УДК 621.30:538.31

МЕТОД РАУСА И ПРИНЦИП ГЕРЦА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ПОСТОЯННЫХ МАГНИТОВ И СВЕРХПРОВОДЯЩИХ КАТУШЕК И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ МАГНИТНОЙ ЛЕВИТАЦИИ

В.П. Демуцкий,
С.С. Зуб,
В.М. Рашкован

Харьковский государственный университет, 310108, Украина, г.Харьков, ул.Курчатова 31, кафедра "Теоретической ядерной физики".
Харьковский авиационный институт, 310070, Украина, г.Харьков, ул. Чкалова 17, кафедра "ЭУ и ЭРД космических летательных аппаратов".

В работе исследуются особенности применения лагранжевого формализма для электромеханических систем, состоящих из постоянных магнитов и сверхпроводящих катушек. В качестве примера использования разработанного формализма рассматривается задача о взаимодействии магнитного диполя и сверхпроводящего кольца в присутствии однородного поля тяжести. Проведен исчерпывающий анализ устойчивости статического равновесия в такой системе.

Вопрос о возможности устойчивого равновесия в свободном состоянии под действием электрических или магнитных сил имеет длинную историю [1,2]. Рассмотрение задач основанных на эффекте Козореза в работах [1,2] ведется на основании электромеханического формализма изложенного в работе [3]. Указанный формализм, однако, не позволяет рассматривать целый класс электромеханических задач, описывающих взаимодействие постоянного потока и постоянного тока. В фундаментальных работах, посвященным исследованию вопросов устойчивости в задачах магнитной левитации, взаимодействие таких элементов не было рассмотрено. Между тем эксперименты с такими элементами проводились, и магнитная левитация была обнаружена [1]. Поэтому, создание лагранжевого формализма, описывающего такой класс взаимодействий, на наш взгляд представляет как теоретический так и прикладной интерес.

В качестве примера использования такого формализма, можно рассмотреть задачу о взаимодействии постоянного магнита со сверхпроводящей катушкой в присутствии однородного поля тяжести, то есть решить задачу о магнитной левитации такой системы. Заметим, что катушка с заданным постоянным током является адекватной моделью постоянного магнита, если рассматривается поле вне магнита, а изменением его намагниченности под действием собственных полей изучаемой системы можно пренебречь.

Рассмотрим магнитное взаимодействие двух катушек — одна сверхпроводящая, другая запитывается от источника тока. Таким образом, для первой из них постоянным является потокосцепление, а для второй, протекающий через нее ток. Энергия системы зависит от механических переменных, описывающих положение и скорость катушек, и от протекающих через них токов. Пусть x и $\dot{x}$ — набор переменных Лагранжа, которые описывают механическое движение катушек без магнитного взаимодействия, а q_1 — заряд, протекающий через фиксированное сечение сверхпроводящего контура, то есть $q_1 = \int I_1 dt$, q_2 – аналогичная величина для катушки с заданным током, то есть $q_2 = \int I_2 dt = I_2 t$.

Как известно, применение метода Рауса для исключения циклических координат сводит уравнения динамики исходной системы к эквивалентным уравнениям некоторой приведенной системы, функция Лагранжа которой весьма просто находится из функции Рауса исходной системы [4]. При этом преобразовании часть кинетической энергии исходной системы переходит в потенциальную энергию приведенной системы. Этот факт дал основание Г. Герцу в его работе [5] выдвинуть концепцию о кинетическом происхождении потенциальной энергии. Не вдаваясь в обсуждение философских основ этой концепции, мы покажем, что формально-математическое описание взаимодействия постоянных магнитов и сверхпроводящих катушек в точности соответствует принципу Герца. Полное и ясное описание метода Рауса и концепции Герца дано в книге [4]. Однако, вывод функции Лагранжа приведенной системы и ее анализ проведен в этой работе в предположении о склерономном характере связей. Как будет показано ниже, электрические переменные нашей системы явным образом подчиняются связям, зависящим от времени, поэтому непосредственное использование выведенных в [4] результатов неправомерно, и в нашем случае необходимо заново выполнить все этапы приведения системы. Будем считать q_1 и q_2 — электрическими координатами системы взаимодействующих катушек, а I_1 и I_2 — соответствующими этим координатам скоростями. В выбранной системе координат энергию системы ищем в виде:

$$T = T_e + T_m, \tag{1}$$

где T_m — кинетическая энергия механического движения катушек, зависящая от x и $\dot{x}$, а T_e имеет вид:

$$T_e = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} L_{\alpha\beta} \cdot I^{\alpha} I^{\beta}. \tag{2}$$

Таким образом, в соответствии с принципом Герца вся энергия системы является кинетической. Условия постоянства тока во втором контуре будем рассматривать как голономную связь, зависящую от времени:

$$q_2 = I_2 \cdot t. \tag{3}$$

С учетом связи (3) обобщенными координатами системы будут механические координаты x и электрическая координата q_1, а функция Лагранжа имеет вид:

$$L = T_m(x,\dot{x}) + \frac{1}{2}L_{11}\dot{q}_1^2 + L_{12}(x)I_2\dot{q}_1 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2. \tag{4}$$

Заметим, что по обобщенной скорости $\dot{q}_1$ функция Лагранжа не является квадратичной. Так как L не зависит от q_1, то координата q_1 является циклической. Найдем обобщенный импульс соответствующий q_1, то есть

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = L_{11}\dot{q}_1 + L_{12}I_2, \tag{5}$$

следовательно,

$$\dot{q}_1 = I_1 = (p_1 - L_{12}I_2) / L_{11}. \tag{6}$$

Вычислим функцию Рауса:

$$R = R(x,\dot{x},p_1) = p_1\dot{q}_1 - L. \tag{7}$$

Подставляя (6) в правую часть (7), получаем:

$$R = -T_m + \frac{(p_1 - L_{12}I_2)^2}{2L_{11}} - \frac{1}{2}L_{22}I_2^2. \tag{8}$$

Так как координата q_1 является циклической, то для всех движений исходной системы имеем:

$$p_1 = const\,. \tag{9}$$

Из формулы (5) следует, что $p_1 = \Psi_1$ является потокосцеплением сверхпроводящей катушки, а его постоянство отражает физический факт "замороженности" магнитного потока через сверхпроводящий контур. В соответствии с методом Рауса после исключения циклических координат движение исходной системы полностью определяется решением уравнения Лагранжа для некоторой приведенной системы с функцией Лагранжа

$$L^* = -R = T^* - V\,. \tag{10}$$

В нашем случае обобщенными координаты приведенной системы будут механические обобщенные координаты x, кинетическая энергия приведенной системы имеет вид:

$$T^* = T_m(x, \dot{x}), \tag{11}$$

а потенциальная энергия приведенной системы определяется выражением,

$$V = \left(\Psi_1 - I_2 L_{12}(x)\right)^2 / 2L_{11}\,, \tag{12}$$

так как последнее слагаемое в (8) представляет собой константу и в выражении для потенциальной энергии может быть опущено. Тогда магнитная сила, действующая между катушками, имеет вид:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -L_{11} I_1(x) \frac{\partial I_1}{\partial x} = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial x}\,, \tag{13}$$

что является физически правильным выражением для магнитной силы [6]. Из выражения (13) видно, что сила изменяет знак в точке, где $I_1(x) = 0$, то есть $L_{12}(x) = \Psi_1 / I_2$. Подобный эффект для сверхпроводящих колец был обнаружен Козорезом [1] и явился предпосылкой для поиска магнитной потенциальной ямы [1,2].

В работах [1,2,3] по динамике электромеханических систем имеется неоднозначность интерпретации механического смысла магнитной энергии как кинетической или потенциальной. В предложенном нами подходе этот спорный вопрос решается в полном соответствии с принципом Герца. Для исходной системы магнитная энергия по форме является кинетической, а для приведенной потенциальной.

Выше мы рассмотрели применение метода Рауса для нахождения приведенной функции Лагранжа электромеханической системы, состоящей только из двух разнотипных элементов. Этот пример важен по двум причинам. Во-первых, он демонстрирует все существенные черты данного формализма и может быть легко обобщен на произвольное число элементов рассмотренных типов. Во-вторых, в данной системе в присутствии однородного поля тяжести при определенных условиях возможна магнитная левитация.

Для того, чтобы получить условия левитации в аналитическом виде, выберем простейшую геометрическую форму сверхпроводящей катушки, а именно, тонкое идеально проводящее кольцо. С этой же целью будем считать, что размер постоянного магнита много меньше диаметра сверхпроводящего кольца, это позволит рассматривать его как магнитный диполь. Центр идеально проводящего кольца совпадает с центром неподвижной системы отсчета, а плоскость кольца перпендикулярна направлению силы тяжести. Положение диполя будем описывать переменными ρ, φ, z цилиндрической системы координат, а его ориентацию углами θ, ψ, задающими направление вектора магнитного момента в сферической системе координат с тем же выбором оси z. Сила тяжести противоположна направлению оси z. Тогда потенциальная энергия системы (12) с учетом однородного поля тяжести приобретает вид:

$$V_\Sigma = L_{11} I_1^2 / 2 + G \cdot z\,, \tag{14}$$

где согласно (6) $I_1 = \left(\Psi_1 - M(x)\cdot I_2\right) / L_{11}$, Ψ_1 — магнитный поток через сверхпроводящее кольцо, а $M = L_{12}$ — взаимная индуктивность кольца и диполя, G — вес магнита. Выражение для взаимной индуктивности кольца и диполя можно вывести, используя одно из определений взаимной индуктивности [6]:

$$M \cdot I_1 = \int_{S_2} \left(\vec{B}_1 \cdot \vec{n}\right) \cdot dS_2, \tag{15}$$

где $\vec{B}_1$ — магнитное поле кольца, создаваемое током I_1, а S_2 — поверхность, натянутая на контур петли, описывающей магнитный диполь и $\vec{n}$ — единичная нормаль к поверхности S_2. Таким образом, для бесконечно малого диполя $\vec{n}$ задает направление диполя. Интегрирование сводится к умножению на площадь петли, и окончательно имеем:

$$M \cdot I_2 = \left(\vec{B}_1/I_1, \vec{n}\right) \cdot \left(S_2 I_2\right) = \left(\vec{\mu}, \vec{b}\right), \tag{16}$$

где $\vec{b}$ — магнитное поле кольцевого контура, несущего единичный ток.

Выражение для $\vec{B}_1$ (а значит и для $\vec{b}$) в цилиндрической системе координат, использующее полные эллиптические интегралы даны в книге [1]. Таким образом, потенциальная энергия исследуемой системы может быть выражена через полные эллиптические интегралы. Однако, для исследования устойчивости системы вполне достаточно иметь разложение потенциальной энергии по степеням ρ до второго порядка включительно. Тогда, учитывая, что $b_\varphi = 0$, имеем:

$$\left(\vec{\mu}, \vec{b}\right) = \mu \cdot \left(b_\rho \sin(\theta)\cos(\alpha) + b_z \cos(\theta)\right), \tag{17}$$

где μ — величина магнитного момент диполя, $\alpha = \psi - \varphi$, а b_ρ, b_z — компоненты магнитного поля в цилиндрической системе координат, имеющие вид:

$$b_\rho = \frac{3}{4}\frac{\mu_0 a^2 \rho \cdot z}{\left(a^2 + z^2\right)^{5/2}}; \quad b_z = \frac{1}{8}\frac{\mu_0 a^2\left(4z^4 + 8a^2z^2 - 12\rho^2 z^2 + 4a^4 + 3\rho^2 a^2\right)}{\left(a^2 + z^2\right)^{7/2}}, \tag{18}$$

где a — радиус кольца с током, создающего магнитное поле $\vec{B}_1$.

Следовательно, с необходимой точностью потенциальная энергия выражается через элементарные функции.

Наша система обладает симметрией относительно оси z, поэтому координата φ — механическая циклическая координата и не входит в выражение для потенциальной энергии, что например видно из формулы (17). Поэтому истинный минимум потенциальной энергии может находиться только на оси z (то есть $\rho = 0$).

Из формулы (6), (13), (16) выражение для компонент силы имеет вид:

$$F_x = I_1\, \partial\left(\vec{\mu}, \vec{b}\right) / \partial x, \tag{19}$$

где $x = z, \rho, \varphi, \alpha, \theta$. Как следует из формул (17-19) для того, чтобы на оси z компоненты силы F_ρ, F_θ обращались в нуль, необходимо, чтобы $\theta = 0$ или $\theta = \pi$. В дальнейшем будем рассматривать только случай $\theta = 0$, так как изменение θ на π физически эквивалентно изменению знака магнитного момента μ. В присутствии силы тяжести точка равновесия не может совпадать с нулем магнитной силы, поэтому $I_1 \neq 0$. Таким образом, все составляющие магнитной силы, кроме компоненты F_z автоматически обращаются в нуль на оси симметрии системы, а F_z может быть уравновешена силой тяжести G. Причем важно отметить, что равенство нулю сумы магнитной силы и силы тяжести может быть достигнуто в любой точке оси z соответствующим подбором соотношения магнитных параметров и массы магнита при условии, что магнитная сила направлена вверх. Таким образом, для определения условий устойчивости равновесия системы достаточно исследовать потенциальную энергию

(12) во втором порядке малости по отклонениям координат от предполагаемой точки равновесия. Заметим, что потенциальная энергия однородного поля тяжести линейна по z и потому параметр G не может входить в условия устойчивости, определяемые вторым порядком малости по координатам.

Для удобства исследования достаточных условий минимума потенциальной энергии системы введем следующий набор безразмерных независимых переменных: $\delta = \rho/a$, $\zeta = z/a$, $\xi = \sin(\theta)\cos(\alpha)$, $\eta = \sin(\theta)\sin(\alpha)$. Переменные ξ и η, задающие направления диполя, исключают неопределенность присущую параметру α при ориентации диполя параллельно оси z. В выбранных переменных потенциальная энергия системы имеет следующий вид:

$$V = \frac{(\mu_0\mu)^2}{a^2 L_{11}} \cdot \overline{V} = \frac{(\mu_0\mu)^2}{a^2 L_{11}} \times$$
$$\times \frac{\left(\left(4\zeta^2\left(3\delta^2 - \zeta^2 - 2\right) - \left(3\delta^2 + 4\right)\right)\sqrt{1 - \left(\xi^2 + \eta^2\right)} + \left(\zeta^2 + 1\right)\left(4\kappa\left(\zeta^2 + 1\right)^{5/2} - 6\zeta\xi\delta\right)\right)^2}{128 \cdot \left(\zeta^2 + 1\right)^7}, \quad (20)$$

где $\kappa = 2 \cdot a \cdot \Psi_1 / (\mu_0\mu)$. Достаточным условием минимума потенциальной энергии в точке равновесия является положительная определенность матрицы:

$$H_{ij} = \partial^2 \overline{V} / \partial x^i \partial x^j, \quad (21)$$

где $x_i = \zeta, \delta, \xi, \eta$ при $i = 1..4$. Отличными от нуля оказываются следующие компоненты гессиана $H_{11}, H_{22}, H_{33}, H_{44}$ и $H_{13} = H_{31}$. Согласно критерию Сильвестра условия положительной определенности сводятся к системе неравенств:

$$\begin{cases} H_{11} = \dfrac{3}{8} S_1 \dfrac{\left(4\zeta^2 - 1\right)}{\left(\zeta^2 + 1\right)^5} > 0; \quad H_{22} = \dfrac{3}{4} \dfrac{S_2}{\left(\zeta^2 + 1\right)^5} > 0; \\ H_{44} = \dfrac{1}{4} \dfrac{S_1}{\left(\zeta^2 + 1\right)^3} > 0; \quad H_{11}H_{33} - H_{13}^2 = 6 \cdot \dfrac{S_1^2 S_3}{\left(\zeta^2 + 1\right)^8} > 0. \end{cases} \quad (22)$$

Приведем так же выражение магнитной силы на оси z:

$$F_z = -\frac{3}{4} \frac{(\mu_0\mu)^2}{a^3 L_{11}} \frac{S_1\zeta}{\left(\zeta^2 + 1\right)^4},$$

где $S_1 = \kappa \cdot \left(1 + \zeta^2\right)^{3/2} - 1$, $S_2 = -\kappa \cdot (1 + \zeta^2)^{3/2}\left(4\zeta^2 - 1\right) + 7\zeta^2 - 1$, $S_3 = 5\zeta^2 - 2$.

Из 2-го и 3-го условия (22) следует, что $S_1 > 0$ и $S_2 > 0$, тогда из 4-го следует, что $S_3 > 0$, а первое условие является следствием 3-го и 4-го. Таким образом имеется три независимых условия:

$$S_1 > 0; \; S_2 > 0; \; S_3 > 0. \quad (23)$$

Так как достаточные условия четны по ζ, а необходимое условие нечетно по ξ, то возможен только “подвес”, то есть в равновесии магнит находится под кольцом. Из условий (23) следует, что решение имеется, только для $0 < \kappa \le (15/7)\sqrt{5/7}$, таким образом величины μ и Ψ_1 всегда имеют один знак. Реализация подвеса возможна в широком диапазоне по ξ, где $\sqrt{2/5} < \zeta < \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В.С. Михалевич, В.В. Козорез, В.М. Рашкован "Магнитная потенциальная яма" — эффект стабилизации сверхпроводящих динамических систем, Наукова Думка, Киев, 1991

[2] Rashkovan Vasili M., Zub Stanislav S. "Static Stable Equilibrium in the Systems of the Magnetic Intererection Rings" Braunschweig, 1997, 5p.

[3] Уайт Давид С., Вудсон Герберт Х. Электромеханическое преобразование энергии. М.-Л., 1964, 528с.

[4] Ф.Р. Гантмахер "Лекции по аналитической механике" М., 1960, 296с.

[5] Г. Герц "Принципы механики, изложенные в новой связи" М., 1959, 126с.

[6] А.Н. Матвеев "Электричество и магнетизм" М., 1983, 463с.