

## ВРЕМЕННАЯ ЭВОЛЮЦИЯ НЕСОБСТВЕННЫХ АЛЬФВЕНОВСКИХ ВОЛН В ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ ПЛАЗМЫ

**Н.А. Азаренков, В.В. Михайленко**

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина*

*61077, г. Харьков, пл. Свободы, 4*

Поступила в редакцию 8 августа 2003 г.

Изучается временная эволюция несобственных альфвеновских волн, возбужденных под воздействием гармонического возмущения, приложенного к границе полубесконечного сдвигового течения плазмы. Показано, что с ростом времени несобственное гармоническое возмущение в результате взаимодействия с немодальными альфвеновскими волнами и сдвиговым течением изменяет свою начальную модальную структуру и становится немодальным с изменяющейся во времени амплитудой.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** плазма, сдвиговые течения, несобственная альфвеновская волна.

В последнее десятилетие значительно усилился интерес к исследованию явлений, происходящих в неоднородных (поперек направления распространения) течениях плазмы. Такие течения, называемые сдвиговыми течениями, обнаружены на краю плазмы в токамаках в режимах улучшенного удержания плазмы. Возникновение таких течений приводит к подавлению низкочастотной турбулентности плазмы, формированию транспортных барьеров, значительному увеличению времени жизни плазмы [1]. Спутниковые наблюдения ионосферы и магнитосферы также указывают на наличие сдвиговых течений плазмы, направленных как вдоль, так и поперек магнитного поля [2]. Данные, полученные со спутников, указывают на связь сдвиговых течений с развитием или подавлением различных низко- и высокочастотных неустойчивостей и турбулентным нагревом ионов и электронов ионосферной и магнитосферной плазмы. Теоретическое исследование устойчивости сдвиговых течений плазмы основывается, как правило, на традиционном спектральном разложении по времени переменных физических величин описывающих такие течения (например, возмущений электростатического и (или) магнитного потенциалов, возмущений плотности, температуры или давления компонентов плазмы) и последующем анализе собственных значений и собственных функций соответствующих дифференциальных операторов, описывающих пространственную структуру этих величин. Это так называемый модальный подход. В плоской модели плазмы со сдвиговой скоростью  $\mathbf{v}_0(x) = v_0(x)\mathbf{e}_y$ , направленной вдоль оси  $y$  и неоднородной по координате  $x$ , решения, например для возмущения электростатического потенциала  $\phi(\mathbf{r}, t)$ , ищутся в виде  $\phi(\mathbf{r}, t) = \phi(x) \exp(iky - i\omega t)$ . Однако дифференциальные операторы по переменной  $x$  в образующемся дифференциальном уравнении для структурной функции  $\phi(x)$  в случае сдвиговых течений плазмы или жидкости оказываются несамосопряженными; их собственные функции оказываются не ортогональными [3]. Вследствие этого описание временной эволюции произвольного начального возмущения не может быть основано на анализе эволюции отдельно взятой спектральной гармоники. Вследствие не ортогональности собственных функций гармоники испытывают сильную интерференцию, и результат этой интерференции может быть отличным от предсказаний, основанном на анализе только собственных значений дифференциальных операторов. Другой подход состоит в решении начальной задачи на основе преобразования Лапласа [4]. Обратное интегральное преобразование Лапласа, которое формально решает начальную задачу, можно вычислить аналитически только для асимптотически больших времен. Однако даже эти асимптотические результаты (см., например [4]) указывают на возникновение зависимостей от времени у возмущений, отличных от модальной зависимости вида  $\exp(-i\omega t)$ . Вместо этого возникают степенные зависимости возмущений от времени, а также зависимости вида  $\exp(ik_y v_0(x) t)$ , отсутствующие в модальном подходе. Эти асимптотические результаты могут быть практически бесполезными при сравнительном анализе важности модальных, немодальных и нелинейных процессов во временной эволюции возмущений в сдвиговом течении плазмы, поскольку все переходные процессы, происходящие в некоторые конечные интервалы времени при этом подходе оказываются недоступными для аналитического исследования. С другой стороны, результаты линейной теории, полученные для асимптотически больших времен, могут оказаться физически бессмысленными, поскольку значительно ранее могут оказаться более важными нелинейные эффекты. Поэтому и этот подход оказывается практически бесполезным для анализа эволюции возмущений в сдвиговом течении на конечных интервалах времени.

Еще в 1887 году Лордом Кельвином был предложен иной подход [5] в исследовании сдвиговых течений

жидкости. Этот подход состоит в преобразовании независимых пространственных переменных  $x, y$  из лабораторной системы отсчета в систему отсчета, движущуюся со сдвиговым течением и исследовании временной эволюции отдельных пространственных Фурье гармоник возмущений. В работах [6-9] этот подход применен к исследованию устойчивости сдвиговых течений плазмы. В этих работах на основе решения начальной задачи показано, что в плазме со сдвиговым течением элементарное синусоидальное возмущение за время порядка  $t \sim (dv_0(x)/dx)^{-1}$  становится немодалым с зависящими от времени частотой, волновым вектором и амплитудой.

В работе [9] исследована временная эволюция альфвеновских волн в безграничной плазме с однородным сдвиговым течением, для которого  $\mathbf{v}_0(x) = v'_0 x \mathbf{e}_y$  и  $v'_0 = const$ . В этой работе рассмотрена как однородная, так и слабо неоднородная плазма как низкого, так и умеренного давления. Остался, однако, невыясненным вопрос о влиянии реально существующей ограниченности сдвигового течения и влиянии возмущений, приложенных на границе сдвигового течения, на временную эволюцию альфвеновских волн в сдвиговом течении. Решению этой задачи и посвящена настоящая работа. В ней проведено исследование временной эволюции несобственных альфвеновских волн, возникающих под воздействием гармонического возмущения, приложенного на границе полу бесконечного сдвигового течения. Решение этой задачи необходимо для создания новых методов диагностики плазмы, основанных на исследовании особенностей распространения электромагнитных волн в плазме со сдвиговым течением. Как и в случае безграничной плазмы, общепринятый подход, основанный на использовании спектрального преобразования по времени и применения модальных решений, оказывается бесперспективным для решения поставленной проблемы. Применение немодалого подхода работ [6-9] дает возможность решить эту задачу гораздо более простыми методами, развитыми в работе [5] и получить в явном виде соотношения, определяющие временную эволюцию амплитуды и фазы гармонического возмущения, приложенного к границе сдвигового течения.

### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Основными уравнениями в данной работе являются уравнение продольного движения электронов, уравнение квазинейтральности (для плотности тока), уравнения для возмущений давления электронов  $\tilde{p}_e$  и ионов  $\tilde{p}_i$ . В дрейфовом приближении эта система уравнений приводится к следующей системе для параллельного компонента возмущения магнитного потенциала  $\tilde{A}_{\parallel}$ , электростатического потенциала  $\tilde{\phi}$  и для  $\tilde{p}_e$  и  $\tilde{p}_i$  [10]:

$$\frac{d}{dt} \left( \tilde{A}_{\parallel} - \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \nabla_{\perp}^2 \tilde{A}_{\parallel} \right) + v_{de} \frac{\partial \tilde{A}_{\parallel}}{\partial y} = -c \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} + \frac{c}{en_{e0}} \frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial z} + \frac{c}{en_{e0} B_0} \nabla \tilde{A}_{\parallel} \cdot [\mathbf{b}_0 \times \nabla \tilde{p}_e], \quad (1)$$

$$\frac{d\tilde{p}_e}{dt} + en_{e0} v_{de} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} + \frac{c \Gamma T_{e0}}{4\pi e} \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{B_0} [\nabla \tilde{A}_{\parallel} \times \mathbf{b}_0] \cdot \nabla \right) \nabla_{\perp}^2 \tilde{A}_{\parallel} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d\tilde{p}_i}{dt} - en_{i0} v_{di} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\left( \frac{d}{dt} + v_{di} \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla_{\perp}^2 \tilde{\phi} = -\frac{c}{en_{i0} B_0} \nabla_{\perp} \left( [\mathbf{b}_0 \times \nabla \tilde{p}_i] \cdot \nabla \right) \nabla_{\perp} \tilde{\phi} - \nabla_{\perp} (\mathbf{v}_{i\parallel} \cdot \nabla) \nabla_{\perp} \tilde{\phi} - \frac{v_A^2}{c} \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{B_0} [\nabla \tilde{A}_{\parallel} \times \mathbf{b}_0] \cdot \nabla \right) \nabla_{\perp}^2 \tilde{A}_{\parallel}. \quad (4)$$

В уравнениях (1)–(4)  $\omega_{pe}$  – электронная плазменная частота,  $v_A$  – альфвеновская скорость,  $\Gamma = 5/3$  – адиабатическая постоянная,  $v_{de(di)} = \mp c(dP_{e0(i0)}/dx)/en_{e0}B_0$  – скорость электронного (ионного) диамагнитного дрейфа,  $c$  – скорость света,  $e$  – заряд электрона,  $n_{0e}(x)$  – неоднородная вдоль оси  $x$  равновесная плотность электронного компонента плазмы,  $P_{e0(i0)}(x)$  – неоднородное равновесное давление электронов (ионов). Оператор  $d/dt$  в (1)–(4) определен при наличии сдвигового течения поперек магнитному полю

$\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{b}_0$  (направленному вдоль оси  $z$ ), с однородным сдвигом,  $\mathbf{v}_0(x) = v'_0 x \mathbf{e}_y$ , где  $v'_0$  не зависит от  $x$ , в виде

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v'_0 x \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{v}_E \cdot \nabla, \quad (5)$$

и  $\mathbf{v}_E = (c/B_0) [\mathbf{b}_0 \times \nabla \tilde{\phi}]$ . Для однородных сдвиговых течений решение начальной задачи сильно упрощается переходом к конвективным координатам, которые связаны со сдвиговым течением. Такое преобразование определяется соотношениями [5] (см. также [6-9])

$$\tau = t, \quad \xi = x, \quad \eta = y - v'_0 x t, \quad \zeta = z. \quad (6)$$

В новых координатах линеаризованная система уравнений (1)–(4) для безразмерных переменных  $\phi = e\tilde{\phi}/T_e$ ,  $A_{\parallel} = eA_{\parallel}/eT_e$ ,  $p_e = \tilde{p}_e/n_{0e}T_e$ ,  $p_i = \tilde{p}_i/n_{0e}T_e$  принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( A_{\parallel} - \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \nabla_{\perp}^2 A_{\parallel} \right) + v_{de} \frac{\partial A_{\parallel}}{\partial \eta} = -c \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + c \frac{\partial p_e}{\partial \zeta}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial \tau} + v_{de} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \Gamma \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \frac{v_{Te}^2}{c} \frac{\partial}{\partial \zeta} \nabla_{\perp}^2 A_{\parallel} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \tau} - v_{di} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = 0, \quad (9)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} + v_{di} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \nabla_{\perp}^2 \phi = v'_0 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial p_i}{\partial \xi} - v'_0 \tau \frac{\partial p_i}{\partial \eta} \right) - \frac{v_A^2}{c} \frac{\partial}{\partial \zeta} \nabla_{\perp}^2 A_{\parallel}, \quad (10)$$

где оператор  $\nabla_{\perp}^2$  равен

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - v'_0 \tau \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2. \quad (11)$$

В новых переменных пространственная зависимость, связанная со сдвиговым течением, отсутствует. Предполагаем, что неоднородное сдвиговое течение занимает полуплоскость  $x \geq 0$ . Выполним одностороннее преобразование Фурье по  $\xi$  и двустороннее преобразование Фурье по  $\eta$  и  $\zeta$ ,

$$A_{\parallel}(\tau, k_{\perp}, l, k_z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} d\xi A_{\parallel}(\tau, \xi, \eta, \zeta) \exp(-ik_{\perp} \xi - i\eta - ik_z \zeta) \quad (12)$$

и введем безразмерное время  $T = v'_0 \tau - k/l$ . В результате получаем следующую систему уравнений:

$$v'_0 \frac{\partial}{\partial T} \left[ \left( 1 + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} (1 + T^2) \right) A_{\parallel} \right] + ick_z \phi - i \frac{ck_z}{en_{0e}} p_e = -\frac{c^2 v'_0}{\omega_{pe}^2} \frac{\partial a}{\partial T} \quad (13)$$

$$v'_0 \frac{\partial p_e}{\partial T} - \frac{ik_z c \Gamma T_{0e} l^2}{4\pi e} (1 + T^2) A_{\parallel} = ik_z a \quad (14)$$

$$v'_0 l^2 \frac{\partial}{\partial T} \left[ (1 + T^2) \phi \right] + ik_z \frac{v_A^2 l^2}{c} (1 + T^2) A_{\parallel} = \Phi - ik_z \frac{v_A^2}{c} a, \quad (15)$$

в которой положено, что  $p_i = 0$ , а величины  $a$  и  $\Phi$  равны

$$a(\tau, x=0, l, k_z) = A'_x(\tau, x=0, l, k_z) - i(k_{\perp} + 2v'_0 l \tau) A(\tau, x=0, l, k_z), \quad (16)$$

$$\Phi(\tau, x=0, l, k_z) = \phi'_x(\tau, x=0, l, k_z) - i(k_{\perp} + 2v'_0 l \tau) \phi(\tau, x=0, l, k_z). \quad (17)$$

Полученная система уравнений (13) – (15) является базовой для последующего анализа. В следующих разделах мы рассмотрим эту систему для случаев плазмы низкого ( $\beta \ll m_e/m_i$ ) и умеренного ( $m_e/m_i \ll \beta \ll 1$ )

давления отдельно.

### АЛЬФВЕНОВСКИЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ

В случае плазмы низкого давления, для которой  $\beta \ll m_e/m_i$ , можно пренебречь возмущением давления электронов. Тогда система уравнений (13) – (15) приводится к следующей системе уравнений:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{v_A^2}{v_{Te}^2} \rho_s^2 \Delta_{\perp} A_{\parallel} \right) = c \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} (\Delta_{\perp} \phi) = -\frac{v_A^2}{c} \frac{\partial}{\partial z} \Delta_{\perp} A_{\parallel}, \quad (19)$$

Эта система может быть приведена к следующему неоднородному уравнению для возмущения потенциала  $\phi$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial T^2} \left[ (1+T^2) \phi \right] + \frac{k_{\parallel}^2}{(v'_0)^2} \frac{v_{Te}^2}{l^2 \rho_s^2} \phi = \frac{1}{(v'_0 l)^2} \Upsilon(T, l), \quad (20)$$

где функция  $\Upsilon(l, \tau)$  равна

$$\Upsilon(k_{\perp}, l, \tau) = \phi'_x(\tau, x=0, l) - i(k_{\perp} + 2v'_0 l \tau) \phi(\tau, x=0, l). \quad (21)$$

Для решения уравнения (20) оказывается удобным ввести новую переменную  $G(T, l)$ ,

$$(1+T^2) \phi(T, l) = G(T, l), \quad (22)$$

для которой уравнение (20) принимает вид

$$\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} + \mu^2 \frac{G}{1+T^2} = \frac{1}{(v'_0 l)^2} \Upsilon(T, k_{\perp}, l), \quad (23)$$

где  $\mu^2 = k_z^2 v_{Te}^2 / (v'_0)^2 l^2 \rho_s^2$ .

Получим решение уравнения (20) для двух временных интервалов, а именно  $T \ll 1$  и  $T \gg 1$ , для начальных возмущений в виде одной Фурье гармонике с частотой  $\omega = \omega_0$ , с волновым вектором  $l = l_0$  поперек сдвигового течения,

$$\phi(\tau, x=0, l) = \phi_0 \delta(l-l_0) e^{i\omega_0 \tau} \quad \text{и} \quad \phi'_x(\tau, x=0, l) = E_{0x} \delta(l-l_0) e^{i\omega_0 \tau}. \quad (24)$$

Для первого временного интервала  $T \ll 1$  решение для  $\phi(\tau, k_{\perp}, l)$  имеет модальный вид:

$$\begin{aligned} \phi(\tau, k_{\perp}, l_0) = & C_1 \exp \left[ i\mu \left( v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right) \right] + C_2 \exp \left[ -i\mu \left( v'_0 \tau - \frac{k}{l} \right) \right] - \frac{e^{i\omega_0 \tau} \delta(l-l_0)}{l^2 (\omega_0^2 - (\mu v'_0)^2)} \\ & \times \left\{ \omega_0^2 E_{0x} - 4v'_0 l \omega_0 \phi_0 + \omega_0^2 \phi_0 \frac{4l \omega_0 v'_0 + k_{\perp} (\omega_0^2 + (\mu v'_0)^2) - 2k_{\perp} \omega_0^2}{\omega_0^2 - (\mu v'_0)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Для второго временного интервала  $T \gg 1$  решение для  $\phi(\tau, k_{\perp}, l)$  оказывается немодальным,

$$\begin{aligned} \phi(\tau, l_0, k_{\perp}) \simeq & C_1 \left( v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-\frac{3}{2} + i\omega_1} + C_2 \left( v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-\frac{3}{2} - i\omega_1} \\ & - \frac{4}{(v'_0 l)^2} \delta(l-l_0) e^{i\omega_0 \tau} \left( \frac{-\omega_0^2 E_{0x} + 4v'_0 l \omega_0 \phi_0 + i\omega_0^2 k_{\perp} \phi_0}{\left( v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right) (9 + 4\omega_1^2)} - 2il \phi_0 \frac{\omega_0^2}{25 + 4\omega_1^2} \right), \end{aligned} \quad (26)$$

В (26)  $\omega_1 = (\mu^2 - 1/4)^{1/2}$ . В уравнениях (25) и (26) слагаемые, пропорциональные  $C_1$  и  $C_2$ , описывают временную эволюцию начальных возмущений электростатического и магнитного потенциалов и при их отсутствии имеем  $C_1 = C_2 = 0$ . Последние слагаемые в (25) и (26) описывают временную эволюцию гармонического возмущения, приложенного к границе сдвигового течения плазмы. Отметим, что сдвиговое течение приводит к немодальной эволюции как начальных возмущений электростатического и магнитного потенциалов, так и вынужденного возмущения, приложенного на границе  $x = 0$ .

### АЛЬФВЕНОВСКИЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ УМЕРЕННОГО ДАВЛЕНИЯ

В случае плазмы умеренного давления, для которой  $m_e/m_i \ll \beta \ll 1$ , исходной является следующая система:

$$\frac{dA_{\parallel}}{dt} - \frac{d}{dt} \left( \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \Delta_{\perp} A_{\parallel} \right) - v_{de} \frac{\partial A_{\parallel}}{\partial y} = -c \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{c}{en_e} \frac{\partial p_e}{\partial z} - \frac{c}{en_0 B_0} \mathbf{b}_0 \cdot [\nabla A_{\parallel} \times \nabla p_e], \quad (27)$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial t} + en_0 e v_{de} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{c \Gamma_e T_{e0}}{4\pi e} \frac{\partial}{\partial z} \Delta_{\perp} A_{\parallel} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_{\perp} \phi + \frac{v_A^2}{c} \frac{\partial}{\partial z} \Delta_{\perp} A_{\parallel} = 0. \quad (29)$$

Применение преобразования (6) приводит к исключению в уравнениях (27) – (29) пространственной зависимости, связанной со сдвиговым течением. Систему уравнений (27) – (29) удобно привести к неоднородному уравнению третьего порядка, а именно

$$\left\{ v_0' \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left[ \left( 1 + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} (1 + T^2) \right) \left( \frac{i}{k_z l^2 (1 + T^2)} \left[ \frac{c v_0'}{v_A^2} l^2 \frac{\partial}{\partial T} \left[ (1 + T^2) \phi \right] - \frac{c}{v_A^2} \Phi + i k_z a \right] \right) \right] \right. \\ \left. + i c k_z \frac{\partial \phi}{\partial T} + \frac{c v_0'}{\omega_{pe}^2} \frac{\partial^2 a}{\partial T^2} \right\} + i l^2 \rho_s^2 \frac{k_z c}{v_0'} \frac{\partial}{\partial T} \left[ (1 + T^2) \phi \right] - i \rho_s^2 \frac{k_z c}{v_0'} \Phi = 0. \quad (30)$$

Проинтегрировав уравнение (30) по  $T$ , получаем уравнение второго порядка, которое для переменной  $G(T, l)$ , определенной соотношением (22), можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[ \left( \frac{1}{1 + T^2} + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} \right) \frac{\partial G}{\partial T} \right] + S^2 \left( \frac{1}{1 + T^2} + \rho_s^2 l^2 \right) G = M, \quad (31)$$

где введен безразмерный параметр  $S = k_z v_A / v_0'$ . В уравнении (31) величина  $M$  определяется граничными условиями (16)–(17) для скалярного и векторного потенциала и равна

$$M = \frac{1}{v_0' l^2} \frac{\partial}{\partial T} \left[ \left( \frac{1}{1 + T^2} + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} \right) \Phi(x=0, l, k_z, T) \right] \\ - i \frac{S^2}{c k_z l^2} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{a(x=0, l, k_z, T)}{1 + T^2} \right) + \frac{S^2 \rho_s^2 l^2}{l^2} \int \Phi(x=0, l, k_z, T) dT. \quad (32)$$

В отсутствие границы сдвигового течения  $M = 0$ , и решение уравнения (31) для любых значений времени в случае слабого сдвигового течения ( $S \gg 1$ ) имеет вид [9]:

$$G_{1,2}^{(0)}(T) = (1+T^2)^{1/2} (1+l^2\rho_s^2(1+T^2))^{-1/4} \left(1 + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} (1+T^2)\right)^{-1/4} \times \exp \left\{ \pm iS \int_{-\frac{k_{\perp}}{l}}^T dT' (1+l^2\rho_s^2(1+T'^2))^{1/2} \left(1 + \frac{c^2 l^2}{\omega_{pe}^2} (1+T'^2)\right)^{-1/2} \right\}. \quad (33)$$

Интеграл в показателе экспоненты решения (33) вычисляется точно в виде линейной комбинации эллиптических интегралов. Однако оказывается более наглядным вычислить приближенно этот интеграл для различных интервалов времени. Здесь рассматривается случай  $m_e/m_i \ll \beta \ll 1$  при  $l^2\rho_s^2 \ll 1$ . Для него различаются три временных интервала, в которых решение (33) приближенно можно записать в виде

$$G_{1,2}(T) \approx T \exp(\pm iST), \quad 1 < T < \frac{1}{l\rho_s},$$

$$G_{1,2}(T) \approx \sqrt{T} \exp\left(\pm i \frac{ST^2}{2} l\rho_s\right), \quad \frac{1}{l\rho_s} < T < \beta \frac{m_i}{m_e} \frac{1}{l\rho_s},$$

$$G_{1,2}(T) \approx \exp\left(\pm iST \frac{v_{Te}}{v_A}\right), \quad \beta \frac{m_i}{m_e} \frac{1}{l\rho_s} < T. \quad (34)$$

Начальные возмущения выберем в виде одной Фурье гармоники с волновым вектором  $l = l_0$  поперек сдвигового течения и частотой  $\omega = \omega_0$ ,

$$\begin{aligned} \phi(\tau, x=0, l) &= \phi_0 e^{i\omega_0\tau} \delta(l-l_0), & \phi'_x(\tau, x=0, l) &= E_{0x} e^{i\omega_0\tau} \delta(l-l_0), \\ A(\tau, x=0, l) &= A_0 e^{i\omega_0\tau} \delta(l-l_0), & A'_x(\tau, x=0, l) &= B_{0y} e^{i\omega_0\tau} \delta(l-l_0). \end{aligned} \quad (35)$$

Решение уравнения (31) имеет вид:

$$G(l_0, k_z, T) = C_1^{(0)} G_1^{(0)}(T) + C_2^{(0)} G_2^{(0)}(T) + C_1(T) G_1^{(0)}(T) + C_2(T) G_2^{(0)}(T), \quad (36)$$

где функции  $C_1(T)$  и  $C_2(T)$  равны

$$C_{1,2}(T) = \mp \frac{i}{2S} \int dT_1 \frac{Q(T_1, l)}{(1+T_1^2)} \left[ 1 + \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\beta} l^2 \rho_s^2 (1+T_1^2) \right] O(T_1, l) \times \exp \left\{ \mp iS \int^T dT' (1+l^2\rho_s^2(1+T'^2))^{1/2} \left( 1 + \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\beta} l^2 \rho_s^2 (1+T'^2) \right)^{-1/2} \right\}. \quad (37)$$

В соотношении (37) функции  $O(T, l)$  и  $Q(T, l)$  определены следующими соотношениями:

$$O(T, l) = (1+T^2)^{1/2} (1+l^2\rho_s^2(1+T^2))^{-1/4} \left( 1 + \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\beta} l^2 \rho_s^2 (1+T^2) \right)^{-1/4}, \quad (38)$$

$$Q(T, l) = \exp\left(\frac{i\omega_0 k_{\perp}}{v'_0 l} + i \frac{\omega_0}{v'_0} T\right) \left\{ \frac{2T}{(1+T^2)^2} \frac{1}{l^2 v'_0} [-i\omega_0 E_{0x} + 2iv'_0 l \phi_0 - \omega_0 (3k_{\perp} + 2Tl) \phi_0] - \frac{1}{(lv'_0)^2} \left( \frac{1}{1+T^2} + \frac{l^2 \rho_s^2 v_A^2}{v_{Te}^2} \right) [-\omega_0^2 E_{0x} + 4v'_0 \omega_0 l \phi_0 + i\omega_0 (3k_{\perp} + 2Tl) \phi_0] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{S^2}{k_z c l^2} \frac{1}{(1+T^2)^2} \left[ \left( -\omega_0 B_{0y} + i\omega_0 (3k_{\perp} + 2Tl) A_0 + 2v'_0 l A_0 \right) (1+T^2) \right. \\
& \left. - \left( B_{y0} - i(3k_{\perp} + 2Tl) A_0 \right) 2Tv'_0 \right] + S^2 \rho_s^2 \left( E_{x0} - i(3k_{\perp} + 2Tl) \phi_0 \right). \quad (39)
\end{aligned}$$

Решение уравнения (31) также оказывается удобным получить для трех временных интервалов:

$$1 < T < \frac{1}{l\rho_s}, \quad \frac{1}{l\rho_s} < T < \beta \frac{m_i}{m_e} \frac{1}{l\rho_s}, \quad \beta \frac{m_i}{m_e} \frac{1}{l\rho_s} < T.$$

В первом временном интервале,  $1 < T < 1/l\rho_s$ , решения  $\phi(k_{\perp}, l, k_z, \tau)$  и  $A_{\parallel}(k_{\perp}, l, k_z, \tau)$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
\phi(k_{\perp}, l, k_z, \tau) \approx & C_1^{(0)} \frac{1}{\left( v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)} \exp \left( iS \left( v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right) \right) + C_2^{(0)} \frac{1}{\left( v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)} \exp \left( -iS \left( v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right) \right) \\
& - 2il\phi_0 \rho_s^2 e^{i\omega_0 \tau} \delta(l-l_0) + o \left( \left( v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-1} \right), \quad (40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{\parallel} \approx & i \frac{c}{v_A} \frac{1}{S} \left\{ C_1^{(0)} \exp \left( iS \left( v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right) \right) \left[ \left( v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-2} + iS \left( v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-1} \right] \right. \\
& \left. + C_2^{(0)} \exp \left( -iS \left( v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right) \right) \left[ \frac{1}{\left( v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^2} - \frac{iS}{v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l}} \right] \right\} \\
& + \delta(l-l_0) e^{i\omega_0 \tau} \left\{ 2l\phi_0 \left( \frac{i\omega_0}{v'_0} + \frac{2}{v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l}} \right) \frac{c}{v_A} \frac{1}{S} \right. \\
& \left. + i \frac{c}{v_A v'_0} \frac{1}{S} \left( i\omega_0 E_{0x} - 2iv'_0 l \phi_0 + \omega_0 (k_{\perp} + 2v'_0 l \tau) \right) \frac{1}{l^2} \left( v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-2} \right. \\
& \left. - \frac{1}{l^2} \left( v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-2} \left( B_{y0} - i(k_{\perp} + 2v'_0 l \tau) \right) \right\} \quad (41)
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь второй временной интервал,  $1/l\rho_s < T < (\beta m_i)/(l\rho_s m_e)$ . Для этого интервала можно получить два различных асимптотических представления для коэффициентов  $C_1(T)$  и  $C_2(T)$  – одно, когда точка стационарной фазы  $T^{(0)} = \omega_0/(k_z v_A l\rho_s)$  не входит в этот временной интервал, и второе, когда она входит. В первом случае асимптотики для  $\phi(k_{\perp}, l, k_z, \tau)$  и  $A_{\parallel}(k_{\perp}, l, k_z, \tau)$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
\phi(k_{\perp}, l, k_z, \tau) \approx & C_1^{(0)} \left( v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-3/2} \exp \left( i \frac{S}{2} \left( v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^2 l\rho_s \right) \\
& + C_2^{(0)} \left( v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-3/2} \exp \left( -i \frac{S}{2} \left( v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^2 l\rho_s \right) - i\phi_0 l\rho_s^2 \left( v'_0 \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-1} \exp \left( \frac{i\omega_0 k_{\perp}}{v'_0 l} \right) \delta(l-l_0)
\end{aligned}$$

$$\times \exp\left(iS\left(v'_0\tau - \frac{k_\perp}{l}\right)\frac{\omega_0}{v'_0}\right) \frac{2S(l\rho_s)^{1/2}}{\left(\frac{\omega_0}{v'_0}\right)^2 - \left(v'_0\tau - \frac{k_\perp}{l}\right)^2 S^2 l^2 \rho_s^2} + o\left(\left(v'_0\tau - \frac{k_\perp}{l}\right)^{-3}\right). \quad (42)$$

и

$$\begin{aligned} A_{\parallel}(k_\perp, l, k_z, \tau) \approx & i \frac{c}{v_A} \frac{1}{S} \left\{ C_1^{(0)} \exp\left(i \frac{S}{2} \left(v'_0\tau - \frac{k_\perp}{l}\right)^2 l\rho_s\right) \left[ \frac{1}{2} \left(v'_0\tau - \frac{k_\perp}{l}\right)^{-5/2} + iS l\rho_s \left(v'_0\tau - \frac{k_\perp}{l}\right)^{-1/2} \right] \right. \\ & + C_2^{(0)} \exp\left(-i \frac{S}{2} \left(v'_0\tau - \frac{k_\perp}{l}\right)^2 l\rho_s\right) \left[ \frac{1}{2} \left(v'_0\tau - \frac{k_\perp}{l}\right)^{-5/2} - iS l\rho_s \left(v'_0\tau - \frac{k_\perp}{l}\right)^{-1/2} \right] \\ & - i \frac{\phi_0 l \rho_s^2}{v'_0\tau - \frac{k_\perp}{l}} \delta(l-l_0) \exp\left(i \frac{\omega_0 k_\perp}{v'_0 l} + iST \frac{\omega_0}{v'_0}\right) \frac{2S(l\rho_s)^{1/2}}{\left(\frac{\omega_0}{v'_0}\right)^2 - \left(v'_0\tau - \frac{k_\perp}{l}\right)^2 S^2 l^2 \rho_s^2} \\ & \left. \times \left[ \frac{1}{v'_0\tau - \frac{k_\perp}{l}} + iS \frac{\omega_0}{v'_0} + \frac{2\left(v'_0\tau - \frac{k_\perp}{l}\right) S^2 l^2 \rho_s^2}{\left(\frac{\omega_0}{v'_0}\right)^2 - \left(v'_0\tau - \frac{k_\perp}{l}\right)^2 S^2 l^2 \rho_s^2} \right] \right\} \\ & + \delta(l-l_0) e^{i\omega_0\tau} \left[ i \frac{c}{v_A v'_0} \frac{1}{S} \left( i\omega_0 E_{0x} - 2iv'_0 l \phi_0 + \omega_0 (k + 2v'_0 l \tau) \right) \frac{1}{l^2} \left( v'_0\tau - \frac{k}{l} \right)^{-2} \right. \\ & \left. - \frac{1}{l^2} \left( v'_0\tau - \frac{k}{l} \right)^{-2} \left( B_{y0} - i(k + 2v'_0 l \tau) \right) \right] \quad (43) \end{aligned}$$

Во втором случае, когда значение времени  $T^{(0)} = \omega_0 / (k_z v_A l \rho_s)$  принадлежит временному интервалу  $1/l\rho_s < T < (\beta m_i) / (l\rho_s m_e)$ , асимптотики для  $\phi(k_\perp, l, k_z, \tau)$  и  $A_{\parallel}(k_\perp, l, k_z, \tau)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \phi(k_\perp, l, k_z, \tau) \approx & C_1^{(0)} \left( v'_0\tau - \frac{k_\perp}{l} \right)^{-3/2} \exp\left(i \frac{S}{2} \left( v'_0\tau - \frac{k_\perp}{l} \right)^2 l\rho_s\right) + C_2^{(0)} \left( v'_0\tau - \frac{k_\perp}{l} \right)^{-3/2} \\ & \times \exp\left(-i \frac{S}{2} \left( v'_0\tau - \frac{k_\perp}{l} \right)^2 l\rho_s\right) + \left( v'_0\tau - \frac{k_\perp}{l} \right)^{-2} (2\pi S)^{1/2} \phi_0 \rho_s^2 \exp\left(\frac{i\omega_0 k_\perp}{v'_0 l}\right) \delta(l-l_0) \quad (44) \\ & \times \left\{ -\exp\left(i \frac{S}{2} \left( v'_0\tau - \frac{k_\perp}{l} \right)^2 l\rho_s + i \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{S l \rho_s (v'_0)^2} - i \frac{\pi}{4}\right) \right. \\ & \left. + \exp\left(-i \frac{S}{2} \left( v'_0\tau - \frac{k_\perp}{l} \right)^2 l\rho_s + i \frac{3}{2} \frac{\omega_0^2}{S l \rho_s (v'_0)^2} - i \frac{\pi}{4}\right) \right\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
A_{\parallel} \approx & i \frac{c}{v_A} \frac{1}{S} \left\{ C_1^{(0)} \exp \left( i \frac{S}{2} \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^2 l \rho_s \right) \left( \frac{1}{2} \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-5/2} + i S l \rho_s \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-1/2} \right) \right. \\
& + C_2^{(0)} \exp \left( -i \frac{S}{2} \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^2 l \rho_s \right) \left( \frac{1}{2} \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-5/2} + i S l \rho_s \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-1/2} \right) \\
& - i (2\pi S)^{1/2} \phi_0 \rho_s^2 \exp \left( \frac{i \omega_0 k_{\perp}}{v_0' l} \right) \delta(l - l_0) \frac{S l \rho_s}{v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l}} \left\{ \exp \left( i \frac{S}{2} \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^2 l \rho_s + i \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{S l \rho_s (v_0')^2} - i \frac{\pi}{4} \right) \right. \\
& \left. + \exp \left( -i \frac{S}{2} \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^2 l \rho_s + i \frac{3}{2} \frac{\omega_0^2}{S l \rho_s (v_0')^2} - i \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\
& + \delta(l - l_0) e^{i \omega_0 \tau} \left[ i \frac{c}{v_A v_0'} \frac{1}{S} (i \omega_0 E_{0x} - 2i v_0' l \phi_0 + \omega_0 (k_{\perp} + 2v_0' l \tau)) \frac{1}{l^2} \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-2} \right. \\
& \left. - \frac{1}{l^2} \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-2} (B_{y0} - i(k_{\perp} + 2v_0' l \tau)) \right]. \tag{45}
\end{aligned}$$

Рассмотрим третий временной интервал  $(\beta m_i)/(l \rho_s m_e) < T$ . В этом интервале асимптотики для  $\phi(k_{\perp}, l, k_z, \tau)$  и  $A_{\parallel}(k_{\perp}, l, k_z, \tau)$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
\phi(k_{\perp}, l, k_z, \tau) \approx & C_1^{(0)} \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-2} \exp \left( i S \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right) \frac{v_{Te}}{v_A} \right) \\
& + C_2^{(0)} \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-2} \exp \left( -i S \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right) \frac{v_{Te}}{v_A} \right) \\
& - 2i \rho_s^3 l^2 \phi_0 \left( \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\beta} \right)^{3/4} \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-1} \frac{v_A}{v_{Te}} e^{i \omega_0 \tau} \delta(l - l_0) + o \left( \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-2} \right), \tag{46}
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
A_{\parallel}(k_{\perp}, l, k_z, \tau) \approx & i \frac{c}{v_A} \frac{1}{S} \left\{ C_1^{(0)} i S \frac{v_{Te}}{v_A} \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-2} \exp \left( i S \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right) \frac{v_{Te}}{v_A} \right) \right. \\
& - C_2^{(0)} i S \frac{v_{Te}}{v_A} \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-2} \exp \left( -i S \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right) \frac{v_{Te}}{v_A} \right) \\
& - 2i \rho_s^3 l^2 \phi_0 \left( \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\beta} \right)^{3/4} \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-1} \frac{v_A}{v_{Te}} e^{i \omega_0 \tau} \delta(l - l_0) \left[ \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-1} + \frac{i \omega_0}{v_0'} \right] \left. \right\} \\
& + \delta(l - l_0) e^{i \omega_0 \tau} \left[ i \frac{c}{v_A v_0'} \frac{1}{S} (i \omega_0 E_{0x} - 2i v_0' l \phi_0 + \omega_0 (k_{\perp} + 2v_0' l \tau)) \frac{1}{l^2} \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-2} \right. \\
& \left. - \frac{1}{l^2} \left( v_0' \tau - \frac{k_{\perp}}{l} \right)^{-2} (B_{y0} - i(k_{\perp} + 2v_0' l \tau)) \right]. \tag{47}
\end{aligned}$$

Полученные решения (40) – (47) показывают, что влияние альфвеновских волн и сдвигового течения на гармоническое возмущение на различных временных интервалах различно. Однако на всех временных интерва-

лах при  $T > 1$  возникает немодальная структура и у вынужденных возмущений.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследована временная эволюция несобственных альфвеновских волн в полу бесконечном однородном сдвиговом течении плазмы. Переход к конвективным координатам  $\xi, \eta, \zeta$ , определенным соотношениями (6), позволил исключить из исходной системы уравнений (1) – (4) пространственные зависимости, связанные со сдвиговым течением и свести задачу к исследованию эволюции отдельных пространственных Фурье гармоник векторного и скалярного потенциалов в однородной, но нестационарной среде. Ранее благодаря этому подходу удалось исследовать временную эволюцию альфвеновских волн в безграничном сдвиговом течении [9]. В данной работе рассматривается еще более сложная задача о временной эволюции возмущений, возбужденных на границе сдвигового течения, вследствие их взаимодействия с альфвеновскими немодальными возмущениями, распространяющимися в однородном сдвиговом течении. Метод Лапласа мог бы дать решение этой задачи в явном виде только для асимптотически больших времен (например, в случае плазмы конечного давления при  $T \gg \beta m_i / m_e l \rho_s$ ). Все промежуточные эволюционные процессы при таком анализе были бы потеряны. Как для лабораторных, так и ионосферных экспериментов необходимо знание процессов эволюции возмущений если не в каждый момент времени, то по крайней мере для всех характерных временных масштабов. С этой точки зрения результаты, полученные на основе преобразования Лапласа, не имели бы практической ценности. Полученные в настоящей работе решения (25), (26) для плазмы низкого давления и решения (40) – (47) для плазмы умеренного давления применимы для любых вполне определенных масштабов времени, которые могут возникнуть в реальных экспериментах.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. K.H. Burrell, Effects of ExB velocity shear and magnetic shear on turbulence and transport in magnetic confinement devices // *Physics of Plasmas*. - 1996. - Vol.4. - P. 1499-1527.
2. W.E. Amatucci, Inhomogeneous plasma flows: A review of in situ observations and laboratory experiments // *Journal of Geophysical Research*. - 1999. - Vol.104. - P. 14481-.
3. S.C. Reddy, P.J. Schmid, D.S. Henningson, Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld operator // *SIAM Journal of Applied Mathematics*. - 1993. - Vol.53. - P.15-47.
4. K.M. Case, Stability of inviscid plane Couette flow // *Phys. Fluids*. - 1960. - Vol.3. - P. 143-148.
5. Lord Kelvin (W. Thomson), Stability of fluid motion-Rectilinear motion of viscous fluid between two parallel planes // *Phil. Mag.* - 1887. - Vol. 24. - P.188-196.
6. V.S. Mikhailenko, V.V. Mikhailenko, and K.N. Stepanov, Temporal evolution of linear drift waves in a collisional plasma with homogeneous shear flow // *Physics of Plasmas*. - 2000. - Vol.7. - P.94-100.
7. V.S. Mikhailenko, J. Weiland, Toroidal ion temperature gradient driven instability in plasma with shear flow // *Physics of Plasmas*. - 2002. - Vol.9. - P.529-535.
8. V.S. Mikhailenko, V.V. Mikhailenko, and J. Weiland, Rayleigh-Taylor instability in plasmas with shear flow // *Physics of Plasmas*. - 2002. - Vol. 9. - P.2891-2895.
9. V.S. Mikhailenko, V.V. Mikhailenko, M. Hein, S.M. Mahajan, Temporal evolution of drift Alfvén waves and instabilities in an inhomogeneous plasma with homogeneous shear flow // *Phys. Review*. - 2002. - Vol.E66. - P.066409.1-066409.12
10. W. Horton, Nonlinear drift waves and transport in magnetized plasma // *Physics Reports*. - 1990. - Vol.192. - P.1-177

### THE TEMPORAL EVOLUTION OF THE NONEIGEN ALFVEN WAVES IN THE BOUNDED SHEAR FLOW

**N.A. Azarenkov, V.V. Mikhailenko**

*V.N. Karazin Kharkov National University,  
61077 Kharkov, Svoboda Sq.4, Ukraine*

The temporal evolution of noneigen Alfvén waves, excited under the action of the harmonic perturbation, applied to the boundary of the semiinfinite homogeneous plasma shear flow is considered. It is shown that the noneigen harmonic perturbation changes in time its modal structure due to the interaction with Alfvén nonmodal waves and shear flow and becomes a non-modal with amplitude, which decays with time.

**KEY WORDS:** plasma, shear flow, noneigen Alfvén wave.