УДК 530.1.19

ТЕОРИЯ ШИРИНЫ ЛИНИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ И ПОЗИТРОНОВ В КРИСТАЛЛЕ

Н.Ф. Шульга [1,2], М. Табризи [3]

[1)]Институт теоретической физики Национального научного центра “Харьковский физико-технический институт”, ул. Академическая 1, Харьков, 61108, Украина

[2)]Белгородский государственный университет, ул. Победы 85, Белгород, 308015,Российская Федерация

[3)] Физико-технический факультет, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы 4, Харьков 61077, Украина

Email: shulga@kipt.kharkov.ua

Поступила в редакцию 27 октября 2003 г.

Получены формулы для параметрического рентгеновского излучения “назад” релятивистскими электронами в кристалле с учетом влияния на излучение отклонения траектории частицы в кристалле от прямолинейной. Рассмотрено влияние характера движения частицы в кристалле на ширину линии параметрического рентгеновского излучения. Показано, что плоскостное каналирование релятивистских позитронов в кристалле может приводить к расщеплению линий параметрического рентгеновского излучения на несколько линий.

КЛЮЧИВЫЕ СЛОВА: параметрическое рентгеновское излучение, многократное рассеяние релятивистских электронов и позитронов в кристалле.

При прохождении релятивистских электронов через кристалл под малым углом к одной из кристаллографических осей возможны различные когерентные и интерференционные эффекты при излучении, благодаря которым спектрально-угловая плотность излучения из кристалла может значительно превзойти соответствующую плотность излучения из аморфной среды [1,2]. Одним из таких процессов является параметрическое рентгеновское излучение (ПРИ), возникающее при взаимодействии электронов с неоднородностью диэлектрической проницаемости кристаллической решетки [2]. Периодическая зависимость диэлектрической проницаемости от координат приводит к узким линиям в спектрально-угловой плотности излучения. Этот результат получен в предположении, что движение частицы в кристалле является прямолинейным. Детальные экспериментальные исследования ширин линии ПРИ проводились в ряде работ [3-8]. Анализ результатов этих экспериментов показал, что существенное влияние на ширину линии ПРИ могут оказать отклонения траектории частиц в кристалле от прямолинейной. Иными словами предположение о прямолинейности траектории частицы в кристалле не всегда оказывается оправданным при анализе ширин линий ПРИ. В данной задаче отклонения траектории частицы в кристалле от прямолинейной могут быть связаны с явлением каналаровании частиц и с многократным их рассеянием в кристалле [1]. Поэтому важно знать какое влияние на характеристики ПРИ оказывает характер движения частиц в кристалле. Для этого требуется, прежде всего, получить формулы для ПРИ с учетом отклонения траектории частицы в кристалле от прямолинейной. Выводу таких формул посвящена настоящая работа. Основное внимание мы обращаем на вывод формул, описывающих влияние отклонения траектории частицы в кристалле от прямолинейной на ПРИ “назад”. Этот случай представляет особый интерес, так как при такой постановке задачи вкладом в излучение процесса тормозного излучения релятивистских частиц в кристалле можно пренебречь.

СПЕКТРАЛЬНО-УГЛОВАЯ ПЛОТНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ В СРЕДЕ С НЕОДНОРОДНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

Спектрально-угловая плотность излучения заряженной частицы определяется потоком вектора Пойтинга в заданном направлении на больших расстояниях от мишени. Это величина может быть связана с Фурье-компонентой по времени вектора электрического поля посредством соотношения [1,2]

$$\frac{dE}{d\omega do} = \frac{r^2}{4\pi^2}\left|\mathbf{n}\times\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})\right|^2_{r\to\infty}, \tag{1}$$

где $d\omega$ - интервал частот, в котором рассматривается излучение, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ - единичный вектор в направлении излучения и do - элемент телесного угла в этом направлении. Для частицы, движущейся по траектории $\mathbf{r}(t)$ в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_\omega(\mathbf{r}) = 1 + \varepsilon'_\omega(\mathbf{r})$, величина $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})$ определяется уравнением

$$(\Delta+\omega^2)E_{\omega,i}-\nabla_i\nabla_k E_{\omega,k}=-4\pi i\omega j_{\omega,i}-\omega^2\varepsilon'(\mathbf{r})E_{\omega,i}(\mathbf{r}),\tag{2}$$

где $\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r})$ - Фурье-компонента по времени вектора плотности тока частицы с зарядом e

$$\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r})=e\int_{-\infty}^{\infty}dt e^{i\omega t}\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t)).\tag{3}$$

Здесь и дальше мы будем рассматривать случай, когда величина $\varepsilon'_\omega(\mathbf{r})$ отлична от нуля в не которой локализованной пространственной области. Используя метод функций Грина, решение уравнения (2) может быть записано в виде

$$E_{\omega,i}(\mathbf{r})=-\int d^3r' G_{ik}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')(4\pi i\omega j_{\omega,k}(\mathbf{r}')+\omega^2\varepsilon'_\omega(\mathbf{r}')E_{\omega,k}(\mathbf{r}'),\tag{4}$$

где $G_{ik}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ - функция Грина уравнения (2) ,

$$G_{ik}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')=-\left(\delta_{ik}+\omega^{-2}\nabla_i\nabla_k\right)\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}e^{i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.\tag{5}$$

На больших расстояниях от мишени, согласно (4),

$$E_{\omega,i}(\mathbf{r})\Big|_{r\to\infty}=i\omega(\delta_{ik}-n_in_k)I_k\frac{e^{i\omega r}}{r},\tag{6}$$

где

$$\mathbf{I}=\int d^3r' e^{-i\omega\mathbf{n}\mathbf{r}'}\left[\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}')+\frac{\omega}{4\pi i}\varepsilon'_\omega(\mathbf{r}')\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}')\right].\tag{7}$$

Подставляя (6) в (1), приходим к следующему выражению для спектрально-угловой плотности излучения

$$\frac{dE}{d\omega do}=\frac{1}{4\pi^2}|\mathbf{k}\times\mathbf{I}|^2,\tag{8}$$

где $\mathbf{k}=\omega\mathbf{n}$.

Первое слагаемое в (7) определяет вклад в излучение, обусловленный ускорением частицы во внешнем поле. Это слагаемое не зависит от диэлектрической проницаемости среды. Второе слагаемое в $\mathbf{I}$ определяется как диэлектрической проницаемостью, так и траекторией частицы в среде (от $\mathbf{r}(t)$ зависит величина $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})$). Это слагаемое отлично от нуля только в области координат, в которой отлична от нуля величина $\varepsilon'_\omega(\mathbf{r})$.

Рассмотрим излучение в простейшем случае, когда отклонение диэлектрической проницаемости от ее невозмущенного значения достаточно мало. Решение уравнения (2) в этом случае можно искать в виде ряда по степеням $\varepsilon'_\omega(\mathbf{r})$. Первый член такого разложения $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})=\mathbf{E}^0_\omega(\mathbf{r})$, согласно (2), будет определяться уравнением

$$(\Delta+\omega^2)E^0_{\omega,i}-\nabla_i\nabla_k E^0_{\omega,k}=-4\pi i\omega j_{\omega,i}.\tag{9}$$

Решение этого уравнения не зависит от $\varepsilon'_\omega(\mathbf{r})$ и определяется только траекторией частицы во внешнем поле. Раскладывая $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})$ в интеграл Фурье по координатам, находим, что

$$\mathbf{E}^0_\omega(\mathbf{r})=\int\frac{d^3\chi}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{\chi}\mathbf{r}}\mathbf{E}^0_{\omega,\boldsymbol{\chi}},\tag{10}$$

где

$$\mathbf{E}^0_{\omega,\boldsymbol{\chi}}=-\frac{4\pi ie\omega}{\omega^2-\boldsymbol{\chi}^2}\int_{-\infty}^{\infty}dt\,\mathbf{Q}(t)e^{i(\omega t-\boldsymbol{\chi}\mathbf{r}(t))},\tag{11}$$

$$\mathbf{Q}(t)=\mathbf{v}(t)-\frac{\boldsymbol{\chi}}{\omega^2}(\boldsymbol{\chi}\cdot\mathbf{v}(t)).\tag{12}$$

Подставляя (10) в (7) и используя Фурье-разложение величины $\varepsilon'_\omega(\mathbf{r})$, легко показать, что

$$\mathbf{I} = \mathbf{j}_{\omega,\mathbf{k}} + \mathbf{I}_\varepsilon , \tag{13}$$

где $\mathbf{j}_{\omega,\mathbf{k}}$ - Фурье-компонента по времени и координате вектора плотности тока частицы и

$$\mathbf{I}_\varepsilon = \frac{\omega}{4\pi \mathrm{i}} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \varepsilon'_{\omega,\mathbf{q}} \mathbf{E}^{(0)}_{\omega,\mathbf{k}-\mathbf{q}} . \tag{14}$$

Формула (8) с таким значением $\mathbf{I}$ определяет в первом порядке теории возмущении по ε'_ω спектрально-угловую плотность излучения частицы, движущейся по траектории $\mathbf{r}(t)$ в среде с неоднородной диэлектрической проницаемостью. Мы в дальнейшем будем интересоваться, в основном, вкладом в излучение, обусловленным неоднородностью диэлектрической проницаемости среды. Для релятивистского электрона первое слагаемое в (13) вносит определяющий вклад в излучение в области углов излучения, близких к направлению скорости частицы $\mathbf{v}(t)$. Поэтому в области больших углов излучения (в частности, при рассмотрении излучения "назад") вкладом этого слагаемого в излучение можно пренебречь. Спектрально-угловая плотность излучения в этом случае будет определяться вторым слагаемым в (13), которое зависит от неоднородности диэлектрической проницаемости и траектории частиц в среде.

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЯ “НАЗАД”

Рассмотрим излучение релятивистских электронов в кристалле при падении пучка под малым углом ψ к одной из кристаллографических осей (оси z). (Геометрия задачи описана в работе [9].) В этом случае в результате интерференции волн, отраженных от кристаллографических плоскостей атомов, расположенных ортогонально оси z, в спектрально-угловой плотности излучения “назад” будут появляться узкие линии, соответствующие линиям параметрического рентгеновского излучения. Естественная ширина этих линий будет определяться числом плоскостей атомов, с которыми взаимодействует электрон, пролетая через кристалл. Рассеяние частицы в кристалле будет приводить к небольшим изменениям расстояний, проходимых электроном между последовательными столкновениями с плоскостями атомов кристалла. Это, в свою очередь, будет сказываться на интерференционных свойствах излучения. Получим формулу для спектрально-угловой плотности излучения в этом случае с учетом влияния на излучение как конечной толщины кристалла, так и траектории частицы в кристалле.

Основной вклад в интенсивность ПРИ "назад" в рассматриваемом случае вносят компоненты $q_x = q_y = 0$. При этом для излучения несущественна неоднородность диэлектрической проницаемости вдоль осей x и y , ортогональных оси z, и для входящей в (14) Фурье-компоненты диэлектрической проницаемости можно воспользоваться следующим выражением

$$\varepsilon'_{\omega,\mathbf{q}} = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_\perp) \varepsilon'_{\omega,q_z} \frac{1-\exp(-iNaq_z)}{1-\exp(-iaq_z)} , \tag{15}$$

где a - расстояние между кристаллическими плоскостями атомов вдоль оси z , N - число этих плоскостей, $\delta(\mathbf{q}_\perp)$ - двумерная дельта-функция, $\mathbf{q}_\perp = (q_x, q_y)$ и

$$\varepsilon'_{\omega,q_z} = \int_0^a dz\, \varepsilon_\omega(z) \exp(-iq_z z) . \tag{16}$$

При выводе формуле (15) мы воспользовались также периодичностью диэлектрической проницаемости вдоль оси z.

Формула (15) содержит резкие максимумы при значениях $q_z = g$, где $g = \frac{2\pi n}{a}$ и n -целые числа. Этим значениям g при $N \to \infty$ и прямолинейном движении частицы в кристалле со скоростью $\mathbf{v}$ соответствуют линии ПРИ "назад", определяемые соотношением

$$\omega = (\mathbf{k} + \mathbf{g})\mathbf{v} . \tag{17}$$

Если интересоваться излучением в направлениях, близких к направлению брэгговского отражения волн, то согласно (17), приходим к следующему выражению для линии ПРИ “назад” [9]

$$\omega_n = vg\cos\psi\ (1+v\cos(\theta+\psi))^{-1}, \tag{18}$$

где ψ -угол между $\mathbf{v}$ и осью z и $\theta = \theta_x$ - угол, между компонентой проекции вектора $\mathbf{k}$ на плоскость $(\mathbf{v}, z)$ и отрицательным направлением оси z. Отметим, что компонента вектора $\mathbf{k}$, ортогональная плоскости $(\mathbf{v}, z)$, в соотношение (18) не входят. Рассмотрим излучение вблизи одной из таких линий - линии, соответствующей частоте $\omega = \omega_n$.

Многократное рассеяние релятивистского электрона в кристалле приводит к малым отклонениям траектории частицы от прямолинейной. Вектор скорости частицы при этом может быть представлен в виде [1]

$$\mathbf{v}(t) \approx \mathbf{v}(1-\frac{\mathbf{v}_{\perp}^2(t)}{2}) + \mathbf{v}_{\perp}(t), \tag{19}$$

где $\mathbf{v}_{\perp}(t)$ - поперечная $\mathbf{v}$ составляющая скорости частицы, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_{\perp}(t) = 0$ и $v_{\perp}(t) << v$. Подставляя соотношение (15) в (14), получим

$$\mathbf{I}_{\varepsilon} = \frac{\omega}{4\pi i}\int \frac{dq_z}{2\pi}\varepsilon'_{\omega,q_z}\frac{1-\exp(-iLq_z)}{1-\exp(-iaq_z)}\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}-\mathbf{q}_z}, \tag{20}$$

где $L = Na$ - толщина кристалла.

Выполнив в этом выражении замену переменных $q_z \to g + q'_z$, легко проверить, что значения q'_z, дающие основной вклад в интеграл, по порядку величины равны $q'_{z\,eff} \sim \dfrac{1}{L}$. С учетом этого с точностью до членов порядка N^{-1} входящие в (20) множители перед $\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}-\mathbf{q}_z}$ могут быть записаны в виде

$$\varepsilon'_{\omega,g+q'_z} \approx \varepsilon'_{\omega,g} \tag{21.a}$$

$$\frac{1-\exp(-iLq'_z)}{1-\exp(-iaq'_z)} \approx \frac{1}{a}\int_0^L dz\exp(-iq'_z z). \tag{21.b}$$

С той же точностью для входящих в $\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}-\mathbf{q}'_z}$ предэкспоненциального фактора $\mathbf{Q}(t)$ и пропаготора $\omega^2 - (\mathbf{k}-\mathbf{g}-\mathbf{q}_z)^2$ находим следующие выражения

$$\mathbf{Q}(t) \approx \mathbf{v}(t) - \omega^{-2}(\mathbf{k}-\mathbf{g})\left[(\mathbf{k}-\mathbf{g})\cdot\mathbf{v}(t)\right], \tag{22a}$$

$$\omega^2 - (\mathbf{k}-\mathbf{g}-\mathbf{q}'_z)^2 \approx \omega^2 - (\mathbf{k}-\mathbf{g})^2 + 2\omega_n q'_z. \tag{22b}$$

В величине $\mathbf{Q}(t)$ мы пренебрегли слагаемыми пропорциональными q'_z и q'^2_z, а в пропаготоре отбросили слагаемое пропорциональное q'^2_z.Мы воспользовались здесь также тем, что вблизи интересующей нас линии характерные значения $\Delta\omega = \omega - \omega_n$, при которых существенно изменяется интенсивность излучения, будут порядка $\Delta\omega \sim \dfrac{1}{L}$. С той же точностью находим для входящего в $\mathbf{E}_{\omega,\mathbf{k}-\mathbf{q}'_z}$ экспоненциального фактора следующее выражение

$$\omega t - (\mathbf{k}-\mathbf{g}-\mathbf{q}'_z)\mathbf{r}(t) \approx \omega t - (\mathbf{k}-\mathbf{g})\mathbf{r}(t) + q'_z vt(1+O(v_{\perp}^2)), \tag{23}$$

где $\mathbf{r}(t) = \int_0^t \mathbf{v}(t')dt$.

Подставляя соотношения (21), (22) и (23) в (20), запишем $\mathbf{I}_{\varepsilon}$ в виде

$$\mathbf{I}_{\varepsilon} = \frac{e\omega^2\varepsilon'_{\omega,g}}{2\pi a}\int_0^L dz\int_{-\infty}^{\infty} dt\int_{-\infty}^{\infty} dq'_z e^{i[\omega t-(\mathbf{k}-\mathbf{g})\,\mathbf{r}(t)+q'_z vt]}\mathbf{Q}(t)\left[\omega^2-(\mathbf{k}-\mathbf{g})^2+2i\omega_n\frac{\partial}{\partial z}\right]^{-1} e^{-iq'_z z}. \tag{24}$$

Мы заменили здесь переменную q'_z в пропаготоре на оператор $i\dfrac{\partial}{\partial z}$, действующий на функцию $e^{iq'_z z}$. Такая замена сделана с тем, чтобы выполнить в (24) интегрирование по q'_z. В результате такого интегрирования приходим к дельта-функции $2\pi\delta(vt-z)$, снятие которой приводит к следующему выражению для $\mathbf{I}_\varepsilon$

$$\mathbf{I}_\varepsilon = \frac{e\omega^2\varepsilon'_{\omega,g}}{a}\int_0^L dz\left[\omega^2-(\mathbf{k}-\mathbf{g})^2+2i\omega_n\frac{\partial}{\partial z}\right]^{-1}\mathbf{Q}(t)\,e^{i[\omega t-(\mathbf{k}-\mathbf{g})\mathbf{r}(t)]}, \tag{25}$$

где $t = z/v$.

Слагаемое $\left[\omega t-(\mathbf{k}-\mathbf{g})\mathbf{v}t\right]$в фазе входящей в (25) экспоненты может быть записано при $\omega\approx\omega_n$ в виде

$$\left[\omega t-(\mathbf{k}-\mathbf{g})\mathbf{v}t\right]\approx 2(\omega-\omega_n)t\,. \tag{26}$$

Учитывая малость углов θ и ψ легко показать, что

$$\left[\omega^2-(\mathbf{k}-\mathbf{g})+2i\omega_n\frac{\partial}{\partial z}\right]^{-1}e^{2i(\omega-\omega_n)z/v}\approx-\frac{e^{2i(\omega-\omega_n)z/v}}{\omega_n^2}\left[\gamma^{-2}+\left(\theta-\psi\right)^2-2i\omega_n\frac{\partial}{\partial z}\right]^{-1}. \tag{27}$$

При этом действие оператора $\left[\omega^2-(\mathbf{k}-\mathbf{g})+2i\omega_n\dfrac{\partial}{\partial z}\right]^{-1}$ распространяется на оставшиеся после выделения в (25) экспоненты $\exp\left[2i(\omega-\omega_n)z/v\right]$ множители.

Используя соотношение (22а) и с учетом малости углов θ и ψ, запишем величину $\mathbf{k}\times\mathbf{Q}(t)$ в виде

$$\mathbf{k}\times\mathbf{Q}(t)\approx\omega_n(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\psi}-\mathbf{v}_\perp(t)), \tag{28}$$

где $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\psi}$ - двумерные вектора, имеющие в плоскости (x,y), ортогональной оси z, компоненты $\left(\theta_x=\theta,\theta_y\right)$ и$\left(\psi_x=\psi,\psi_y=0\right)$.

Используя преобразования (22)-(28) приходим к следующему выражению для спектрально-угловой плотности излучения [10]

$$\frac{dE}{d\omega do}\approx\frac{e^2\omega_n^2\left|\varepsilon'_{\omega_n,g}\right|^2}{4\pi^2a^2}\left|\int_0^L dz\,e^{2i(\omega-\omega_n)z/v}\frac{\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\psi}-\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{\mu}}}{\gamma^{-2}+(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\psi})^2-\dfrac{2i}{\omega_n}\dfrac{\partial}{\partial z}}\Phi\left(v_\perp(z/v)\right)\right|^2_{\mu\to0}, \tag{29}$$

где $\Phi\left(v_\perp(t)\right)$ - функционал, определяемый соотношением

$$\Phi(v_\perp(t))=\exp\left\{\boldsymbol{\mu}\,\mathbf{v}_\perp(t)+\frac{i\omega}{2}\int_0^t dt'\mathbf{v}_\perp^2(t')-i\omega_n(\theta-\psi)\int_0^t dt'\mathbf{v}_\perp(t')\right\}. \tag{30}$$

Мы воспользовались здесь соотношением $\mathbf{v}_\perp(t)=\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{\mu}}\exp(\boldsymbol{\mu}\,\mathbf{v}_\perp(t))\Big|_{\mu\to0}$, позволяющим избавиться от $\mathbf{v}_\perp(t)$ в предэкспоненциальном множителе.

При выводе формулы (29) не был использован конкретный закон движения частицы в кристалле. Поэтому этой формулой можно пользоваться для описания влияния на параметрическое излучение различных режимов движения частицы в кристалле. В частности, в случае прямолинейного движения величина $\mathbf{v}_\perp(t)$ равна нулю. В этом случае вклад слагаемых, содержащих операторы $\partial/\partial\mu$ и $\partial/\partial z$ в (29) отсутствует и спектрально-угловая плотность излучения приобретает вид

$$\frac{dE}{d\omega do}=\frac{e^2\omega_n^2\left|\varepsilon'_{\omega_n,g}\right|^2}{4\pi^2a^2}\frac{(\theta-\psi)^2}{[\gamma^{-2}+(\theta-\psi)^2]^2}\frac{\sin^2[(\omega-\omega_n)L/v]}{[(\omega-\omega_n)/v]^2}. \tag{31}$$

Это формула описывает параметрическое излучение в области частот $\omega\approx\omega_n$ с учетом естественной ширины линии. Ширина линии, согласно (31) порядка $\Delta\omega\sim v/L$. При $L\to\infty$ формула (3.15) приобретает вид

$$\frac{dE}{d\omega do}=L\frac{e^2\omega_n^2 v\left|\varepsilon'_{\omega_n,g}\right|^2}{4\pi a^2}\frac{(\theta-\psi)^2}{[\gamma^{-2}+(\theta-\psi)^2]^2}\delta(\omega-\omega_n). \tag{32}$$

В общем случае, когда $\mathbf{v}_\perp(t)\neq 0$, требуется определить действие оператора $\partial/\partial z$, входящего в пропаготор, на функционал $\Phi(v_\perp(z))$. С этой целью запишем этот пропаготор в виде (при $\boldsymbol{\mu}=0$)

$$\frac{1}{\alpha-\dfrac{2i}{\omega_n}\dfrac{\partial}{\partial z}}\Phi(z)=\int_0^\infty dp\,e^{-p\left(\alpha-\frac{2i}{\omega_n}\frac{\partial}{\partial z}\right)}\Phi(z), \tag{33}$$

где $\alpha=\gamma^{-2}+(\theta-\psi)^2$.

Входящий в это выражение оператор $\exp\left(i\dfrac{2p}{\omega_n}\dfrac{\partial}{\partial z}\right)$, представляет собой оператор сдвига функции $\Phi(z)$ на величину $\dfrac{2ip}{\omega_n}$, поэтому

$$\left(\alpha-\frac{2i}{\omega_n}\frac{\partial}{\partial z}\right)^{-1}\Phi(z)=\int_0^\infty dpe^{-p\alpha}\Phi\left(z+\frac{2ip}{\omega_n}\right). \tag{34}$$

При выполнении условия $z>>2p/\omega_n$ фаза экспоненты (3.14) может быть разложена по малым величинам параметра $p/\omega_n z$. Сохранив в таком разложении слагаемые пропорциональные p, легко проверить, что

$$\frac{1}{\alpha-\dfrac{2i}{\omega_n}\dfrac{\partial}{\partial z}}\Phi(z)\approx\frac{1}{\gamma^{-2}+(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\psi}-\mathbf{v}_\perp(z))^2}\Phi(z). \tag{35}$$

Формула (29) в этом случае приобретает следующий вид

$$\frac{dE}{d\omega do}\approx\frac{e^2\omega_n^2\left|\varepsilon'_{\omega_n,g}\right|^2}{4\pi^2a^2}\left|\int_0^L dz\frac{\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\psi}-\mathbf{v}_\perp(z)}{\gamma^{-2}+(\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\psi}-\mathbf{v}_\perp(z))^2}e^{2i(\omega-\omega_n)z}\Phi(z)\right|^2. \tag{36}$$

Характерные значения переменной интегрирования p в (34) и величин z в (29) по порядку величины равны $p\sim 1/\alpha$ и $z\sim L$, поэтому разложение в (3.18) проводилось по параметру $\dfrac{p}{\omega_n L}\sim\dfrac{\gamma^2}{N(1+\gamma^2(\theta-\psi)^2)}$.

При выполнении условия $(\theta-\psi)^2>>v_\perp^2$ зависимостью предэкспоненциального множителя в (36) от z можно пренебречь и (33) приобретает вид

$$\frac{dE}{d\omega do}=\frac{e^2\omega_n^2\left|\varepsilon'_{\omega_n,g}\right|^2}{4\pi^2a^2}\frac{(\theta-\psi)^2}{[\gamma^{-2}+(\theta-\psi)^2]^2}\left|\int_0^L dze^{2i(\omega-\omega_n)z}\Phi(z)\right|. \tag{37}$$

ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРА ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В КРИСТАЛЛЕ НА ПРИ “НАЗАД”

При выводе приведенных высшее формул не использован конкретный закон движения частиц в кристалле. Требовалось только, чтобы отклонение траектории от прямолинейной было мало. По этой причине этими формулами можно воспользоваться для исследования влияния на ПРИ как регулярных, так и случайных режимов движения частицы в кристалле. Регулярный режим движения может быть связан, например, с явлением плоскостного каналирования частиц в кристалле. Случайный режим движения обусловлен многократным рассеянием на цепочках атомов кристалла и на тепловом разбросе положений атомов в решетке. Рассмотрим роль этих факторов в формировании ширины линий ПРИ “назад”.

Влияние многократного рассеяния на ширину линий ПРИ “назад” рассматривалось в работах [9-11]. При этом на основе метода функционального интегрирования было показано, что спектрально-угловая плотность излучения вблизи одной из линий ПРИ определяется соотношением

$$\frac{dE}{d\omega do} = \frac{e^2\omega_n^2\left|\varepsilon'_{\omega_n,g}\right|^2}{4\pi^2 a^2}\frac{(\theta-\psi)^2}{[\gamma^{-2}+(\theta-\psi)]^2}L^2F(L,\omega-\omega_n)\,. \tag{38}$$

При выполнении условий

$$\sigma_x \sim \sigma_y >> 1,$$

где $\sigma_x = \omega_n q_x L^2$, $\sigma_y = \omega_n q_y L^2$. (Здесь q_x и q_y - отнесенные к единице длины значения средних квадратов углов рассеяния частицы в кристалле вдоль осей x и y.) Функция F определяется формулой

$$F = 2\int_0^1 dx\int_0^x du\, e^{-\alpha^2\sigma_x^2 u^2 x}\cos\left[2(\omega-\omega_n)Lu\right], \tag{39}$$

где $\alpha = \dfrac{\theta_r}{\sqrt{q_x L}}$ и $\theta_r = \theta-\psi$. Анализ этой формулы показывает, что многократное рассеяние частицы в кристалле приводит к ширине линий ПРИ “назад”, определяемой соотношением [9]

$$\Delta\omega \sim \alpha\sigma_x / L\,. \tag{40}$$

Формула (39) справедлива при $\alpha >> 1$ и $\sigma_x >> 1$, поэтому в рассматриваемом случае многократное рассеяние приводит к ширине линий ПРИ значительно большей, чем естественная ширина линии, связанная с конечностью толщины кристалла $\Delta\omega_{nat} \sim 1/L$. В частности при падении электронов с энергией $\varepsilon = 50MeV$ на кристалл кремния толщиной $30\,\mu m$ под малым углом к оси <100> для $\theta_r \sim 5\cdot 10^{-2} rad$ имеем следующие значение значения для величин α, σ_x и $\Delta\omega$: $\alpha \approx 14$, $\sigma_x \approx 8,7n$, $\Delta\omega \approx 0,7\,eV$. Естественная ширина линий в этом случае равна $\Delta\omega_{nat} \sim 6\cdot 10^{-3} eV$.

Рассмотрим теперь вопрос о влиянии регулярного движения частицы в кристалле на форму линии ПРИ “назад”. Для определенности рассмотрим случай, когда разориентация кристалла на угол ψ относительного падающего пучка происходит в плоскости (010). Тогда падающие частицы могут быть захвачены в плоскостные каналы, образованными кристаллическими плоскостями атомов, расположенными параллельно плоскости (x,z) [1]. При малых углах ψ разориентации кристалла относительно оси <100> устойчивый захват частиц в плоскостные каналы возможен только для положительно заряженных частиц, поэтому рассмотрим влияние плоскостного каналирования на линию ПРИ “назад” для релятивистских позитронов.

Для исследования этого вопроса можно воспользоваться формулой (37), которая определяется конкретным законом движения частицы в кристалле $\mathbf{v}_\perp(t)$. Для простоты рассмотрим случай, когда межплоскостной потенциал определяется соотношением

$$U_p(y) = U_0\frac{y^2}{(d/2)^2}\,,\quad |y| \le d/2\,, \tag{41}$$

где U_0 - глубина потенциальной ямы (для плоскости (010) кристалла кремния эта величина составляет $U_0 \approx 20\ eV$) и d - расстояние между плоскостями вдоль оси y. В таком поле каналированный позитрон совершает гармонические колебания вдоль оси y с частотой $\Omega = \sqrt{8U_0 / \varepsilon d^2}$:

$$y(t) = y_0 \cos \Omega t\,, \tag{42}$$

где y_0 - амплитуда колебания, $|y_0| \le d/2$.

Для такой траектории находим, что

$$\Phi(t) = \exp\left\{ \frac{i\omega_n}{2} y_0^2 \Omega^2 \left(t + \frac{\sin 2\Omega t}{2\Omega} \right) - i\omega_n \theta_y y_0 \cos \Omega t \right\}, \tag{43}$$

где θ_y - компонента вектора $\boldsymbol{\theta}$, под которым наблюдается излучение, вдоль оси y.

Подставляя это выражение для $\Phi(t)$ в (37) легко проверить, что слагаемое в фазе пропорциональное t приводит к небольшой сдвижке основной линии ПРИ “назад”:

$$\omega_n \to \omega_n - \frac{\omega_n}{8} y_0^2 \Omega^2\,. \tag{44}$$

Осцилляторные же слагаемые в фазе $\Phi(t)$ будут приводить к расщеплению линии ПРИ на несколько линий. С тем, чтобы показать это разложим экспоненту (43) по параметрам $\omega_n y_0^2 \Omega \sim \omega_n y_0 \theta_p$ и $\omega_n y_0 \theta_y$, где $\theta_p = \sqrt{2U_0 / \varepsilon}$ - критический угол плоскостного каналирования. В первом приближении такого разложения имеем

$$\Phi(t) \approx e^{i\frac{\omega_n}{4} y_0^2 \Omega^2 t} \left(1 + \frac{i\omega_n}{8} y_0^2 \Omega \sin 2\Omega t - i\omega_n \theta_y y_0 \cos \Omega t \right). \tag{45}$$

Подставляя это соотношение в (37) видим, что в спектре излучения наряду с линией ω_n должны появляться линии с частотами

$$\omega = \omega_n \pm \frac{\Omega}{2}, \quad \omega = \omega_n \pm \Omega\,. \tag{46}$$

Иными славами в рассматриваемом случае имеет место расщепление линии ПРИ ω_n на несколько линий. Это расщепление обусловлено регулярным движением позитрона в плоскостном канале. Если при этом наблюдение будет происходить под малыми углами $\theta_p \ll \theta_y < 1$, то интенсивность линий $\omega_n \pm \Omega$ будет подавлена по сравнению с интенсивностью линий $\omega_n \pm \frac{\Omega}{2}$.

Оценим величину этого расщепления для позитронов с энергией $\varepsilon = 50\ MeV$, движущихся под малым углом ψ к оси <100> кристалла кремния в условиях плоскостного каналирования вдоль плоскости (010). Значение Ω в этом случае составляет $\Omega \approx 1{,}3\,eV$. Сравнивая это значение Ω с шириной линии ПРИ, обусловленной влиянием многократного рассеяния на ПРИ (см. формулу (40)), видим, что

$$\Omega > \Delta\omega. \tag{47}$$

Это означает, что наряду с эффектом уширения линии ПРИ, связанным с многократным рассеянием позитрона в кристалле, в спектре ПРИ должны появляться “саттелиты” - линии с частотами $\omega = \omega_n \pm \frac{\Omega}{2}$. Отметим также, что для каналированных позитронов эффекты некогерентного многократного рассеяния подавлены по сравнению со случаем когда плоскостное каналирование отсутствует. Поэтому можно надеться, что для каналированных позитронов эффект расщепления линии ПРИ будет проявляться “ярче” в сравнении с приведенными выше оценками.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Быстрый электрон при движении в веществе с неоднородной диэлектрической проницаемостью излучает электромагнитные волны. Излучение обусловлено как изменениями траектории частицы в среде, так и рассеянием поля частицы на неоднородностях диэлектрической проницаемости среды. В настоящей работе получены общие формулы для спектрально-угловой плотности излучения, учитывающие оба эти эффекта одновременно. При этом значительное внимание было уделено исследованию процесса параметрического рентгеновского излучения "назад" релятивистскими электронами и позитронами в кристалле при падении частиц под малым углом к одной из кристаллографических осей. Этот процесс представляет особый интерес, так как при его исследовании можно пренебречь вкладом в излучение процессов тормозного и когерентного излучения релятивистских частиц в кристалле, которые направлены, в основном, в направлении движения частиц. В работе получены формулы для спектрально-угловой плотности ПРИ "назад", учитывающие влияние на ПРИ как конечных размеров кристалла, так и отклонений траектории частицы в кристалле от прямолинейной. Анализ этих формул показал, что в этом процессе в ряде случаев значительное влияние на излучение может оказать учет искривления траектории частицы в кристалле. В частности, показано, что учет влияния многократного рассеяния частицы в кристалле на ПРИ "назад" приводит к уширению линий ПРИ. Рассмотрены случаи, когда этот эффект значителен. В работе исследовано также влияние явления плоскостного каналирования релятивистских позитронов в кристалле на ПРИ "назад". Показано, что учет этого явления приводит к расщеплению линий ПРИ на несколько линий.

Все полученные в работе формулы и результаты справедливы в случае, когда можно пренебречь процессом поглощения излученных волн в кристалле. Учет последнего фактора требует особого рассмотрения и поэтому выходит за рамки настоящей работы.

Частично работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 03-02-16263). Один из авторов (М.Т.) также благодарен организации ядерной энергетики Франции (SFEN) за финансовую поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф. *Электродинамика высоких энергий в веществе.* М.: Наука.-1993.-С.107-230.
2. Тер-Микаелян М.Л. *Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях*. Ереван.: Изд-во АН Арм. ССР.-1969.-С.45-124;С.278-345.
3. Freudenberger J., Galemann M., Genz H., et al. // *Nucl.Instr.Meth*.-1996.-V.B 115.-P.408-410.
4. Freudenberger J., Genz H., Morokhovskii V.V. et al. // *Appl. Phys. Lett*.-1997.-V 70(2).-P.267-269.
5. Brenzinger K.H., Limburg B., Backe H., et al. // *Phys.Rev.Lett*.-1997.-V79.-P.2462-2465.
6. Adejishvili D.I., Gavrikov V.B., Morokhovskii V.L. et al. // *Line Width of Parametric X-Radiation Type B Measured in Germanium at Electron Energy 24.4 MeV*. Preprint KIPT.-1995.-KIPT 95.-10.-P1-5.
7. Shchagin A.V., Pristupa V.I. Khizhnyak N.A. // *Phys. Lett*.-1990.-V. A148.-P.485-488.
8. Backe H., Kube G., Lauth W. // In : *Electron-Photon Interaction in Dense Media*, Ed. By H. Wiedemann.-Dotrecht:Kluwer Academic Publisher.-2001.-P.153-181.
9. Шульга Н.Ф., Табризи М. // *Вестник Харьковского национального университета*. сер. Физ. "Ядра, частицы, поля", 2003, № 585, вып. 1.-С.28-38.
10. Шульга Н.Ф., Табризи М. // *Письма в ЖЭТФ*.-2002.-Т.76.-С.337-340.
11. Shul'ga N.F., Tabrizi M. // *Phys. Lett*.-2003.-V.A308.- P.467-470.

THEORY OF LINE WIDTH OF PARAMETRIC X-RAY RELATIVISTIC ELECTRONS AND POSITRONS RADIATION IN A CRYSTAL

N.F. Shul'ga[1,2], M. Tabrizi [3]

[1)]Institute for Theoretical Physics, National Scientific Center "Kharkov Institute of Physics and Technology", Akademisheskaya st. 1, Kharkov 61108, Ukraine

[2)] Belgorod State University, Pobedy st. 85, Belgorod, 308015, Russian Federation

[3)]Department of Physics and Technology, Kharkov National University,Svobody sq. 4, Kharkov 61077, Ukraine

E-mail: shulga@kipt.kharkov.ua

The formulas for "backward" parametric X-ray relativistic electrons radiation in a crystal have been derived taking into account the effect of particle trajectory deflection from linear one on radiation. The particle motion nature effect on line width of parametric X-ray radiation has been considered. It is shown that the plane channeling of relativistic positrons in the crystal can lead to line splitting of parametric X-ray radiation into several lines.

KEY WORDS: parametric X-ray radiation, relativistic electrons and positrons multiple scattering in a crystal.