случаев и о вероятностях состояний являются предположениями о функциях распределения, описывающих вероятность обнаружить различные микроскопические состояния внутри области Г -пространства (фазовое пространство всей системы), определяемой заданным макроскопическим состоянием. Очевидно также, что эти предположения носят характер утверждений о равномерности распределения внутри малых интервалов -пространства и внутри соответствующих областей Г — пространства. Только предположения такого типа позволяют нам, в частности, применять в кинетической теории обычную формулу для числа соударений" [5, стр. 22].

Таким образом, в задаче о скорости затухания корреляций следует брать исходные функции $f(\vec{x})$ и $g(\vec{x})$ кусочно-постоянными. При этом, как мы видим в разделе 6, в случае двумерного фазового пространства скорость затухания корреляций равна удвоенному максимальному показателю Ляпунова L: $\nu = 2L$. В случае d-мерного фазового пространства скорость затухания корреляций равна $L \cdot d$ [15].

Авторы благодарят Г.Я. Любарского за ценные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

[1] H.Poincare J.D. Phys (4)5 (1906) 369

[2] Н.Н.Боголюбов Проблемы динамической теории в статистической физике (Гостехиздат, Москва, 1946)

[3] J.W.Gibbs The collected works. (Longmans, Green and Co, New York, 1931)

[4] E.Hopf J.Math. Physics, 13(1934) 51.

[5] Н.С. Крылов Работы по обоснованию статистической физики. (Издательство АН СССР, Москва-Ленинград, 1950)

[6] J.Mozer Stable and random motions in dynamical systems.(Princeton Univ.Press, Princeton, New-Jersey, 1973)

[7] B.V. Chirikov Phys. Rep., 52(1979)263.

[8] G.M. Zalavsky Chaos in dynamical systems (Harvard, New York, 1985)

[9] И.П. Корнфельд, Я.Г.Синай, С.В.Фомин Эргодическая теория (Наука, Москва, 1980)

[10] А.В. Гапонов-Греков, М.И. Рабинович Успехи физических наук, 128(1979) 579.

[11] Г.М. Заславский, Р.З.Сагдеев Введение в нелинейную физику.(Физматлит, Москва, 1988)

[12] A.J. Lichtenberg and M.A. Liberman Regular and stochastic motion. Appl. Math. Sci., 38 (Springer-Verlag, New York, 1983)

[13] T.Nagashima, H.Haken Phys. Lett., 96A(1983) 385.

[14] R.Graham Phys.Rev.A.,28(1983)1679.

[15] V.P. Demutskii,R.V. Polovin Journal of technical Physics,61,(1991)1.

[16] H.Frish Phys.Rev., 109(1958)22.

[17] J.D.Crawford, J.R.Carry Physica 6D(1983)223

[18] Hadamard J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineairess hyperboliques — Paris: Hermann, 1932

[19] А.Н. Тихонов ДАН СССР, 39(1943)195

[20] V.I. Arnold и A.Avaz Ergodic problem in classical mechanics. (W.A.Benjamin, New York, 1968)

[21] С.Г. Крейн ДАН СССР, 114(1957),1162

[22] А.Н. Колмогоров ДАН СССР, 98(1954),527

[23] В.И.Арнольд Успехи математических наук. 18(1963)13.