

## ОСЦИЛЛЯЦИИ ФАЗОВОГО СОСТОЯНИЯ В МАССИВНОЙ МОДЕЛИ С ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

**А.Т. Котвицкий**

*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина*

*пл. Свободы 4, Харьков, 61077, Украина*

*E – mail: [Albert.T.Kotwicki@univer.kharkov.ua](mailto:Albert.T.Kotwicki@univer.kharkov.ua)*

*Поступила в редакцию 27 октября 2003 г.*

В данной работе рассмотрена массивная четырёхфермионная модель во внешнем электромагнитном поле при произвольном параметре обрезания. Вычислен эффективный потенциал в  $1/N$  разложении для постоянных магнитного и электрического полей. Обнаружено, что в случае внешнего магнитного поля симметрия является всегда нарушенной и происходит фазовый переход второго рода. При наличии внешнего электрического поля симметрия динамически может как нарушаться, так и восстанавливаться при изменении либо параметра обрезания, либо напряженности электрического поля, при этом возможны фазовые переходы и первого и второго родов.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** 4-х фермионная модель, эффективный потенциал, динамическое нарушение симметрии, осцилляции фазового состояния, параметр обрезания.

Явление динамического нарушения симметрии (ДНС) в моделях с четырехфермионным взаимодействием интенсивно изучается уже долгое время [1-2]. Это связано с тем, что использование ДНС в современных моделях квантовой теории поля позволяет обойтись без введения фундаментальных бозонов, ответственных за генерацию масс [3]. Поэтому необходимо иметь представление о том, какие эффекты могут возникнуть при таком способе нарушения симметрии. Поскольку внешние условия, такие как ненулевая температура, конечная плотность частиц, внешние калибровочные и гравитационное поля, существенно усложняют фазовую диаграмму модели, изучение дополнительных фазовых переходов, генерируемых внешним электромагнитным полем в рассматриваемой модели с высшими производными представляется весьма актуальным [4-7].

Наряду с моделью с высшими производными [8] важно, исследовать возможность (ДНС) в самой обычной 4-х фермионной модели с массивными частицами. В работе [9] показано, что могут существовать осцилляции фазового состояния в моделях с высшими производными при конечном параметре обрезания, данная статья посвящена исследованию того же самого эффекта, но в другой модели во внешнем электромагнитном поле. Обнаружено, что в массивной 4-х фермионной модели электрическое поле индуцирует осцилляции фазового состояния, что может быть важным при изучении образования составных частиц, и их поведения во внешних полях.

### ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ В 4-Х ФЕРМИОННОЙ МОДЕЛИ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Выберем действие для 4-х фермионного взаимодействия в виде

$$S = \int d^4x \left\{ \bar{\Psi} \gamma^\mu i D_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi + \frac{\lambda}{2N} (\bar{\Psi} \Psi)^2 \right\}, \quad (1)$$

где  $\Psi(x)$  – спинорные поля,  $D_\mu$  – ковариантная производная.

Введем вспомогательное поле  $\sigma = -\frac{\lambda}{N} \bar{\Psi} \Psi$ , где  $N$  – число фермионных полей. Тогда действие (1) можно переписать в виде

$$S = \int d^4x \left\{ \bar{\Psi} [\gamma^\mu i D_\mu - (m + \sigma)] \Psi - \frac{N}{2\lambda} \sigma^2 \right\}. \quad (2)$$

Запишем производящий функционал в виде

$$\begin{aligned} Z = \int e^{iS} [d\Psi d\sigma] &= \int [d\Psi d\sigma] \left\{ e^{i \int d^4x \bar{\Psi} [\gamma^\mu i D_\mu - (m + \sigma)] \Psi} \right\}^N \times \\ &\times e^{-i \frac{N}{2\lambda} \int d^4x \sigma^2} \equiv \int [d\sigma] e^{iS_{eff}[\sigma]}, \end{aligned} \quad (3)$$

где мера интегрирования  $[d\Psi]$  означает интегрирование как по  $\Psi(x)$ , так и по  $\bar{\Psi}(x)$ .

Континуальный интеграл по фермионным полям сводится к детерминанту от дифференциального оператора [11]

$$\int [d\Psi] \left\{ e^{i \int d^4x \bar{\Psi} [\gamma^\mu iD_\mu - (m + \sigma)] \Psi} \right\} = \det[\gamma^\mu iD_\mu - (m + \sigma)]. \quad (4)$$

Тогда производящий функционал можно представить как

$$Z = \int [d\sigma] e^{N \ln \det[\gamma^\mu iD_\mu - (m + \sigma)] - \frac{iN}{2\lambda} \int d^4x \sigma^2}. \quad (5)$$

Отсюда видно, что эффективное действие определяется выражением

$$S_{eff}[\sigma] = N \left\{ -i \ln \det[\gamma^\mu iD_\mu - (m + \sigma)] - \frac{1}{2\lambda} \int d^4x \sigma^2 \right\}. \quad (6)$$

Определим эффективный потенциал как  $V_{eff}(\sigma) = -\frac{1}{N} S_{eff} / \int d^4x$ , тогда для постоянных параметров  $\sigma$  и  $m$  получаем

$$V_{eff}(\sigma) = \frac{1}{2\lambda} \sigma^2 + \frac{i}{\Omega} \ln \det[\gamma^\mu iD_\mu - (m + \sigma)] \equiv V_{eff}^{cl}(\sigma) + V_{eff}^q(\sigma), \quad (7)$$

где  $V_{eff}^{cl} \equiv \sigma^2 / 2\lambda$  - классическая часть эффективного потенциала,  $\Omega = \int d^4x$  - четырехмерный объем пространства, по которому производится интегрирование,  $V_{eff}^q \equiv \frac{i}{\Omega} \ln \det[\gamma^\mu iD_\mu - (m + \sigma)]$  - квантовая часть эффективного потенциала.

Для получения конкретного выражения эффективного потенциала применим следующий трюк. Возьмем производную от эффективного потенциала по  $\sigma$ , тогда константа  $\Omega$  сокращается и квантовая часть эффективного потенциала будет выражаться через шпур функции Грина. Возвращаясь к эффективному потенциалу, т.е. интегрируя по  $\sigma$  получаем

$$V_{eff}(\sigma) = \frac{\sigma^2}{2\lambda} - i \int \text{Sp} G(x, x, \sigma + m) d\sigma, \quad (8)$$

где  $G$  - функция Грина, в пределе совпадения  $G(x, x) = \lim_{x \rightarrow x'} G(x, x')$ , удовлетворяющая следующему дифференциальному уравнению

$$[\gamma^\mu iD_\mu - (m + \sigma)]G(x, x') = \delta(x - x'), \quad (9)$$

где также было использовано стандартное свойство детерминанта оператора

$$\ln \det(A) = \text{Sp} \ln(A). \quad (10)$$

В случае постоянного электромагнитного поля решение этого уравнения может быть найдено несколькими способами [10], например, методом собственного времени Швингера [4]. Если постоянное внешнее поле только магнитное  $B$ , тогда решение (10) определяется выражением

$$\text{Sp} G(x, x, w) = -4i \int \frac{ds}{(4\pi s)^2} e^{-sw^2} w(eBs) \coth(eBs), \quad (11)$$

где  $w = \sigma + m$  - есть переопределенная масса,  $e$  - заряд.

Тогда, квантовую часть эффективного действия можно записать в виде

$$\begin{aligned} V_{eff}^q(\sigma) &= -4 \int \frac{ds d\sigma}{(4\pi s)^2} e^{-s(\sigma+m)^2} (\sigma+m)(eBs) \coth(eBs) = \\ &= -4 \int \frac{ds}{(4\pi s)^2} (eBs) \coth(eBs) \int d\sigma e^{-s(\sigma+m)^2} (\sigma+m). \end{aligned} \quad (12)$$

Внутренний интеграл есть  $\int d\sigma e^{-s(\sigma+m)^2} (\sigma+m) = -\frac{1}{2s} e^{-s(\sigma+m)^2}$ . Окончательное выражение для квантовой части эффективного потенциала в постоянном внешнем магнитном поле имеет вид

$$V_{eff}^q(\sigma) = \frac{eB}{8\pi^2} \int \frac{ds}{s^2} e^{-s(\sigma+m)^2} \coth(eBs). \quad (13)$$

В случае постоянного внешнего электрического поля квантовую часть эффективного действия можно записать как

$$V_{eff}^q(\sigma) = \frac{eE}{8\pi^2} \int \frac{ds}{s^2} e^{-s(\sigma+m)^2} \cot(eEs). \quad (14)$$

## АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОГО НАРУШЕНИЯ СИММЕТРИИ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

### Постоянное внешнее магнитное поле

Для анализа возможности динамического нарушения симметрии удобно ввести безразмерные параметры  $x = \zeta^2 s$ ,  $\omega \equiv \sigma / \zeta$ ,  $\beta = m / \zeta$ ,  $B = eB / \zeta^2$ ,  $l = \lambda \zeta^2$ ,  $L = \Lambda / \zeta$ , где  $\zeta$  - произвольный параметр, совпадающий по размерности с вспомогательным полем  $\sigma$ , а  $L$  - безразмерный ультрафиолетовый параметр обрезания  $\Lambda$  который, как мы полагаем, может принимать произвольные значения.

Для удобства чтения дальнейших формул переобозначим эффективный потенциал, как  $v(\omega) \equiv V_{eff}(\sigma) / \zeta^4$ , тогда получим следующее выражение

$$v(\omega) = \frac{\omega^2}{2l} + \frac{B}{8\pi^2} \int_{1/L^2}^{\infty} \frac{dx}{x^2} e^{-x(\omega+\beta)^2} \coth(Bx). \quad (15)$$

Отсюда производная по вспомогательному полю  $\omega$  в точке 0 будет равна

$$v'(0) = -\frac{B\beta}{4\pi^2} \int_{1/L^2}^{\infty} \frac{dx}{x} e^{-x\beta^2} \coth(Bx). \quad (16)$$

Из (16) видно, что подинтегральная функция

$$f(x) = -\frac{B\beta}{4\pi^2 x} e^{-x\beta^2} \coth(Bx) \quad (17)$$

при  $\beta > 0$  всегда отрицательна, а, следовательно, и интеграл будет отрицательным при любых значениях параметров. Таким образом, в случае постоянного магнитного поля симметрия оказывается нарушенной всегда, см. также [9].

### Постоянное внешнее электрическое поле

Для исследования поведения эффективного потенциала в присутствии внешнего электрического поля введем безразмерное поле  $E = eE / \zeta^2$ , тогда эффективный потенциал примет вид

$$v(\omega) = \frac{\omega^2}{2l} + \frac{E}{8\pi^2} \int_{1/L^2}^{\infty} \frac{dx}{x^2} e^{-x(\omega+\beta)^2} \cot(Ex). \quad (18)$$

При анализе (18) следует иметь в виду, что квантовая часть этого потенциала содержит мнимое слагаемое, которое отвечает за рождение частиц. Если выбрать в качестве контура интегрирования контур, изображенный на рис.1, то мнимая часть интеграла (18) определится бесконечной суммой полувычетов в точках  $x_k = k\pi / E$ . Т.к. интеграл в (18) по полуокружности  $C_k$  равен

$$\int_{C_k} \frac{dx}{x^2} e^{-x(\omega+\beta)^2} \cot(Ex) = -i \frac{E}{k^2 \pi} \text{Exp}\left(-\frac{\pi(\omega+\beta)^2}{E} k\right). \quad (19)$$

Тогда мнимую часть эффективного потенциала можно записать как

$$\text{Im } v(\omega) = -\frac{E^2}{8\pi^3} \text{Li}_2\left(\text{Exp}\left(-\frac{\pi(\omega+\beta)^2}{E}\right)\right), \quad (20)$$

Рис.1. Контур интегрирования при обходе полюсов.

где  $\text{Li}_2(W)$  - полилогарифмическая функция.

Для того, чтобы использованный метод анализа эффективного потенциала был применим, необходимо, чтобы скорость рождения частиц была малой по сравнению с другими параметрами. Именно так и происходит в нашем случае, для используемых значений параметров порядка 1, мнимая часть эффективного потенциала имеет порядок  $10^{-2} - 10^{-4}$ .

Для исследования возможности динамического нарушения симметрии возьмем производную по вспомогательному полю  $\omega$ , приравняем ее нулю, и получим следующее уравнение на точки экстремума

$$\frac{\omega}{l} - \frac{E(\beta + \omega)}{4\pi^2} \int_{1/L^2}^{\infty} \frac{dx}{x} e^{-x(\omega+\beta)^2} \cot(Es) = 0. \quad (21)$$

Решение этого уравнения удобно представить графически. Для этого введем следующие обозначения

$$f_1(\omega) = \frac{\omega}{l} \quad (22)$$

и

$$f_2(\omega) = \frac{E(\beta + \omega)}{4\pi^2} \int_{1/L^2}^{\infty} \frac{dx}{x} e^{-x(\omega+\beta)^2} \cot(Es). \quad (23)$$

Построив графики этих функций, где  $E, \beta, L$  выступают в роли параметров, мы сможем судить о количестве решений уравнения (21). Очевидно, что график функции  $f_1(\omega)$  представляет собой прямую

выходящую из начала координат с наклоном  $\frac{1}{l} > 0$ .

Исходя из этого мы можем сделать вывод, что если график функции  $f_2(\omega)$  допускает одно пересечение с прямой  $f_1(\omega)$ , то существует только одна экстремальная точка эффективного потенциала  $\nu(\omega)$ , и она с необходимостью оказывается точкой минимума. И, следовательно, имеется динамическое нарушение симметрии и фазовый переход второго рода, а значит, существует ненулевая масса пропорциональная  $\sigma$ . Если же вид функции  $f_2(\omega)$  такой, что прямая выходящая из начала координат, может иметь две точки пересечения с этим графиком, то имеется динамическое нарушение симметрии и фазовый переход первого рода. При некоторых значениях параметров может оказаться, что графики функций  $f_1(\omega)$  и  $f_2(\omega)$  вообще не имеют точек пересечения, это может случиться тогда, когда график функции  $f_2(\omega)$  полностью лежит под осью абсцисс. Следовательно, в этом случае, симметрия будет восстановлена, а эффективная масса фермионов равна нулю.

Перейдем к рассмотрению конкретных значений параметров. Так, при  $E = 1, L = 1, 2, 3, \beta = 1$  имеем следующий график, рис.2. Отсюда видно, что при любом значении параметра  $l$  всегда существует одна точка экстремума, которая в силу граничных условий является точкой минимума эффективного потенциала, т.е. мы имеем фазовый переход второго рода. При увеличении параметра  $\beta$  график функции  $f_2(\omega)$  “прижимается” к оси абсцисс, т.е. значение  $\omega_{\min}$  уменьшается.

При  $E = 10, L = 1, 2, 3, \beta = 1$  график функции  $f_2(\omega)$  такой, что при любом значении

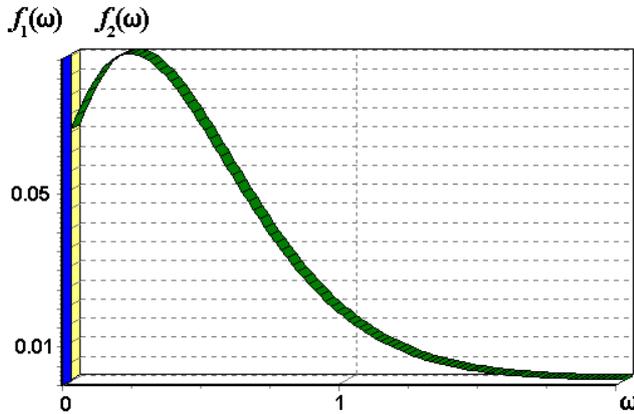


Рис. 2. График функции  $f_2(\omega)$  при  $E = 1, L = 1, 2, 3, \beta = 1$ .

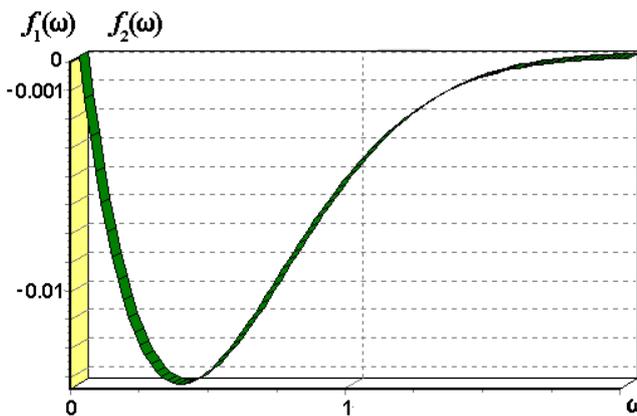


Рис. 2. График функции  $f_2(\omega)$  при  $E = 1, L = 1, 2, 3, \beta = 1$ .

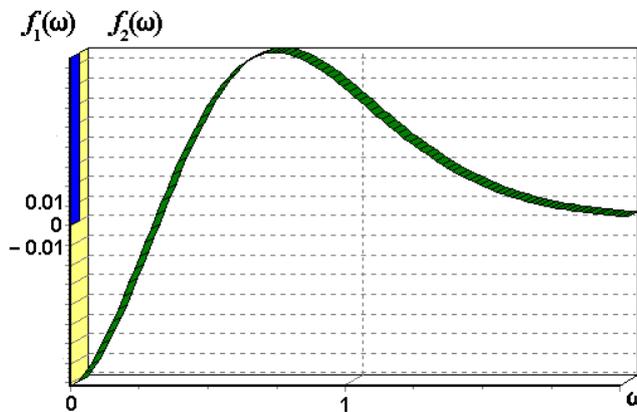


Рис. 3. График функции  $f_2(\omega)$  при  $E = 10, L = 1, 2, 3, \beta = 1,522$ .

параметра  $l$  симметрия нарушена. Однако при увеличении параметра до  $\beta = 1,522$ ,  $\omega_{\min}$  уменьшается и становится равной нулю (рис.3). При дальнейшем увеличении  $\beta$  симметрия является полностью восстановленной.

При  $E = 1$ ,  $L=1,23$ ,  $\beta = 0,77$  график функции  $f_2(\omega)$  выходит из начала координат и, значит, появляется возможность существования точки перегиба (в зависимости от параметра  $l$ ). При  $\beta = 0.7$  и меньше можно найти такие значения  $l$  при которых будет две точки экстремума, т.е. возможен фазовый переход первого рода, что демонстрирует рис.4.

Таким образом приведенные рисунки демонстрируют, что в данной модели имеется богатая картина фазовых состояний, которая при различных значениях параметров приводит либо фазовым переходам первого и второго родов, либо к восстановленной симметрии.

## ВЫВОДЫ

В настоящей работе показано, что корректный учет конечности параметра обрезания приводит к выводу о присутствии осцилляций фазовых состояний в массивной четырехфермионной модели во внешнем постоянном электрическом поле. Эти осцилляции генерируются как величиной параметра обрезания, так и значением напряженности электрического поля. Также показано, что наличие внешнего магнитного поля всегда приводит к нарушению симметрии. Исследование моделей с конечным параметром обрезания может оказаться важным в низкоэнергетической физике сильных взаимодействий, когда параметр обрезания имеет реальный физический смысл.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Я благодарен Шильнову Ю.И. за ценные рекомендации и советы

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Y. Nambu G. Jona-Lasinio // *Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity*. Phys. Rev. 1961. V. **122**. P. 345-360.
2. D. Gross, A. Neveu // *Dynamical Symmetry Breaking in Asymptotically free field theories*. Phys. Rev. 1974. D**10**. P. 3235-3253.
3. E. Fahri and R. Jackiw, Eds., *Dynamical Symmetry Breaking* (World Scientific, Singapore, 1981);  
T. Muta, K. Yamawaki, Eds., *Proceedings of the Workshop on Dynamical Symmetry Breaking* (Nagoya, 1990);  
W.A. Bardeen, J. Kodaira and T. Muta, Eds., *Proceedings of the International Workshop on Electroweak Symmetry Breaking*(World Scientific, Singapore, 1991).
4. J. Schwinger // *On Gauge Invariance and Vacuum Polarization*. Phys. Rev. 1951. V. **82**. P. 664-679.
5. M. Stone // *Lifetime and Decay of "Excited Vacuum" states of a Field Theory Associated with Nonabsolute Minima of its Effective Potential*. Phys. Rev. 1976. D**14**. P. 3568-3573.
6. H. Suganuma, T. Tatsumi // *On the Behavior of Symmetry and Phase Transitions in a Strong Electromagnetic Field*. Ann. Phys. 1991. V. **208**. P. 470-508.
7. C.N. Leung, Y.J. Ng and A.W. Ackley // *Schwinger – Dyson Equation Approach to Chiral Symmetry Breaking in an External Magnetic Field*. Phys. Rev. 1996. D**54**. P. 4181-4184.
8. A. Hazenfrantz, K. Jansen, J. Kuti, Y. Shen // *The Equivalence of the Top Quark Condensate and the Elementary Higgs Field*. Nucl. Phys. 1991. B**365**. P. 79-97.
9. Ю.И.Шильнов, А.Т.Котвицкий // *Осцилляции фазового состояния в четырехфермионной модели с высшими производными во внешнем электромагнитном поле*. Вестник ХНУ. 2000. Т. №**476**. серия «Физика». вып.4. С. 53-56.
10. E.S.Fradkin, D.M. Gitman and Sh.M. Shvartsman, *Quantum Electrodynamics with unstable vacuum* (Springer-Verlag, Berlin, 1991).
11. П.Рамон, *Теория поля*. – М.: Мир, 1984. – 336 с.

## PHASE OSCILLATIONS IN A MASSIVE FOUR –FERMION MODEL

A.T. Kotvytskiy

V.N. Karazin Kharkov National University, 61077, Svoboda sq.4.

E – mail: [Albert.T.Kotwicki@univer.kharkov.ua](mailto:Albert.T.Kotwicki@univer.kharkov.ua)

A massive four – fermion model has been considered in an external electromagnetic field. An effective potential in case of constant electric and magnetic fields has been calculated in the large – N expansion. Symmetry is always broken in the external constant magnetic field by the second kind of phase transition. The oscillations of the phase condition exist in the external constant electric field through the first and second kinds of phase transition.

**KEY WORDS:** four – fermion model, effective potential, dynamical symmetry breaking, oscillations of the phase condition, cut – off parametr