УДК 539.12

О СТРУКТУРЕ КВАНТОВОЙ ЛИНЕЙНОЙ ПОЛУГРУППЫ

С.А. Дуплий, А.С. Садовников

Физико-технический факультет, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина

E-mail: Steven.A.Duplij@univer.kharkov.ua. *Internet*: http://www.math.uni-mannheim.de/~duplij

Поступила в редакцию 17 декабря 2003 г.

В работе рассматривается аналог квантовой плоскости с возможностью введения необратимого параметра квантования. Проведено ее простейшее исследование, построена биалгебра, универсально кодействующая на эту квантовую плоскость. Исследован возможный общий вид определяющих соотношений алгебраической структуры и связь его с R-матрицей — универсальным элементом квантового дубля. Проведен простейший анализ полученного общего вида соотношений и возможные пути обобщения стандартных понятий квантовых групп.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: квантовая плоскость, универсальная кодействующая, инверсная полугруппа, регулярность.

Теория квантовых групп появилась при исследовании квантового метода обратной задачи [1] и в настоящее время представляет собой достаточно развитое направление [2, 3, 4] с широкими применениями в различных областях физики и математики таких, например, как точно-решаемые модели статистической физики и квантовое уравнение Янга-Бакстера [5, 6], классификация рациональных конформных теорий поля, теория узлов и группы кос, некоммутативная дифференциальная геометрия [7, 8], алгебры Хопфа и универсальные обертывающие алгебры [9].

Квантовые группы являются обобщениями групп в следующем смысле [10]. Если трактовать группу как замкнутый набор обратимых преобразований, то в квантовой группе не все преобразования имеют обратное. Вместо этого вводится более “слабая структура” — квантовый антипод, который соответствует нелокальному линеаризованному обратному. Кроме того, представления квантовых групп, как и обычных групп, имеют тензорное произведение, на котором, однако, действует не симметрическая группа, а группы кос, т.е. вместо симметрии тензорного произведения предствлений возникает более “слабая” структура — квазисимметрия [10].

Несмотря на то, что обычно квантовые группы отождествляют с соотвествующими алгебрами Хопфа, не все типы алгебр Хопфа возникают в таком контексте, например, возникающие в комбинаторике пертурбативных перенормировок квантовой теории поля и локальных теоремах об индексе в некоммутативной геометрии.

Теория квантовых групп связала воедино все смыслы основного параметра q, который обозначал четыре разных объекта: 1) количество элементов конечного поля, 2) формальный параметр q-рядов, 3) величину $e^{2\pi i\tau}$ в теории модулярных форм, 4) формальный параметр квантования, обычно связанный с деформациями соответствующих алгебр [11]. При этом, области значений параметра q отличаются в различных трактовках: от $q = \pm 1$ до $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Следовательно важным является поиски новых подходов с возможными расширенными значениями q.

Квантовая группа может рассматриваться как "группа автоморфизмов"квантового линейного пространства [12, 13, 14]. При этом "группу автоморфизмов"называют квантовой линейной группой, которая обладает свойствами универсальной кодействующей. В хорошо известном примере квантовой плоскости изучались их универсальные кодействующие для $q = \pm 1$, $q = 1^{\frac{1}{n}}$, $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. При этом свойства этих алгебр существенно отличаются между собой. При рассмотрении квантовой линейной супергруппы [15, 16, 17] в теории естественно возникают нильпотенты и делители нуля. Поэтому логичным является допущение о возможном расширении области значений параметра q. Таким образом, изучение аналога квантовой плоскости с необратимым параметром квантования может привести к новым биалгебрам и общим подходам.

Основная задача данной работы — построение аналога квантовой линейной группы с необратимым параметром q, которую мы называем квантовой полугруппой. Ранее рассматривались обобщения алгебр Хопфа [18, 19] в некоторых направлениях: построение face-алгебр [20, 21], слабые алгебры Хопфа [22, 23, 24], ослабление требования биективности антипода [25, 26, 27, 28] и квантовые группоиды [29].

В данной работе подход Манина [12, 13] применяется к построению квантовой плоскости с необратимым параметром деформации, находится также биалгебра, построеная из принципа универсального кодействия . Таким образом, делается попытка нахождения новой алгебраической структуры, которая могла бы сыграть свою роль во многих областях применимости квантовых групп.

СТАНДАРТНОЕ КВАНТОВАНИЕ $M(2)$

Рассмотрим построение квантовой плоскости в категорном подходе [13]. Определим категорию квантовых пространств как категорию, двойственную категории пар $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{A}_1)$ где $\mathcal{A}$ – k-алгебра, $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$ конечномерное подпространство, порождающее $\mathcal{A}$. Морфизм $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_1) \longrightarrow (\mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$ является морфизмом k-алгебр $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$

таким, что $f(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{B}_1$. Тогда алгебру $\mathcal{A}$ будем называть алгеброй координатных функций на квантовой плоскости, а подпространство $\mathcal{A}_1$— пространство коммутационных соотношений представленных ядром канонического отображения $T(\mathcal{A}_1) \longrightarrow \mathcal{A}$, где $T(\mathcal{A}_1)$ — тензорная алгебра подпространства $\mathcal{A}_1$.

Действием квантовой группы, представленной алгеброй Хопфа H “функций на квантовой группе” [30], на квантовой плоскости $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_1)$ назовем структуру H-комодуля на $\mathcal{A}$ такое, что отображение кодействия $\delta : \mathcal{A} \longrightarrow H \otimes \mathcal{A}$ является морфизмом алгебр и $\delta(\mathcal{A}_1) \subseteq H \otimes \mathcal{A}_1$. Для любой квантовой плоскости $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \mathcal{A}_1)$, существует универсальная кодействующая квантовой группы G на $\mathcal{A}$, представленная кодействием $\delta : \mathcal{A} \longrightarrow G \otimes \mathcal{A}$ таким, что для любого кодействия $\delta' : \mathcal{A} \longrightarrow H \otimes \mathcal{A}$ с $\delta'(\mathcal{A}_1) \subseteq H \otimes \mathcal{A}_1$, существует морфизм алгебр Хопфа $\gamma : H \longrightarrow G$ такой что $\delta = (\gamma \otimes id) \circ \delta'$. Квантовую группу G кодействующую на квантовой плоскоси $\mathcal{A}$ и обладающую свойством универсальности называют квантовой линейной группой $GL(\mathcal{A})$.

Соотношения коммутативности квадратичны и следовательно классическая плоскость — квадратичная алгебра. Поэтому прямое обобщение коммутативности приводит также к квадратичным алгебрам, которые хорошо изучены [12, 13, 11]. Стандартное квантование $M(2)$ строится как универсальная кодействующая над квантовыми плоскостями [13]

$$\begin{aligned} A(x,y) &= k(x,y)/(xy - qyx), \\ B(\xi,\eta) &= k(\xi,\eta)/(\xi\eta - q^{-1}\eta\xi), \end{aligned} \tag{1}$$

где кодействие определяется стандартным образом с образующими T^i_j, $i,j = 1,2$ алгебры $M(2)$

$$\begin{aligned} \delta(x) &\to T \otimes x, \;\; \delta^*(\xi) \to T^* \otimes \xi, \\ \delta(x^i) &= \sum T^i_j \otimes x^j, \;\; \delta^*(\xi_i) = \sum T^j_i \otimes \xi_j. \end{aligned} \tag{2}$$

Именно при определении кодействия алгебры на две квантовые плоскости получается, что при $q = 1$ имеем $M(A,B) \cong k(\mathrm{Mat}(n))$. То есть $M_q(2) \cong k(a,b,c,d)/(I \bullet I^{\perp})$, где I и $I^{\perp}$ — идеалы пророжденные соответственно квадратичными соотношениями универсальной кодействующей на A и B.

В [1] был предложен метод квантования алгебры $M(2)$ исходя из общих конструкций квантового дубля. В конкретной реализации этого подхода порождающие соотношения

$$ac = qca, ab = qba, cd = qdc, bd = qdb, ad - da = (q - q^{-1})bc, bc = cb \tag{3}$$

алгебраической структуры, возможно записать используя R-матрицу: $R(T \otimes T) = (T \otimes T)R$ или $RT_1T_2 = T_2T_1R$, где индекс при T означает номер индекса в R при свертке: $R^{ij}_{kl}T^k_mT^l_n = T^j_lT^i_kR^{kl}_{mn}$. Матрица R имеет хорошо известный вид [14, 10, 3]

$$R^{ij}_{kl} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \tag{4}$$

и удовлетворяет квантовому уравнению Янга-Бакстера

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \tag{5}$$

Более общим подходом есть R-матричные алгебры [11], в которых алгебраическая структура определяестя также, а структуру биалгебры определяют стандартным образом: коумножение $\Delta\left(T^i_j\right) = \sum T^i_k \otimes T^k_j$, $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ и коеденица $\epsilon\left(T^i_j\right) = \delta^i_j$. Коумножение и коединица тривиальны на определяющем соотношении

$$\begin{aligned} &\Delta(R(T\otimes T) - (T\otimes T)R) = R(T\otimes T)\otimes(T\otimes T) - (T\otimes T)\otimes(T\otimes T)R = \\ &\quad R(T\otimes T)\otimes(T\otimes T) - (T\otimes T)R\otimes(T\otimes T) + (T\otimes T)\otimes R(T\otimes T) - (T\otimes T)\otimes(T\otimes T)R = \\ &\qquad (R(T\otimes T) - (T\otimes T)R)\otimes(T\otimes T) - (T\otimes T)\otimes(R(T\otimes T) - (T\otimes T)R) = 0 \end{aligned}$$

$$\epsilon(R(T\otimes T) - (T\otimes T)R) = R(E\otimes E) - (E\otimes E)R \tag{6}$$

Имеется весьма протой способ построить серию комодулей над биалгеброй M_R. Для многочлена $f(t) \in k[t]$ положим $A_f = k\langle x_1, x_2\rangle / (f(R)\, x \otimes x)$, а кодействие $\delta_f : A_f \longrightarrow M_R \otimes A_f$ определим стандартым образом формулой $\delta_f(x) = T \otimes x$. Тогда

$$\delta(f(R)\, x\otimes x) = f(R)\, T\otimes T\otimes x\otimes x = (f(R)\, T\otimes T - T\otimes T f(R))\otimes x\otimes x + T\otimes T\otimes(f(R)\, x\otimes x) = 0 \tag{7}$$

Однако запас таких комодулей невелик: комодуль A_f нетривиален, если f является делителем минимального многочлена матрицы R. В стандартном случае квантовые плоскости определяются: $(R-q)\,x\otimes x=0, \left(R-q^{-1}\right)\xi\otimes\xi=0$ [11].

Центр алгебры $M_q(2)$ порождается единицей и элементом $\det_q(T)=\sum(-q)^{l(\sigma)}T^1_{\sigma_1}T^2_{\sigma_2}$, который обладает групповым свойством: $\Delta\left(\det_q(T)\right)=\det_q(T)\otimes\det_q(T)$.

КВАНТОВЫЙ ДУБЛЬ

Пусть H – алгебра Хопфа, H^* — двойственное пространство к H, канонически наделенное структурой алгебры Хопфа, а H^0 – алгебра Хопфа H^* с противоположным коумножением. Как показано в [9] с алгеброй H канонически ассоциируется алгебра Хопфа $\mathcal{D}(H)$, определяемая следующим образом:

1) как коалгебра $\mathcal{D}(H)=H\otimes H^0$;

2) алгебры H и H^0 вложены как подалгебры Хопфа;

3) Для любого $a\in\mathcal{D}(H)$ справедливо равенство

$$\mathcal{R}\Delta(a)=(\sigma\circ\Delta)(a)\mathcal{R}, \tag{8}$$

где Δ–коумножение в $\mathcal{D}(H)$, σ– оператор перестановки в $\mathcal{D}(H)\otimes\mathcal{D}(H):\sigma(a\otimes b)=b\otimes a,\ a,b\in\mathcal{D}(H)$, а $\mathcal{R}$–образ канонического элемента в $H\otimes H^0$ при вложении $H\otimes H^0\hookrightarrow\mathcal{D}(H)\otimes\mathcal{D}(H)$. Именно пусть $\{e_s\}_{s\in J}$ –линейный базис алгебры H, $\{e^s\}_{s\in J}$ – базис в H^*, двойственный к $\{e_s\}_{s\in J}$, а $\hat{e}_s$ и $\hat{e}^s$–образы элементов e_s и e^s при вложении $H,H^0\hookrightarrow\mathcal{D}(H)$. в этих обозначениях

$$\mathcal{R}=\sum_{s\in J}\hat{e}_s\otimes\hat{e}^s. \tag{9}$$

Смысл этого условия состоит в том, что оно характеризует операцию произведения для вложеных в $\mathcal{D}(H)$ подалгебр Хопфа H и H^0. Тогда алгебра Хопфа $\mathcal{D}(H)$ называется квантовым дублем алгебры H.

Из определения квантового дубля непосредственно следует, что [9]

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes id)(\mathcal{R}) &= \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23},(id\otimes\Delta)(\mathcal{R})=\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12},\\ (S\otimes id)\,(\mathcal{R}) &= \left(id\otimes S^{-1}\right)(\mathcal{R})=\mathcal{R}^{-1},\end{aligned} \tag{10}$$

где S– антипод в алгебре $\mathcal{D}(H)$, а

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{13} &= \sum_{s\in J}\hat{e}_s\otimes 1\otimes\hat{e}^s,\mathcal{R}_{23}=\sum_{s\in J}1\otimes\hat{e}_s\otimes\hat{e}^s,\mathcal{R}_{12}=\sum_{s\in J}\hat{e}_s\otimes\hat{e}^s\otimes 1,\\ \mathcal{R}_{13},\mathcal{R}_{23},\mathcal{R}_{12} &\in \mathcal{D}(H)\otimes\mathcal{D}(H)\otimes\mathcal{D}(H).\end{aligned} \tag{11}$$

Из условий (10) следует, что $\mathcal{R}$ удовлетворяет уравнению Янга-Бактера

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}=\mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12},\mathcal{R}\in\mathcal{D}(H)\otimes\mathcal{D}(H). \tag{12}$$

Пусть $\mathcal{D}(H)^*$ двойственное пространство к $\mathcal{D}(H)$, наделенное структурой алгебры Хопфа с коумножением Δ^* и антиподом S^*. Пусть $\{f^s_t\}_{s,t\in J}$– линейный базис в $\mathcal{D}(H)^*$, двойственный базису $\{\hat{e}_s\hat{e}^t\}_{s,t\in J}$ в $\mathcal{D}(H)$.

Для элемента $\mathcal{F}=\sum_{s,t\in J}\hat{e}_s\hat{e}^t\otimes f^s_t\in\mathcal{D}(H)\otimes\mathcal{D}(H)^*$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes id)\mathcal{F} &= \mathcal{F}_{13}\mathcal{F}_{23}\in\mathcal{D}(H)\otimes\mathcal{D}(H)\otimes\mathcal{D}(H)^*,\\ (id\otimes\Delta^*)\mathcal{F} &= \mathcal{F}_{12}\mathcal{F}_{13}\in\mathcal{D}(H)\otimes\mathcal{D}(H)^*\otimes\mathcal{D}(H)^*,\\ (S\otimes id)\,\mathcal{F} &= (id\otimes S^*)\,\mathcal{F},\\ \mathcal{R}_{12}\mathcal{F}_{13}\mathcal{F}_{23} &= \mathcal{F}_{23}\mathcal{F}_{13}\mathcal{R}_{12}.\end{aligned} \tag{13}$$

Пусть F— ассоциативная алгебра с базисом $f^s_t, s,t\in I$ и соотношениями

$$\mathcal{R}_{12}\tilde{\mathcal{F}}_{13}\tilde{\mathcal{F}}_{23}=\tilde{\mathcal{F}}_{23}\tilde{\mathcal{F}}_{13}\mathcal{R}_{12}, \tag{14}$$

где $\tilde{\mathcal{F}}=\sum_{s,t\in J}\hat{e}_s\hat{e}^t\otimes f^s_t\in\mathcal{D}(H)\otimes F$. Тогда формулы

$$\begin{aligned}(id\otimes\Delta_F)\,\tilde{\mathcal{F}} &= \tilde{\mathcal{F}}_{12}\tilde{\mathcal{F}}_{13}\in\mathcal{D}(H)\otimes\mathcal{F}\otimes\mathcal{F},\\ (id\otimes S_F)\,\tilde{\mathcal{F}} &= (S\otimes id)\,\tilde{\mathcal{F}}\end{aligned} \tag{15}$$

задают на F структуру алгебры Хопфа с коумножением Δ_F и антиподом S_F. Соответствие $f^s_t\longrightarrow\tilde{f}^s_t$ устанавливает изоморфизм алгебр Хопфа $\mathcal{D}(H)^*$ и F.

Как видно из определения квантового дубля, такие понятия, как квазикоммутативность, квазитреугольность естественны. Формулы (15) и (14) реализуют в общей ситуации определение коумножения и RTT уравнения .

КВАНТОВАЯ ПЛОСКОСТЬ С НЕОБРАТИМЫМ ПАРАМЕТРОМ КВАНТОВАНИЯ

Для построения квантовой плоскости с необратимым параметром квантования квадратичных соотношений:

$$\begin{aligned} xy &= qyx, \\ \tilde{q}xy &= yx, \end{aligned} \tag{16}$$

порождающих идеал недостаточно, так как подстановкой одного соотношения из (16) в другое получаются выражения $xy = q\tilde{q}xy$, $yx = \tilde{q}qyx$, из которых вместе с регулярностью q и $\tilde{q}$

$$\begin{aligned} q\tilde{q}q &= q, \\ \tilde{q}q\tilde{q} &= \tilde{q}, \end{aligned} \tag{17}$$

видно, что $q\tilde{q}$ и $\tilde{q}q$ есть единица для элементов вида $\{x^i y^j,\ ij \neq 0\}$ в свободном модуле, порожденном свободными образующими x и y ($q, \tilde{q} \in Q$ - регулярная ассоциативная алгебра). Необратимость алгебры Q будет проявляться только на степенях элементов либо x, либо y, что не несет ничего особенно нового. Поэтому простейшим обобщением совместимым с квадратичным является кубическое такого вида

$$\begin{aligned} x(xy - q_1yx) &= 0, \\ (yx - \tilde{q}_1xy)x &= 0, \\ (xy - q_2yx)y &= 0, \\ y(yx - \tilde{q}_2xy) &= 0, \end{aligned} \tag{18}$$

вместе с условием регулярности для q и $\tilde{q}$:

$$q_i\tilde{q}_iq_i = q_i,\ \ \tilde{q}_iq_i\tilde{q}_i = \tilde{q}_i,\ \ i = 1, 2. \tag{19}$$

Тогда квантовой плоскостью с необратимым параметром квантования назовем $A(x, y) = Q(x, y)/I$, где I — идеал, порожденный соотношениями (18).

Соотношения для параметров квантования можно получить, используя (18) двумя различными способами для x^2y^2 и y^2x^2

$$\begin{aligned} q_1xyxy &= q_2xyxy, \\ \tilde{q}_1yxyx &= \tilde{q}_2yxyx. \end{aligned} \tag{20}$$

Домножая в (18) первые два на x соответственно справа и слева, а вторые две на y соответственно слева и справа, и подставляя одно в другое, получим соотношения на идемпотенты $q_i\tilde{q}_i$ и $\tilde{q}_iq_i$:

$$\begin{aligned} xxyx &= q_1\tilde{q}_1xxyx, \\ xyxx &= \tilde{q}_1q_1xyxx, \\ yyxy &= \tilde{q}_2q_2yyxy, \\ yxyy &= q_2\tilde{q}_2yxyy. \end{aligned} \tag{21}$$

В отличие от классической квантовой плоскости, здесь условия на идемпотенты появляются для однородных элементов уже четвертой степени.

При $q = 1$ алгебра A естественно градуирована и каждая компонента градуировки степени выше второй коммутативна. В классическом случае вся алгебра коммутативна. В этом проявляется некий предел некоммутативности алгебры: при квантовании коммутативность ослабляется и в конце концов "исчезает"в членах однородности два. Таким образом, универсальная кодействующая такой алгебры уже не будет классической даже при $q = 1$.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ КОДЕЙСТВУЮЩАЯ: АЛГЕБРА $M_{Q,\tilde{Q}}(2)$

Как в подходе подходя Манина [13], построим универсальную кодействующую для построенного выше комодуля

$$\begin{aligned} \delta(x) &\to T \otimes x,\ \ \delta^*(\xi) \to T^* \otimes \xi, \\ \delta(x^i) &= \sum T^i_j \otimes x^j,\ \ \delta^*(\xi_i) = \sum T^j_i \otimes \xi_j, \end{aligned} \tag{22}$$

для биалгебры H с коумножением

$$\begin{aligned} \Delta T &\to T \otimes T, \\ \Delta(T^i_j) &\to \sum T^i_k \otimes T^k_j. \end{aligned} \tag{23}$$

Алгебра H строится факторизацией свободной алгебры над Q с образующими $[T^i_j] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ по двустороннему идеалу, порожденному соотношениями:

$$\begin{aligned} acc - q_1 aca &= 0, caa - \tilde{q}_1 aca = 0, \\ acc - q_2 cac &= 0, cca - \tilde{q}_2 cac = 0, \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} q_1 aad + \tilde{q}_1 bac + abc - q_1^2 acb - q_1\tilde{q}_1 bca - q_1 ada &= 0, \\ q_1 cab + \tilde{q}_1 daa + cba - \tilde{q}_1^2 bca - \tilde{q}_1 q_1 acb - \tilde{q}_1 ada &= 0, \\ q_1 acd + \tilde{q}_1 bcc + adc - q_2 q_1 cad - q_2\tilde{q}_1 dac - q_2 cbc &= 0, \\ q_1 ccb + \tilde{q}_1 dca + cda - \tilde{q}_2 q_1 cad - \tilde{q}_2\tilde{q}_1 dac - \tilde{q}_2 cbc &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 abd + \tilde{q}_2 bbc + bad - q_1 q_2 adb - q_1\tilde{q}_2 bda - q_1 bcb &= 0, \\ q_2 cbb + \tilde{q}_2 dba + dab - \tilde{q}_1 q_2 adb - \tilde{q}_1\tilde{q}_2 bda - \tilde{q}_1 bcb &= 0, \\ q_2 add + \tilde{q}_2 bdc + bcd - q_2^2 cbd - q_2\tilde{q}_2 dbc - q_2 dad &= 0, \\ q_2 cdb + \tilde{q}_2 dda + dcb - \tilde{q}_2 q_2 cbd - \tilde{q}_2\tilde{q}_2 dbc - \tilde{q}_2 dad &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} bbd - q_1 bdb &= 0, dbb - \tilde{q}_1 bdb = 0, \\ bdd - q_2 dbd &= 0, ddb - \tilde{q}_2 dbd = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} aab - p_1 aba &= 0, baa - \tilde{p}_1 aba = 0, \\ aab - p_2 bab &= 0, bba - \tilde{p}_2 bab = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 aad + \tilde{p}_1 cab + acb - p_1^2 abc - p_1\tilde{p}_2 cba - p_1 ada &= 0, \\ p_1 bac + \tilde{p}_1 daa + bca - \tilde{p}_1^2 cba - \tilde{p}_1 p_1 abc - \tilde{p}_1 ada &= 0, \\ p_1 abd + \tilde{p}_1 cbb + adb - p_2 p_1 bad - p_2\tilde{p}_1 dab - p_2 bcb &= 0, \\ p_1 bbc + \tilde{p}_1 dba + bda - \tilde{p}_2 p_1 bad - \tilde{p}_2\tilde{p}_1 dab - \tilde{p}_2 bcb &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 acd + \tilde{p}_2 ccb + cad - p_1 p_2 adc - p_1\tilde{p}_2 cda - p_1 cbc &= 0, \\ p_2 bcc + \tilde{p}_2 dca + dac - \tilde{p}_1 p_2 adc - \tilde{p}_1\tilde{p}_2 cda - \tilde{p}_1 cbc &= 0, \\ p_2 add + \tilde{p}_2 cdb + cbd - p_2^2 bcd - p_2\tilde{p}_2 dcb - p_2 dad &= 0, \\ p_2 bdc + \tilde{p}_2 dda + dbc - \tilde{p}_2 p_2 bcd - \tilde{p}_2^2 dcb - \tilde{p}_2 dad &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ccd - p_1 cdc &= 0, dcc - \tilde{p}_1 cdc = 0, \\ cdd - p_2 dcd &= 0, ddc - \tilde{p}_2 dcd = 0, \end{aligned}$$

получаемым из условия сохранения соотношений (18).

R-ТОЧКИ АЛГЕБРЫ $M_{Q,\tilde{Q}}(2)$

Подобно процедуре, описанной в [3] R-точкой алгебры $M_{q,\tilde{q}}(2)$ назовем четверку (A, B, C, D) из алгебры R удовлетворяющей уравнениям (24). Непосредственно из определения $M_{q,\tilde{q}}(2)$ следует, что R-точки $M_{q,\tilde{q}}(2)$ находятся во взаимно однозначном соответствии в элементами множества $\mathrm{Hom}_{Alg}(M_{q,\tilde{q}}(2), R)$ гомоморфизмов из алгебры $M_{q,\tilde{q}}(2)$ в R.

Четверка $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ элементов алгебры R является R-точкой алгебры $M_{q,\tilde{q}}(2)$, тогда и только тогда, когда следующие пары (X', Y') и (X'', Y'') являются R'-точками квантовой плоскости, где X', Y', X'', Y'' определяются матричными равенствами

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{25}$$

где R' – тензорное произведение алгебр $R' = R \otimes Q_{q,\tilde{q}}[X,Y] = R\{X,Y\}/J_{q,\tilde{q}}$, $J_{q,\tilde{q}}$ — идеал, порожденный соотношениями (18).

Пусть $m = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ и $m' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ — две R-точки алгебры $M_{q,\tilde{q}}(2)$ такие, что элементы A,B,C,D коммутируют с элементами A', B', C', D'. Тогда элемент, определенный произведением матриц $mm' = \begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ является R-точкой алгебры $M_{q,\tilde{q}}(2)$. Действительно, по определению элементы $X, Y \in R'$ коммутируют с остальными переменными A, A' и т.д. Из предыдущего утверждения следует, что пары (X', Y') и (X'', Y'') являются R'-точками квантовой плоскости. Далее, по предположению элементы $A', B', C', D' \in R'$ коммутируют с X'и Y', а элементы A, B, C, D — с X'' и Y''. Второй раз применяя предыдущее утверждение, получаем, что

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A'' & C'' \\ B'' & D'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

есть R'-точки квантовой плоскости. Отсюда mm' – R-точка Алгебры $M_{q,\tilde{q}}(2)$.

СВОЙСТВА ПОРОЖДАЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ $M_{Q,\tilde{Q}}(2)$

Уравнения (24) можно переписать в матричном виде:

$$\begin{gathered} \mathbf{id}\cdot \begin{pmatrix} aac \\ caa \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_1 \\ \tilde{q}_1 \end{pmatrix} aca = 0, \mathbf{id}\cdot \begin{pmatrix} acc \\ cca \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_2 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} cac = 0, \\ \mathbf{id}\cdot \begin{pmatrix} ccd \\ dcc \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ \tilde{p}_1 \end{pmatrix} dcd = 0, \mathbf{id}\cdot \begin{pmatrix} cdd \\ ddc \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_2 \\ \tilde{p}_2 \end{pmatrix} cdc = 0, \\ \mathbf{id}\cdot \begin{pmatrix} aab \\ baa \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ \tilde{p}_1 \end{pmatrix} aba = 0, \mathbf{id}\cdot \begin{pmatrix} abb \\ bba \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_2 \\ \tilde{p}_2 \end{pmatrix} bab = 0, \\ \mathbf{id}\cdot \begin{pmatrix} bbd \\ dbb \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_1 \\ \tilde{q}_1 \end{pmatrix} bdb = 0, \mathbf{id}\cdot \begin{pmatrix} bdd \\ ddb \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} q_2 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} dbd = 0, \end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} A(1,1) \begin{pmatrix} abc \\ acb \\ cba \\ bca \end{pmatrix} - B(1,1) \begin{pmatrix} aad \\ daa \\ bac \\ cab \end{pmatrix} &= Q(1,1)ada, \\ A(1,2) \begin{pmatrix} bad \\ adb \\ dab \\ bda \end{pmatrix} - B(1,2) \begin{pmatrix} abd \\ dba \\ bbc \\ cbb \end{pmatrix} &= Q(1,2)bcb, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(2,1) \begin{pmatrix} adc \\ cad \\ cda \\ dac \end{pmatrix} - B(2,1) \begin{pmatrix} acd \\ dca \\ bcc \\ ccb \end{pmatrix} &= Q(2,1)cbc, \\ A(2,2) \begin{pmatrix} bcd \\ cbd \\ dcb \\ dbc \end{pmatrix} - B(2,2) \begin{pmatrix} add \\ dda \\ bdc \\ cdb \end{pmatrix} &= Q(2,2)dad, \end{aligned}$$

где $\mathbf{id}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, и

$$A(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & -q_i q_j & 0 & -q_i \tilde{q}_j \\ -p_j p_i & 1 & -p_j \tilde{p}_i & 0 \\ 0 & -\tilde{q}_i q_j & 1 & -\tilde{q}_i \tilde{q}_j \\ -\tilde{p}_j p_i & 0 & -\tilde{p}_j \tilde{p}_i & 1 \end{pmatrix}, \ B(i,j) = \begin{pmatrix} -q_j & 0 & -\tilde{q}_j & 0 \\ -p_i & 0 & 0 & -\tilde{p}_i \\ 0 & -\tilde{q}_j & 0 & -q_j \\ 0 & -\tilde{p}_i & -p_i & 0 \end{pmatrix}, \ Q(i,j) = \begin{pmatrix} q_i \\ p_j \\ \tilde{q}_i \\ \tilde{p}_j \end{pmatrix}.$$

Первые четыре уравнения (26) аналогичны уравнениям $ab = qba, ac = qca, bd = qdb, cd = qdc$, а четыре последних уравнениям $ad - da = (q - q^{-1})bc$, $bc = cb$. Следует заметить, что последние два уравнения в подходе Манина и RTT конструкции отличаются, если q — необратимо: из условия сохранения соотношений квантовой плоскости — $q(ad - da) + bc - q^2 cb = 0$, $q(ad - da) + cb - q^2 bc = 0$.

Отметим, что блоки вида

$$\begin{pmatrix} q_i q_j & q_i \tilde{q}_j \\ \tilde{q}_i q_j & \tilde{q}_i \tilde{q}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_i & 0 \\ 0 & \tilde{q}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_j & 0 \\ 0 & \tilde{q}_j \end{pmatrix}$$

необратимы, даже при обратимых q_i и q_j.

Рассмотрим случай, когда q_1, q_2, p_1 и p_2 обратимы и равны. Тогда матрицы последних четырех уравнений (26) будут имень вид

$$\begin{aligned} A(i,j) &= A = \begin{pmatrix} 1 & -q^2 & 0 & -1 \\ -q^2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -q^{-2} \\ -1 & 0 & -q^{-2} & 1 \end{pmatrix}, \\ B(i,j) &= B = \begin{pmatrix} -q & 0 & -q^{-1} & 0 \\ -q & 0 & 0 & -q^{-1} \\ 0 & -q^{-1} & 0 & -q \\ 0 & -q^{-1} & -q & 0 \end{pmatrix}, \\ Q(i,j) &= Q = \begin{pmatrix} q \\ q \\ q^{-1} \\ q^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{27}$$

Собственные числа A и B соответственно:$1, 1, 1 + \left(q^2 + q^{-2}\right), 1 - \left(q^2 + q^{-2}\right)$ и $0, q, -\left(q + q^{-1}\right), -q + q^{-1}$. Как хорошо видно, B необратимо в отличии от A :

$$A^{-1} = \frac{1}{q^4 + 1 + q^{-4}} \begin{pmatrix} q^{-4} & -q^2 & -\left(q^{-2} + q^2\right) & -1 \\ -q^2 & q^{-4} & -1 & -\left(q^{-2} + q^2\right) \\ -\left(q^{-2} + q^2\right) & -1 & q^4 & -q^{-2} \\ -1 & -\left(q^{-2} + q^2\right) & -q^{-2} & q^4 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Система уравнений (26) запишется с матрицами

$$\begin{aligned} A^{-1}B &= \frac{q^2 + 1 + q^{-2}}{q^4 + 1 + q^{-4}} \begin{pmatrix} -q^{-1} + q & q^{-1} & \left(-q^{-1} + q\right) q^{-2} & q \\ -q^{-1} + q & q^{-1} & q & \left(-q^{-1} + q\right) q^{-2} \\ q & q^{-1} - q & q^{-1} & \left(q^{-1} - q\right) q^2 \\ q & q^{-1} - q & \left(q^{-1} - q\right) q^2 & q^{-1} \end{pmatrix}, \\ A^{-1}Q &= -\frac{q^2 + 1 + q^{-2}}{q^4 + 1 + q^{-4}} Q. \end{aligned} \tag{29}$$

Полученная алгебра естественно градуированна. Базис компоненты однородности 3 составляет: *aaa, aad, aba, abd, aca, acd, ada, add, bab, bac, bbb, bbc, bcb, bcc, bdb, bdc, cab, cac, cbb, cbc, ccb, ccc, cdb, cdc, daa, dad, dba, dbd, dca, dcd, dda, ddd*, или в более компактной записи

$$\{T^i_j T^k_l T^m_n | i, j, k, l, m, n = 1, 2, i + j = m + n \bmod 2\}.$$

Обозначим $\mathcal{Z}^{ij}_{mn} = R^{ij}_{kl} T^k_m T^l_n - T^j_l T^i_k R^{kl}_{mn}$, сделаем замену $\tilde{q}_1 \longleftrightarrow \tilde{q}_2$ и опустим формально выражения $\tilde{q}_i q_i$ и $q_i \tilde{q}_i$, считая их равными единице. Такое действие можно предпринять для нахождения общего вида уравнений (26) по аналогии с подходом Манина и RTT уравнением. Тогда уравнения (24) можно записать в виде

$$\begin{gathered}
T^1_1\mathcal{Z}^{12}_{11} = 0, T^2_1\mathcal{Z}^{21}_{11} = 0, T^1_1\mathcal{Z}^{11}_{21} = 0, T^1_2\mathcal{Z}^{11}_{12} = 0,\\
T^1_2\mathcal{Z}^{12}_{22} = 0, T^2_2\mathcal{Z}^{21}_{22} = 0, T^2_1\mathcal{Z}^{22}_{21} = 0, T^2_2\mathcal{Z}^{22}_{12} = 0,\\
T^1_1\mathcal{Z}^{12}_{12}q_1 + T^1_1\mathcal{Z}^{12}_{21} + T^1_2\mathcal{Z}^{12}_{11}\tilde{q}_2 = 0,\\
T^2_1\mathcal{Z}^{21}_{12}q_1 + T^2_1\mathcal{Z}^{21}_{21} + T^2_2\mathcal{Z}^{21}_{11}\tilde{q}_2 = 0,\\
T^1_2\mathcal{Z}^{12}_{21}\tilde{q}_1 + T^1_2\mathcal{Z}^{12}_{12} + T^1_1\mathcal{Z}^{12}_{22}q_2 = 0,\\
T^2_2\mathcal{Z}^{21}_{21}\tilde{q}_1 + T^2_2\mathcal{Z}^{21}_{12} + T^2_1\mathcal{Z}^{21}_{22}q_2 = 0,\\
T^1_1\mathcal{Z}^{21}_{21}p_1 + T^1_1\mathcal{Z}^{12}_{21} + T^2_1\mathcal{Z}^{11}_{21}\tilde{p}_2 = 0,\\
T^1_2\mathcal{Z}^{21}_{12}p_1 + T^1_2\mathcal{Z}^{12}_{12} + T^2_2\mathcal{Z}^{11}_{12}\tilde{p}_2 = 0,\\
T^2_1\mathcal{Z}^{12}_{21}\tilde{p}_1 + T^2_1\mathcal{Z}^{21}_{21} + T^1_1\mathcal{Z}^{22}_{21}p_2 = 0,\\
T^2_2\mathcal{Z}^{12}_{12}\tilde{p}_1 + T^2_2\mathcal{Z}^{21}_{12} + T^1_2\mathcal{Z}^{22}_{12}p_2 = 0,\\
\mathcal{Z}^{21}_{11}T^1_1 = 0, \mathcal{Z}^{12}_{11}T^2_1 = 0, \mathcal{Z}^{21}_{22}T^1_2 = 0, \mathcal{Z}^{12}_{22}T^2_2 = 0,\\
\mathcal{Z}^{11}_{12}T^1_1 = 0, \mathcal{Z}^{11}_{21}T^1_2 = 0, \mathcal{Z}^{22}_{12}T^2_1 = 0, \mathcal{Z}^{22}_{21}T^2_2 = 0,\\
\mathcal{Z}^{21}_{11}T^1_2q_1 + \mathcal{Z}^{21}_{12}T^1_1 + \mathcal{Z}^{21}_{21}T^1_1\tilde{q}_2 = 0,\\
\mathcal{Z}^{12}_{11}T^2_2q_1 + \mathcal{Z}^{12}_{12}T^2_1 + \mathcal{Z}^{12}_{21}T^2_1\tilde{q}_2 = 0,\\
\mathcal{Z}^{21}_{22}T^1_1\tilde{q}_1 + \mathcal{Z}^{21}_{21}T^1_2 + \mathcal{Z}^{21}_{12}T^1_2q_2 = 0,\\
\mathcal{Z}^{12}_{22}T^2_1\tilde{q}_1 + \mathcal{Z}^{12}_{21}T^2_2 + \mathcal{Z}^{12}_{12}T^2_2q_2 = 0,\\
\mathcal{Z}^{11}_{12}T^2_1p_1 + \mathcal{Z}^{21}_{12}T^1_1 + \mathcal{Z}^{12}_{12}T^1_1\tilde{p}_2 = 0,\\
\mathcal{Z}^{11}_{21}T^2_2p_1 + \mathcal{Z}^{21}_{21}T^1_2 + \mathcal{Z}^{12}_{21}T^1_2\tilde{p}_2 = 0,\\
\mathcal{Z}^{22}_{12}T^1_1\tilde{p}_1 + \mathcal{Z}^{12}_{12}T^2_1 + \mathcal{Z}^{21}_{12}T^2_1p_2 = 0,\\
\mathcal{Z}^{22}_{21}T^1_2\tilde{p}_1 + \mathcal{Z}^{12}_{21}T^2_2 + \mathcal{Z}^{21}_{21}T^2_2p_2 = 0,
\end{gathered} \tag{30}$$

что можно представить в виде

$$\begin{aligned}
T \circledcirc \mathcal{Z} &= 0,\\
\mathcal{Z} \odot T &= 0,
\end{aligned} \tag{31}$$

где $\odot$ и $\circledcirc$ – абстрактные операции, определенные в (30).

Полученные соотношения однородны, поэтому полученная биалгебра естественно градуирована Z, в которой образующие имеют степень однородности единица.

Такая запись аналогична RTT в смысле множества антисимметричных перестановок групп соответственно S_3 и S_2. То есть, множеству антисимметричных перестановок соответствует множество уравнений: в классическом случае нечетная перестановка всего одна, в случае S_3 – таких три, две из который алгебраически независимы. Поэтому уравнений два - по числу независимых перестановок.

Уравнение RTT возникает из общей ситуации квантового дубля, описанной в [9], то есть FRT-конструкции [1]. В нашем же случае построение подобной теории приводит к необходимости обобщения общих алгебраических понятий таких, как дуальность, которая широко применяется в категорном подходе, а также тензорного произведения.

ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе предложен аналог квантовой плоскости с возможностью введения необратимого параметра квантования и проведено его исследование, построена биалгебра, универсально кодействующая на такую квантовую плоскость. Исследован возможный общий вид определяющих соотношений алгебраической структуры и связь его с R-матрицей — универсальным элементом квантового дубля. Проведен анализ полученного общего вида соотношений и возможные пути обобщения некоторых стандартных понятий квантовых групп.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Faddeev L. D., Reshetikhin N. Y., Takhtajan L. A. // *Quantum Lie groups and Lie algebras*. Leningrad Math. J. - 1990. - V. **1**. - P. 193–236.
2. Chari V., Pressley A. *A Guide to Quantum Groups*. - Cambridge: *Cambridge University Press*, 1996.
3. Kassel C. *Quantum Groups*. - New York: *Springer-Verlag*, 1995. - 531 p.
4. Shnider S., Sternberg S. *Quantum Groups*. - Boston: *International Press*, 1993. - 371 p.
5. Lambe L. A., Radford D. E. *Introduction to the Quantum Yang-Baxter Equation and Quantum Groups: An Algebraic Approach*. - Dordrecht: *Kluwer*, 1997. - 292 p.
6. Бухштабер В. М. // *Преобразования Янга-Бакстера*. Успехи мат. наук. - 1998. - Т. **53**. - № 6. - С. 1343–1379.
7. Woronowicz S. L. // *Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups)*. Comm. Math. Phys. - 1989. - V. **122**. - P. 125–170.
8. Madore J. *Introduction to Noncommutative Geometry and its Applications*. - Cambridge: *Cambridge University Press*, 1995.
9. Drinfeld V. G. // *Quantum groups*. Proceedings of the ICM, Berkeley. - Phode Island. *AMS*, 1987. - P. 798–820.
10. Majid S. *Foundations of Quantum Group Theory*. - Cambridge: *Cambridge University Press*, 1995.
11. Демидов Е. Е. *Квантовые группы*. - М.: *Факториал*, 1998. - 146 с.
12. Manin Y. // *Multiparametric quantum deformation of the general linear supergroup*. Comm. Math. Phys. - 1989. - V. **123**. - P. 123–135.
13. Manin Y. I. *Topics in Noncommutative Differential Geometry*. - Princeton: *Princeton University Press*, 1991.
14. Schirmacher A., Wess J., Zumino B. // *The two parameter deformation of $GL(2)$ its differential calculus, and Lie algebra*. Z. Phys. - 1991. - V. **49**. - P. 317–321.
15. Zhang R. B., Gould M. D. // *Universal r-matrices and invariants of quantum supergroups*. J. Math. Phys. - 1991. - V. **32**. - № 12. - P. 3261–3267.
16. Chang D., Phillips I., Rozansky I. // *r-matrix approach to quantum superalgebras $su_q(m|n)$*. J. Math. Phys. - 1992. - V. **33**. - № 11. - P. 3710–3715.
17. Duplij S., Sadovnikov A. // *Quantum general linear supergroup*. Concise Encyclopedia of Supersymmetry. - Dordrecht. *Kluwer Academic Publishers*, 2003. - P. 317.
18. Abe E. *Hopf Algebras*. - Cambridge: *Cambridge Univ. Press*, 1980. - 221 p.
19. Sweedler M. E. *Hopf Algebras*. - New York: *Benjamin*, 1969. - 336 p.
20. Hayashi T. // *An algebra related to the fusion rules of Wess-Zumino-Witten models*. Lett. Math. Phys. - 1991. - V. **22**. - P. 291–296.
21. Hayashi T. // *Face algebras and unitarity of $SU(N)_L - TQFT$* . Commun. Math. Phys. - 1999. - V. **203**. - № 1. - P. 211–247.
22. Duplij S., Li F. // *On regular solutions of quantum Yang-Baxter equation and weak Hopf algebras*. Journal of Kharkov National University, ser. Nuclei, Particles and Fields. - 2001. - V. **521**. - № 2(14). - P. 15–30.
23. Li F., Duplij S. // *Weak Hopf algebras and singular solutions of quantum Yang-Baxter equation*. Commun. Math. Phys. - 2002. - V. **225**. - № 1. - P. 191–217.
24. Duplij S., Li F. // *Regular solutions of quantum Yang-Baxter equation from weak Hopf algebras*. Czech. J. Phys. - 2001. - V. **51**. - № 12. - P. 1306–1311.
25. Nichols W. D., Taft E. J. *The Left Antipodes of a Left Hopf Algebra*. Contemp. Math. 13 - Providence: *Amer. Math . Soc.*, 1982.
26. Green J. A., Nicols W. D., Taft E. J. // *Left Hopf algebras*. J. Algebra. - 1980. - V. **65**. - P. 399–411.
27. Böhm G., Nill F., Szlachányi K. // *Weak Hopf algebras* **I**. *Integral theory and C^*-structure*. J. Algebra. - 1999. - V. **221**. - P. 385–438.
28. Böhm G., Szlachányi K. // *A coassociative C^*-quantum group with nonintegral dimensions*. Lett. Math. Phys. - 1996. - V. **35**. - P. 437–456.
29. Nikshych D., Vainerman L. // *Finite quantum groupoids and their applications*. - Los Angeles, 2000. - 44 p. (*Preprint* / *Univ. California*, `math.QA/0006057`).
30. Kogorodski L. I., Soibelman Y. S. *Algebras of Functions on Quantum Groups*. - Providence: *AMS*, 1998.

ON THE STRUCTURE OF QUANTUM LINEAR SEMIGROUP

S.A. Duplij, A.S. Sadovnikov

Department of Physics and Technology, V.N. Karazin Kharkov National University, Kharkov 61077, Ukraine

An analog of quantum plane with noninvertible parameter of quantization is considered. Its preliminary investigation is carried out, the corresponding bialgebra coacting universally is constructed. A general form of the determining relations for the obtained algebraic structure is given. Connection with R-matrix, universal element of the quantum double is found. The obtained solution is analyzed, and possible generalizations of standard notions of quantum groups is outlined.

KEY WORDS: quantum plane, universal coaction, inverse semigroup, regularity