УДК 513.37:538.31

# СТАТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫЕ КОНФИГУРАЦИИ МАГНИТНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ТЕЛ

*В.П. Демуцкий,*
*С.С. Зуб,*
*В.М. Рашкован*

*Харьковский государственный университет,* 310108, Украина, г.Харьков, ул.Курчатова 31, кафедра "Теоретической ядерной физики".
*Харьковский авиационный институт,* 310070, Украина, г.Харьков, ул. Чкалова 17, кафедра "ЭУ и ЭРД космических летательных аппаратов".

В работе приводится доказательство существования устойчивого статического равновесия в системе тел взаимодействующих между собой исключительно магнитными силами. Аналитически получены достаточные условия существования минимума магнитной потенциальной энергии в одной из рассмотренных систем.

Вопрос о возможности устойчивого равновесия в свободном состоянии под действием исключительно электрических или магнитных сил имеет длинную историю [1,2].

В 1839 г. С. Ирншоу показал, что для точечных электрических объектов в электростатическом поле, устойчивое равновесие невозможно. В 1939 г. В. Браунбек выяснил, что для случая протяженных магнитостатических взаимодействующих диамагнитных тел аргументы Ирншоу не носят характер запрета.

Все теоретические и экспериментальные результаты по устойчивому статическому равновесию, полученные до сих пор, относятся к магнитной левитации, то есть равновесие рассматриваемых систем достигается благодаря наличию гравитационной силы.

Цель этой работы — ответить на вопрос: возможно ли устойчивое статическое равновесие тел, которые взаимодействуют с остальными телами чисто магнитными силами? Если это возможно, то такая конфигурация поля называется магнитной потенциальной ямой (МПЯ).

Представленное исследования принципиально отличаются от уже полученных теоретических и экспериментальных результатов тем, что не относится к случаю магнитной левитации. Для исследования был выбран модельно-конструктивный подход [1,2]. В случае нескольких магнитно взаимодействующих тел, он позволяет упростить рассмотрение в сравнении с полевым подходом. При таком рассмотрении задача представляет классическое исследование на устойчивость электромеханической системы в лагранжевом формализме.

Рассмотрим систему из четырех сверхпроводящих круговых витков. Три витка жестко связаны между собой и с декартовой системой координат. Их центры совпадают с центром системы координат, а плоскости взаимно перпендикулярны. Нормали этих колец направлены вдоль положительных направлений системы координат. Обозначим индексом 1 виток с нормалью вдоль $x$. Соответственно 2 и 3 индексы для витков с нормалями вдоль $y,z$. Свободным элементом системы является кольцо с индексом 4 см. рис.1.

Пускай, потоки замороженные в витках 1 и 2 равны нулю, а потоки в 3 и 4 отличны от нуля, причем $\Psi_3 < \Psi_4$. Соответственно собственную индуктивность витков обозначим через $L_S$,а взаимные индуктивности через $L_{SK}$,где $S, K = 1..4$. Аналогичная система была рассмотрена в работе [1], где доказана устойчивость такой системы по трем пространственным пере-

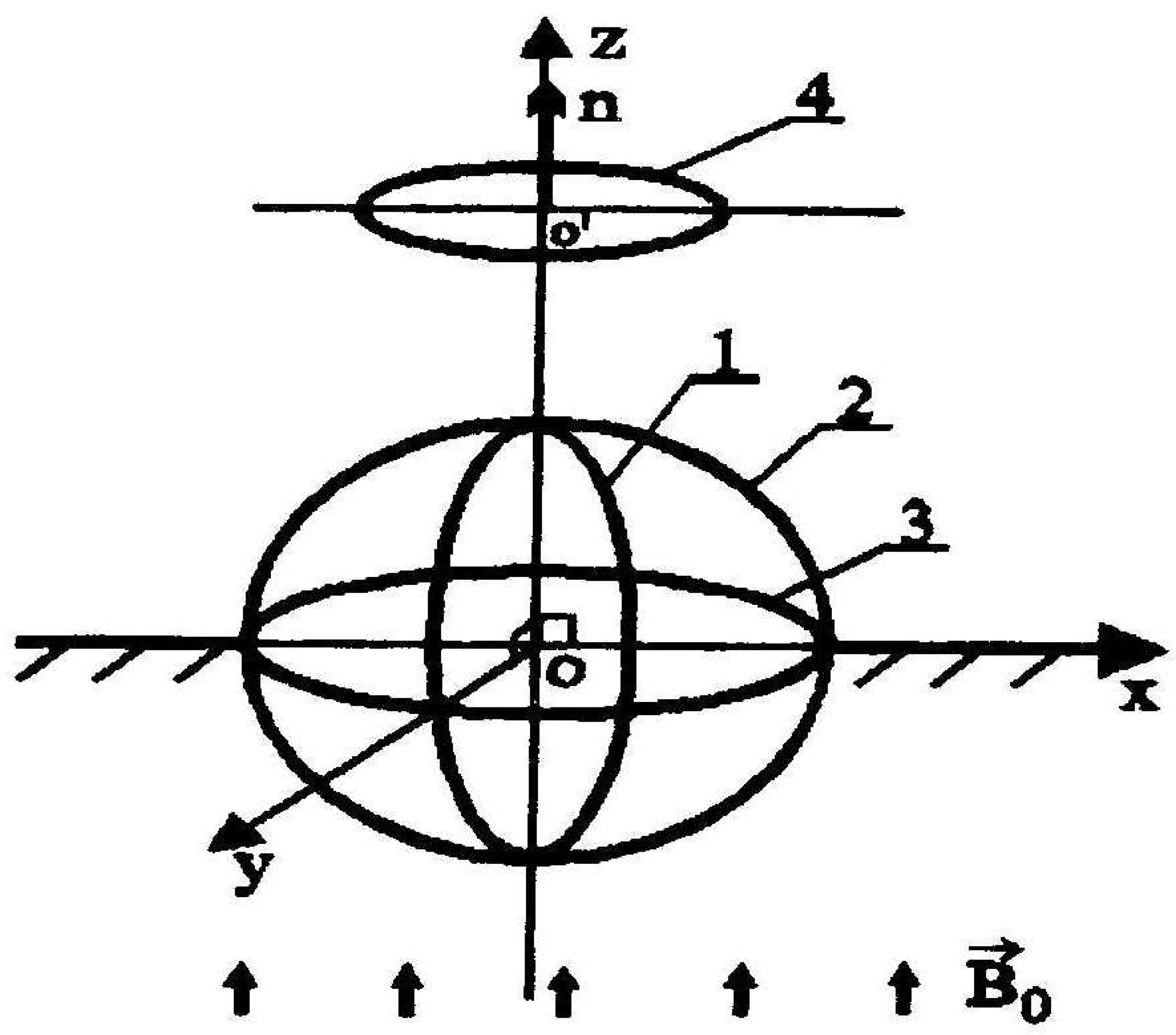


**Рис.1.** Магнитная система четырех идеально проводящих элементов.1,2,3 – фиксированные относительно СК кольца; 4 – свободное кольцо, изображенное в положении равновесия; $\vec{B}_0$ – внешнее однородное магнитное поле.

менным системы. Недостатком, является отсутствие исследования по четвертой – угловой обобщенной переменной. Доведем исследование до конца. Пускай $L_1 = L_2 = L_S$. Если четвертый виток занимает оси симметричное положение, то $L_{14} = L_{24} = 0$. В рассматриваемом случае магнитная потенциальная энергия четырех витковой системы по виду совпадает с магнитной потенциальной энергией двух витковой системы. Обозначим через $U$ – магнитную потенциальную энергию четырех витковой системы, а $\overline{U}$ – магнитная потенциальная энергия при указанных предположениях:

$$\overline{U} = \frac{L_4\,\Psi_3^2 - 2L_{34}\,\Psi_3\Psi_4 + L_3\,\Psi_4^2}{L_3L_4 - L_{34}^2}. \qquad (1)$$

Обозначим, $L_{4S} = M_S$. Запишем выражение для градиента и гессиана функции $U$ в общем случае:

$$\frac{\partial U}{\partial x^\mu} = \frac{\partial U}{\partial M^S}\cdot\frac{\partial M^S}{\partial x^\mu};\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial^2 U}{\partial M^S\,\partial M^R}\cdot\frac{\partial M^S}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial M^R}{\partial x^\nu} + \frac{\partial U}{\partial M^S}\cdot\frac{\partial^2 M^S}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \qquad (2)$$

Если четвертый виток расположен оси симметрично третьему, то первый и второй ему ортогональны. При этом $M_1 = M_2 = 0$. Функция $U$ зависит от $M_1^2$, $M_2^2$ .Из вышесказанного следует, что в случае $x = y = \theta = \phi = 0$ имеем,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial M^S\,\partial M^R} = 0,$$

для всех $R \neq S$ . Тогда в интересующем нас оси симметричном случае гессиан, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial^2 U}{(\partial M_1)^2}\cdot\frac{\partial M_1}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial M_1}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 U}{(\partial M_2)^2}\cdot\frac{\partial M_2}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial M_2}{\partial x^\nu} +$$
$$+\frac{\partial^2 U}{(\partial M_3)^2}\cdot\frac{\partial M_3}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial M_3}{\partial x^\nu} + \frac{\partial U}{\partial M_3}\cdot\frac{\partial^2 M_3}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \qquad (3)$$

В интересующем нас случае $U = \overline{U}$ то есть известно, что $U$ имеет экстремум по $z$ [1], тогда $\partial U / \partial M_3 = 0$ . В точке экстремума (минимума) с учетом выше сказанного имеем:

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial M_3^2}\right|_{\Psi_3 = \frac{M_3}{L_4}\Psi_4} = \frac{\Psi_4^2}{L_4}\cdot\frac{1}{L_3L_4 - M_3^2} > 0\ ;\ \left.\frac{\partial^2 U}{\partial M_1^2}\right|_{\Psi_3 = \frac{M_3}{L_4}\Psi_4} = \frac{2\Psi_4^2}{L_1 L^2{}_4} > 0. \qquad (4)$$

Итак гессиан в интересующем оси симметричном положении в минимуме по $z$ имеет вид (3) но без последнего слагаемого. В гессиане отличными от нуля оказываются следующие компоненты:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 U}{(\partial M_1)^2}\cdot\left(\frac{\partial M_1}{\partial z_1}\right)^2=H_{11};\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 U}{(\partial M_2)^2}\cdot\left(\frac{\partial M_2}{\partial z_2}\right)^2=H_{22};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 U}{(\partial M_3)^2}\cdot\left(\frac{\partial M_3}{\partial z_2}\right)^2=H_{33};\ \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 U}{(\partial M_1)^2}\cdot\left(\frac{\partial M_1}{\partial \theta_1}\right)^2=H_{44}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial \theta}=\frac{\partial^2 U}{(\partial M_1)^2}\cdot\left(-\frac{\partial M_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial M_1}{\partial \theta_1}\right)=\frac{\partial^2 U}{\partial \theta\partial x}=H_{14}=H_{41}.$$

Следовательно,

$$H_{11}\cdot H_{44}-H_{14}^2=\left[\frac{\partial^2 U}{\partial M_1^2}\right]^2\cdot\left(\left[\frac{\partial M_1}{\partial z_1}\right]^2\cdot\left[\frac{\partial M_1}{\partial \theta_1}\right]^2-\left[\frac{\partial M_1}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial M_1}{\partial \theta_1}\right]^2\right)=0. \quad (6)$$

То есть условие устойчивости по θ не выполняется.

Рассмотрим нашу четырех витковую систему в присутствии внешнего однородного магнитного поля см. рис.1. Магнитная энергия, как функция токов, имеет вид:

$$U=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i,k=1}^{4}L_{ik}I^iI^k+\sum_{k=1}^{4}\Phi_k I^k, \quad (7)$$

Так как магнитное поле параллельно оси $z$, то $\Phi_1=\Phi_2=0$. Выразим все токи через потоки а следовательно выразим магнитную потенциальную энергию через потоки.

$$U=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Psi_3^2-\Phi_3^2}{L_3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\left(\Psi_4-\frac{L_{34}}{L_3}\cdot\Psi_3\right)^2-\left(\Phi_4-\frac{L_{34}}{L_3}\cdot\Phi_3\right)^2\right)}{\left(L_4-\frac{L_{14}^2}{L_1}-\frac{L_{24}^2}{L_2}-\frac{L_{34}^2}{L_3}\right)}, \quad (8)$$

где $\Phi_k$ — поток внешнего поля через $k$ — кольцо.

В выражении (8) первое слагаемое дает постоянный вклад. Заметим, что так как внешнее поле направлено вдоль $z$, то оно не нарушает симметрию системы. Единственная дополнительная переменная $\Phi_4=\pi\cdot r_4^2\cdot B_0\cdot\cos\theta$ влияющая на устойчивость, зависит исключительно от θ. Следовательно, ищем устойчивость при оси симметричном положении 3-го и 4-го колец. Имеем,

$$\frac{\partial U}{\partial x^\mu}=\frac{\partial U}{\partial M^S}\cdot\frac{\partial M^S}{\partial x^\mu}+\frac{\partial U}{\partial \Phi_4}\cdot\frac{\partial \Phi_4}{\partial x^\mu},$$

причем градиент $\Phi_4$ отличен от нуля только при $\partial\Phi_4/\partial\theta$, но в случае $\partial\Phi_4/\partial\theta|_{\theta=0}=0$. То есть введенное поле не влияет на условие экстремума. В точке экстремума при оси симметричном расположении 3-го и 4-го колец, гессиана имеет, следующую структуру:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^\mu\partial x^\nu}=\frac{\partial^2 U}{\partial M^S\partial M^R}\cdot\frac{\partial M^S}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial M^R}{\partial x^\nu}+$$
$$+\frac{\partial U}{\partial M_3}\cdot\frac{\partial^2 M_3}{\partial x^\mu\partial x^\nu}+\frac{\partial^2 U}{(\partial\Phi_4)^2}\cdot\frac{\partial\Phi_4}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial\Phi_4}{\partial x^\nu}+\frac{\partial U}{\partial\Phi_4}\cdot\frac{\partial^2\Phi_4}{\partial x^\mu\partial x^\nu} \quad (9)$$

Изучение структуры градиента и гессиана от $M_S$ и $\Phi_4$ в интересующем нас положении показало, что отличными от нуля оказываются как и в (3), следующие компоненты гессиана: $H_{11}, H_{22}, H_{33}, H_{44}, H_{14}$, но в $H_{44}$ появляется дополнительно слагаемое,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2 U}{(\partial M_1)^2} \cdot \left(\frac{\partial M_1}{\partial\theta_1}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial\Phi_4} \cdot \frac{\partial^2\Phi_4}{\partial\theta^2} = H_{44} \tag{10}$$

Условия устойчивости имеет вид: $H_{11} > 0, H_{22} > 0, H_{33} > 0, H_{11} \cdot H_{44} > H_{14}^2$. Необходимо, чтобы выполнялись условия:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial M_1^2} > 0;\ \frac{\partial^2 U}{\partial M_2^2} > 0;\ \frac{\partial^2 U}{\partial M_3^2} > 0;\ \frac{\partial^2 U}{(\partial M_1)^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial\Phi_4} \cdot \left(\frac{\partial M_1}{\partial z_1}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2\Phi_4}{\partial\theta^2} > 0. \tag{11}$$

Если выполняется первое из четырех условий то четвертое можно упростить

$$\frac{\partial U}{\partial\Phi_4} \cdot \frac{\partial^2\Phi_4}{\partial\theta^2} > 0,$$

причем известно, что

$$\left.\frac{\partial^2\Phi_4}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0} = -\pi \cdot r_4^2 \cdot B_0;\ \left.\frac{\partial U}{\partial\Phi_4}\right|_{\theta=0} = -\frac{(L_3\Phi_4 - M_3\Phi_3)}{2\cdot(L_3L_4 - M_3^2)},$$

следовательно $B_0 \cdot (L_3\Phi_4 - M_3\Phi_3) > 0$.

Очевидно, что $\Phi_4|_{\theta=0} = \pi \cdot r_4^2 \cdot B_0$ и $\Phi_3 = \pi \cdot r_3^2 \cdot B_0$. Условие устойчивости имеет вид:

$$r_4^2 \cdot L_3 > r_3^2 \cdot M_3 \tag{12}$$

Таким образом впервые получено конструктивное доказательство существования магнитной потенциальной ямы.

Возникает вопрос, можно ли получить МПЯ в замкнутой системе, состоящей, исключительно из однотипных источников магнитного поля. Введем, в нашу четырех кольцевую систему (но без внешнего поля $B_0$) пятое сверхпроводящее кольцо расположенное на оси и фиксированное, так что бы свободное кольцо находилось между двумя неподвижными оси симметрично расположенными витками с ненулевыми магнитными потоками. Нумерация витков сохраняется прежней, но теперь 4 индекс относится к дополнительному витку, а 5 к свободному. Рассуждая аналогично случаю четырех кольцевой системы в однородном магнитном поле получим гессиан вида:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = {} & \frac{\partial^2 U}{(\partial M_1)^2} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 U}{(\partial M_2)^2} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 U}{(\partial M_3)^2} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial x^\nu} + \\ & \frac{\partial^2 U}{(\partial M_4)^2} \cdot \frac{\partial M_4}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial M_4}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 U}{\partial M_3 \partial M_4} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial M_4}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 U}{\partial M_3 \partial M_4} \cdot \frac{\partial M_4}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial M_3}{\partial x^\nu} + \\ & \frac{\partial U}{\partial M_3} \cdot \frac{\partial^2 M_3}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial U}{\partial M_4} \cdot \frac{\partial^2 M_4}{\partial x^\mu \partial x^\nu}.\end{aligned} \tag{13}$$

Все величины входящие в выражение (13) необходимо вычислять. Несмотря на упрощения, полученные благодаря модельно-конструктивному подходу, выражения получаются сложными. Аналитическое решение для взаимной индуктивности, силы и ее производных удалось получить только при осевом расположении колец. В случае произвольной ориентации колец, численного однократного интегрирования избежать не удается. При проведении громоздких аналитических выкладок использовалась система математических вычислений MapleV(R3) [3]. Символьно были получены аналитические выражения для: магнитной потенциальной энергии, подынтегральной функции силы и ее производных, выражения взаимной индуктивности, силы и ее производных в осевом случае. Все выше перечисленные результаты были интегрированы в символьно-численные библиотеки и подвергнуты перекрестной проверке. Ряд авторов считает подобные исследования самостоятельной проблемой [4,5]. Однако, представленные в этих работах результаты относятся к случаям специального расположения витков, с наложенными связями, как правило оси симметричном и коаксиальном. Достоверные результаты по нахождению сил и их производных даже в оси симметричном случае редкость [1,2]. Используя разработанную систему библиотек удалось подобрать параметры пяти-кольцевой системы при которых имеется МПЯ. Использование этих библиотек позволило найти положения равновесия для пяти-кольцевой системы. В качестве примера приводятся график градиента магнитной потенциальной энергии по $z$ см. рис.2, иллюстрирующий особое поведение силы магнитного взаимодействия, благодаря чему и удается достичь устойчивости равновесия.

Первый из рассмотренных примеров является конструктивным доказательством теоремы о существовании минимума магнитной потенциальной энергии или возможности устойчивого статического равновесия системы тел взаимодействующих исключительно магнитными силами. Обе задачи являются моделями демонстрирующими механизмы реализации устойчивого статического равновесия.

Имеющиеся экспериментальные данные в области левитации систем с ВТСП дают основания предполагать, что механизмы устойчивости левитирующих тел в этих системах существенно аналогичны рассмотренным в данной статье механизмам. Разработка качественных моделей для ВТСП систем является текущей задачей.

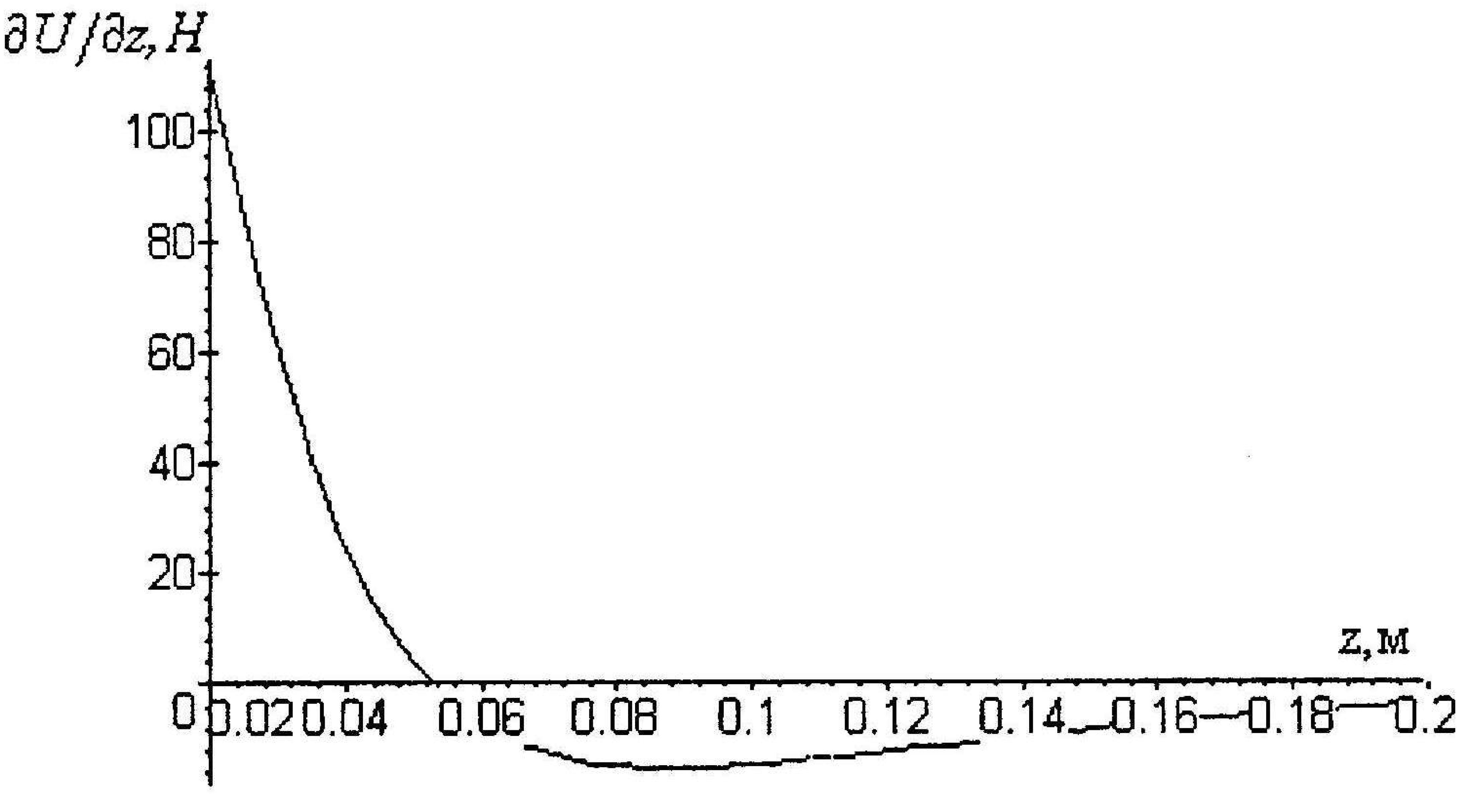


Рис.2. Компонента градиент магнитной силы по $z$. Проявление эффекта Козореза (МПЯ).Параметры одной из таких систем (из пяти колец): расстояние между плоскостями 3-го и 5-го колец ($h$=0.5 м); радиус 5-го (свободного) кольца (a0=0.08 м); радиус 3-го и 4-го колец (b0=c0=0.1 м); радиус 1-го и 2-го колец (стабилизаторов) (s0=0.05 м); Собственные индуктивности и магнитные потоки колец. Индексы показывают принадлежность параметра: $L_1$=0.4 $10^{-6}$ гн, $L_2$=0.4 $10^{-6}$ гн, $L_3$=0.4 $10^{-5}$ гн, $L_4$=0.4 $10^{-5}$ гн, $L_5$=0.4 $10^{-6}$ гн; $\Psi_3$=4 $10^{-4}$ вб, $\Psi_4$=4 $10^{-4}$ вб, $\Psi_5$=2 $10^{-3}$ вб.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Козорез В.В. Динамические системы магнитно взаимодействующих свободных тел, Наукова Думка, Киев, 1981

[2] Михалевич В.С., Козорез В.В., Рашкован В.М. “Магнитная потенциальная яма” — эффект стабилизации сверхпроводящих динамических систем, Наукова Думка, Киев, 1991

[3] M. Monagan and W. Neuenschwander, Algorithmic Differentiation in Maple, ETH, CH-8092 Ziirich, 1993.

[4] M. Garrett,Calculation of Fields,Forces,and Mutual Inductances of Current Systems by Elliptic Integrals,Journal of Applied physics,15 May,1963,vol.34, №9, pp.2567-2573.

[5] Калантаров П., Цейтлер Л. Вычисление индуктивностей, Справочник, Энергия, 1970.