УДК 530.145

ТВИСТОРНАЯ СПИНОВАЯ ЧАСТИЦА

В.Г. Зима[*], С.А. Федорук[**]

[*]*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, 61077, Харьков, пл. Свободы,4*
[**]*Украинская инженерно-педагогическая академия, 61003, Харьков, ул. Университетская, 16*
e-mail: fed@postmaster.co.uk

Поступила в редакцию 20 июня 2004 г.

Установлено соответствие твисторной формулировки и формулировки в вещественном пространстве-времени массивных и безмассовых частиц произвольных спинов (спиральностей). Получены уравнения твисторных преобразований, осуществляющих взаимосвязь описания спиновой частицы в терминах вещественных пространственно-временных переменных и твисторного описания. Построено интегральное преобразование твисторного поля, полученного в результате первичного квантования твисторной формулировки массивной спиновой частицы. Получаемые после преобразования пространственно-временные спин-тензорные поля воспроизводят описания массивной спиновой частицы в терминах $(2J+1)$ - и $2(2J+1)$ -компонентных полей, полей Фирца-Паули, Баргмана-Вигнера и Рариты-Швингера.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: твисторы Пенроуза, спиновая частица, конформная симметрия, твисторные преобразования.

Твисторная теория, впервые введенная Пенроузом [1-3], играет важную роль в решении различных задач теоретической физики [4-6]. Помимо фундаментальной роли твисторов, они являются также мощным инструментом в анализе суперсимметричных моделей точечных и протяженных объектов. В отличие от пространственно-временного подхода, в котором пространственно-временные трансляции группы Пуанкаре реализованы посредством неоднородных преобразований, а действие конформных бустов конформной группы нелинейное, в твисторном пространстве конформная группа реализована однородными преобразованиями группы **SU(2,2)**. Твисторное пространство является четырехмерным комплексным векторным пространством, снабженным невырожденной эрмитовой формой сигнатуры 0, а сами твисторы суть элементы фундаментального представления группы **SU(2,2)**. Условия инцидентности устанавливают соответствие между объектами твисторного пространства и объектами комплексифицированного пространства-времени Минковского. Так, точки комплексифицированного пространства-времени представляются комплексными проективными прямыми проективного твисторного пространства, имеющего структуру $\mathbf{CP^3}$. В то же время, точки проективного твисторного пространства представляются вполне изотропными двумерными плоскостями комплексифицированного пространства-времени. Соответствие полей двух формализмов осуществляется интегрально-геометрическим преобразованием, которое является, фактически, обобщением классического преобразования Радона, переводящим комплексно-аналитические данные на твисторном пространстве в решения линейных уравнений безмассового поля.

Присущая твисторному описанию конформная инвариантность предполагает в качестве основного объекта рассмотрения в твисторном подходе безмассовую частицу или ее суперсимметричный аналог [7-21]. Твисторная формулировка безмассовой суперчастицы дает возможность провести ее ковариантное квантование [12-18], а также проясняет геометрический смысл фермионной κ - симметрии как локальной суперсимметрии [15-17]. Метод супервложений [22], использующий твисторный подход, позволяет сформулировать дважды суперсимметричное описание протяженных суперобъектов и дает дополнительную информацию о динамике супербран.

Связь твисторного описания с пространственно-временной формулировкой безмассовой частицы определяется уравнениями твисторных преобразований: представлением светоподобного импульса частицы в виде произведения двух спиноров и условиями инцидентности, устанавливающими соответствие между твисторами и пространственно-временными координатами. Но на классическом уровне, а именно, на уровне действий и уравнений движения, уравнения инцидентности приводят к нулевой спиральности частицы [18] при условии использования только одного твистора (что для твисторного описания безмассовой частицы вполне достаточно) и вещественных пространственно-временных координат. Классическое соответствие формулировок в случае ненулевого спина предполагает модификацию условий инцидентности при соответствующем выборе пространственно-временной формулировки спиновой частицы.

Твисторное описание массивной частицы с необходимостью требует использования не менее двух твисторов [1-3,23-26]. Другими словами, при описании массивного состояния используется несколько безмассовых состояний [25]. Это прямо следует из того, что времениподобный вектор энергии-импульса массивной частицы может быть разрешен с использованием двух или более спиноров. Но полное твисторное описание массивной частицы произвольного спина, включающее описание ее взаимодействия, к настоящему времени не установлено и является сейчас предметом детального изучения [27]. В отличие от безмассового случая, когда твисторное описание частицы произвольной спиральности достигается, в принципе, только с помощью твисторных переменных, массивный случай требует использования дополнительных переменных для описания спина. Как и в безмассовом случае, твисторная формулировка массивной спиновой частицы должна быть связана фундаментальными уравнениями твисторных преобразований с соответствующей пространственно-временной формулировкой. Более того, было бы привлекательным, если бы массивный и безмассовый случаи рассматривались единым образом. Это особенно важно в связи с интенсивным развитием в последнее время твисторной теории (супер)струны [28], спектр которой содержит как безмассовые, так и массивные моды.

В работе [29] предложена модель твисторной массивной частицы произвольного спина. После введения чисто калибровочных лоренцевых гармоник и канонического преобразования с последующей частичной фиксацией калибровки, исходная модель спиновой частицы с индексным спинором [30,31] воспроизводит твисторную формулировку массивной частицы в терминах двух твисторов Пенроуза и двух комплексных скаляров, играющих роль спиновых переменных. В итоге мы получаем одновременно и твисторную формулировку и условия твисторных преобразований, связывающих пространственно-временное и твисторное описания массивной спиновой частицы. В настоящей работе мы развиваем предложенный подход с учетом важного случая безмассовой частицы ненулевой спиральности.

ТВИСТОРНАЯ ФОРМУЛИРОВКА БЕССПИНОВОЙ ЧАСТИЦЫ

В пространственно-временной формулировке безмассовая частица описывается лагранжианом [32]

$$L^0_{space-time} = -\tfrac{1}{2} p_{\alpha\dot\alpha}\dot x^{\dot\alpha\alpha} + \tfrac{1}{2} V p_{\alpha\dot\alpha} p^{\dot\alpha\alpha}, \tag{1}$$

где координата x и импульс p являются пространственно-временными векторами, а скаляр V – множитель Лагранжа для массовой связи

$$-\tfrac{1}{2} p_{\alpha\dot\alpha} p^{\dot\alpha\alpha} = p^2 \approx 0 . \tag{2}$$

В работе мы используем обозначения из [33], в частности, $p_{\alpha\dot\alpha} = p_\mu \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}$, $x^{\dot\alpha\alpha} = x^\mu \sigma_\mu^{\dot\alpha\alpha}$, где матрицы σ_μ удовлетворяют $\sigma^{\dot\alpha\alpha}_{(\mu}\sigma_{\nu)\alpha\dot\beta} = -\eta_{\mu\nu}\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}$, где $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-,+,+,+)$.

Модель (1) инвариантна относительно глобальных конформных преобразований, которые включают

- обычные преобразования Пуанкаре

$$\delta x^{\dot\alpha\alpha} = a^{\dot\alpha\alpha} + x^{\dot\alpha\beta} l_\beta{}^\alpha + \bar l^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} x^{\dot\beta\alpha}, \qquad \delta p_{\alpha\dot\alpha} = -l_\alpha{}^\beta p_{\beta\dot\alpha} - p_{\alpha\dot\beta}\bar l^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha}, \qquad \delta V = 0 ; \tag{3}$$

- преобразования дилатаций

$$\delta x^{\dot\alpha\alpha} = x^{\dot\alpha\alpha} d , \qquad \delta p_{\alpha\dot\alpha} = -p_{\alpha\dot\alpha} d , \qquad \delta V = 2Vd ; \tag{4}$$

- нелинейные преобразования конформных бустов

$$\delta x^{\dot\alpha\alpha} = x^{\dot\alpha\beta} k_{\beta\dot\beta} x^{\dot\beta\alpha}, \qquad \delta p_{\alpha\dot\alpha} = -k_{\alpha\dot\beta} x^{\dot\beta\beta} p_{\beta\dot\alpha} - p_{\alpha\dot\beta} x^{\dot\beta\beta} k_{\beta\dot\alpha}, \qquad \delta V = 2(x^{\dot\alpha\alpha} k_{\alpha\dot\alpha})V . \tag{5}$$

Здесь матрицы инфинитезимальных параметров трансляций $a^{\dot\alpha\alpha}$ и бустов $k_{\alpha\dot\alpha}$ эрмитовы, дилатационный параметр d вещественный, а элементы бесследовых матриц $l_\alpha{}^\beta$, $\bar l^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} = \overline{(l_\alpha{}^\beta)}$ являются инфинитезимальными параметрами группы Лоренца **SL(2,C)**.

В твисторной формулировке [1-6] фазовое пространство безмассовой частицы описывается двумя вейлевскими спинорами λ_α и $\omega^{\dot\alpha}$, которые образуют четырехкомпонентный твистор Пенроуза $Z_a = (\lambda_\alpha, \omega^{\dot\alpha})$. Сопряженный твистор суть $\bar Z^a = g^{a\dot a}\bar Z_{\dot a} = (\bar\omega^\alpha, -\bar\lambda_{\dot\alpha})$, где $\bar\lambda_{\dot\alpha} = \overline{(\lambda_\alpha)}$, $\bar\omega^\alpha = \overline{(\omega^{\dot\alpha})}$ и $g_{a\dot b} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^\alpha{}_\beta \\ -\delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} & 0 \end{pmatrix}$ является метрическим тензором твисторного пространства. В терминах твисторных переменных лагранжиан безмассовой частицы записывается в виде [7,10-14,18,19]

$$L = -\tfrac{1}{2}(\dot{\bar Z}{}^a Z_a - \bar Z^a \dot Z_a) - N(\tfrac{i}{2}\bar Z^a Z_a + s), \tag{6}$$

где N является множителем Лагранжа для твисторной спиновой связи

$$\tfrac{i}{2}\bar Z^a Z_a + s = \tfrac{i}{2}(\bar\omega^\alpha\lambda_\alpha - \bar\lambda_{\dot\alpha}\omega^{\dot\alpha}) + s \approx 0 . \tag{7}$$

Компоненты твистора Z_a и его сопряженного $\bar Z^a$ канонически сопряжены друг другу: $\{Z_a, \bar Z^b\} = \delta_a^b$ или, в спинорных компонентах, $\{\lambda_\alpha, \bar\omega^\beta\} = \delta^\beta_\alpha$, $\{\bar\lambda_{\dot\alpha}, \omega^{\dot\beta}\} = \delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha}$.

Твисторная формулировка (6) инвариантна относительно линейных преобразований

$$\delta\begin{pmatrix}\lambda_\alpha \\ \omega^{\dot\alpha}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_\alpha{}^\beta - \tfrac{1}{2} d\delta_\alpha{}^\beta & -2k_{\alpha\dot\beta} \\ \tfrac{1}{2} a^{\dot\alpha\beta} & \bar l^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} + \tfrac{1}{2} d\delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_\beta \\ \omega^{\dot\beta}\end{pmatrix}, \tag{8}$$

оставляющих инвариантной норму твистора $\bar Z^a Z_a$. Преобразования (8) образуют группу **SU(2,2)**, являющуюся дважды накрывающей группы **SO(2,4)**, которая в свою очередь локально изоморфна конформной группе (3)-(5). В (8) все параметры преобразований имеют тот же смысл, что и в выражениях (3)-(5). Соответствующие преобразованиям (8) сохраняющиеся заряды

$$P_{\alpha\dot\alpha} = \lambda_\alpha \bar\lambda_{\dot\alpha}\,, \qquad M_{\alpha\beta} = i\lambda_{(\alpha}\bar\omega_{\beta)}\,, \qquad \bar M_{\dot\alpha\dot\beta} = i\bar\lambda_{(\dot\alpha}\omega_{\dot\beta)}\,, \qquad K^{\dot\alpha\alpha} = \omega^{\dot\alpha}\bar\omega^{\alpha}\,, \qquad D = \tfrac{1}{2}(\bar\omega^\alpha\lambda_\alpha + \bar\lambda_{\dot\alpha}\omega^{\dot\alpha})$$

приводят к следующему выражению псевдовектора Паули-Любанского[1]

$$W_{\alpha\dot\alpha} = P_\alpha{}^{\dot\beta}\bar M_{\dot\beta\dot\alpha} - P^{\beta}{}_{\dot\alpha} M_{\beta\alpha} = (-\tfrac{i}{2}\bar Z^a Z_a)P_{\alpha\dot\alpha}\,.$$

Таким образом, твисторная модель (6) описывает безмассовые частицы конечного спина ($P^2=0$, $W^2=0$). Спин (спиральность) определяется величиной $(-\frac{i}{2}\bar Z^a Z_a)$, которая, благодаря связи (7), на классическом уровне равна константе s.

Соответствие между твисторной (6) и пространственно-временной (1) формулировками задается [7-21] твисторным представлением светоподобного импульса

$$p_{\alpha\dot\alpha} = \lambda_\alpha\bar\lambda_{\dot\alpha} \tag{9}$$

и условиями инцидентности

$$\omega^{\dot\alpha} = \tfrac{1}{2}x^{\dot\alpha\alpha}\lambda_\alpha\,, \qquad\qquad \bar\omega^{\alpha} = \tfrac{1}{2}\bar\lambda_{\dot\alpha}x^{\dot\alpha\alpha}\,, \tag{10}$$

связывающими пространственно-временные координаты с твисторными переменными. При таком определении твисторных преобразований кинетический член в лагранжиане (1) переписывается в кинетический член твисторного лагранжиана (6), поскольку $p_{\alpha\dot\alpha}dx^{\dot\alpha\alpha} = (d\bar\omega^\alpha\lambda_\alpha - d\bar\lambda_{\dot\alpha}\omega^{\dot\alpha}) - (\bar\omega^\alpha d\lambda_\alpha - \bar\lambda_{\dot\alpha}d\omega^{\dot\alpha}) = d\bar Z^a Z_a - \bar Z^a dZ_a$.

Фундаментальные соотношения твисторных преобразований (9), (10) устроены так, что часть их, именно (9), разрешает массовую связь $p^2\approx 0$ (2) в твисторных переменных, тогда как условия инцидентности (10) разрешают твисторную связь $\frac{i}{2}\bar Z^a Z_a + s \approx 0$ (7), определяющую спин частицы. Но в случае использования условий инцидентности (10) мы автоматически получаем требование изотропности твистора

$$\bar Z^a Z_a = \bar\omega^\alpha\lambda_\alpha - \bar\lambda_{\dot\alpha}\omega^{\dot\alpha} = 0\,.$$

Поскольку твистор Z^a общего вида описывает классическую безмассовую частицу со спиральностью $-\frac{i}{2}\bar Z^a Z_a$ [1-6], изотропный твистор описывает безмассовую частицу нулевой спиральности $s=0$. Таким образом, базовые соотношения (9), (10) определяют соответствие между пространственно-временной (1) и твисторной (6) формулировками безмассовой частицы только нулевого спина (детальное обсуждение этого вопроса см. в [18]). Одним из используемых способов получения твисторной частицы ненулевой спиральности является введение ‘руками’ ненулевой константы s в спиновую связь $\bar Z Z - 2is \approx 0$ твисторного действия (6) при переходе от пространственно-временной формулировки к твисторной. Но равенство числа физических степеней свободы безмассовых частиц любых спиральностей не является аргументом в пользу корректности такой процедуры. Другой способ – это учет константы упорядочения, возникающей из-за присутствия в спиновой связи (7) произведений некоммутирующих переменных. В стандартных случаях упорядочения таким способом получаются частицы, спиральность которых не выше двух [12][2].

Соответствие пространственно-временной (1) и твисторной (6) формулировок при $s=0$ возможно сформулировать в комбинированном подходе [15-18], использующем как пространственно-временные, так и твисторные переменные. Лагранжиан

$$L = -\tfrac{1}{2}\lambda_\alpha\bar\lambda_{\dot\alpha}\dot x^{\dot\alpha\alpha}\,, \tag{11}$$

описывающий систему, классически эквивалентную системам (1) и (6), воспроизводит как связь твисторное разрешение светоподобного импульса $p_{\alpha\dot\alpha} = \lambda_\alpha\bar\lambda_{\dot\alpha}$. Эта связь вместе с остальными связями $\omega^{\dot\alpha}=0$, $\bar\omega^\alpha = 0$ образует систему связей первого и второго рода [18]. Лагранжиан эквивалентной системы

$$L = \tfrac{1}{2}\dot\lambda_\alpha\bar\lambda_{\dot\alpha}x^{\dot\alpha\alpha} + \tfrac{1}{2}\lambda_\alpha\dot{\bar\lambda}_{\dot\alpha}x^{\dot\alpha\alpha}\,, \tag{12}$$

[1] Поскольку спиноры λ_α и $\bar\omega^\alpha$ канонически сопряжены друг другу, мы используем следующие соглашения $\lambda^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\lambda_\beta$, $\bar\lambda^{\dot\alpha} = \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\bar\lambda_{\dot\beta}$, $\bar\omega^\alpha = \bar\omega_\beta\varepsilon^{\beta\alpha}$, $\omega^{\dot\alpha} = \omega_{\dot\beta}\varepsilon^{\dot\beta\dot\alpha}$, так что $\lambda^\alpha\bar\omega_\alpha = \lambda_\alpha\bar\omega^\alpha$, $\bar\lambda^{\dot\alpha}\omega_{\dot\alpha} = \bar\lambda_{\dot\alpha}\omega^{\dot\alpha}$ и $\{\lambda^\alpha, \bar\omega_\beta\} = \delta^\alpha_\beta$, $\{\bar\lambda^{\dot\alpha}, \omega_{\dot\beta}\} = \delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}$.

[2] Отметим, что применение более общего упорядочения [34] $qp \leftrightarrow \frac{1}{2}\{\hat q, \hat p\} + k[\hat q, \hat p]$, $k\in\mathbf{C}$ при переходе от канонических координат q и импульсов p к соответствующим операторам $\hat q$, $\hat p$ дает возможность получить безмассовые частицы произвольной спиральности в квантовом спектре.

равный с точностью до полной производной лагранжиану (11), воспроизводит как связи условия инцидентности $\omega^{\dot\alpha} = \frac{1}{2} x^{\dot\alpha\alpha}\lambda_\alpha$, $\bar\omega^{\alpha} = \frac{1}{2}\bar\lambda_{\dot\alpha} x^{\dot\alpha\alpha}$, а также связь $p_{\alpha\dot\alpha} = 0$.

В твисторном подходе Пенроуза частицы ненулевой спиральности описываются неизотропными твисторами, определенными в комплексифицированном пространстве Минковского. В этом случае пространственно-временные координаты $z^\mu = x^\mu + i y^\mu$ комплексны и матрица $z^{\dot\alpha\alpha} = z^\mu \sigma_\mu^{\dot\alpha\alpha}$ в общем неэрмитова. Соответствующие базовые соотношения

$$\omega^{\dot\alpha} = \tfrac{1}{2} z^{\dot\alpha\alpha}\lambda_\alpha, \qquad \bar\omega^{\alpha} = \tfrac{1}{2}\bar\lambda_{\dot\alpha}\bar z^{\dot\alpha\alpha}, \tag{13}$$

где $\bar z^{\dot\alpha\alpha} = \bar z^\mu \sigma_\mu^{\dot\alpha\alpha}$, определяют твистор, норма которого $\frac{i}{2}\bar Z^a Z_a = y^\mu \lambda\sigma_\mu\bar\lambda$, то есть твистор неизотропный, если $y^\mu \neq 0$ неколлинеарный вектору $\lambda\sigma_\mu\bar\lambda$. В отличие от теории поля, где комплексное пространство-время эффективно используется в определении свойств аналитичности и спектральности квантового поля, в моделях точечных и протяженных (супер)объектов более естественно и удобно работать с обычным вещественным пространством-временем. Более того, с учетом главной идеологии твисторного подхода как альтернативы пространственно-временному описанию [1-4], должна существовать пространственно-временная формулировка спиновой частицы, связанная с твисторной формулировкой (6) посредством твисторных преобразований, в которых, конечно, соотношения (10) модифицированы должным образом в случае частицы ненулевого спина. Ниже будут установлены модифицированные твисторные преобразования и будет показано, что пространственно-временной формулировкой, соответствующей твисторной (6), является модель спиновой частицы, предложенная в работах [30,31].

СПИНОВАЯ ЧАСТИЦА В ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ

Спиновая частица в формулировке с индексным спинором описывается пространственно-временным вектором x^μ и коммутирующим вейлевским спинором ζ^α. В формализме первого порядка ее лагранжиан имеет вид [30, 31]

$$L_{space-time} = -\tfrac{1}{2} p_{\alpha\dot\alpha}\dot\Pi^{\dot\alpha\alpha} + \tfrac{1}{2} V(p_{\alpha\dot\alpha}p^{\dot\alpha\alpha} - 2m^2) - \Lambda(\zeta^\alpha p_{\alpha\dot\alpha}\bar\zeta^{\dot\alpha} - s), \tag{14}$$

где бозонная ‘супер’форма

$$\Pi^{\dot\alpha\alpha} \equiv \dot\Pi^{\dot\alpha\alpha} d\tau \equiv dx^{\dot\alpha\alpha} + 2i\bar\zeta^{\dot\alpha} d\zeta^\alpha - 2i d\bar\zeta^{\dot\alpha}\zeta^\alpha .$$

Вектор p суть импульс частицы массы m, вещественные скаляры V и Λ – множители Лагранжа. Константа s определяет спин (спиральность) частицы спектра.

Система (14) инвариантна относительно следующих глобальных преобразований, включающих

- обычные преобразования Пуанкаре

$$\delta x^{\dot\alpha\alpha} = a^{\dot\alpha\alpha} + x^{\dot\alpha\beta} l_\beta{}^\alpha + \bar l^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} x^{\dot\beta\alpha}, \quad \delta p_{\alpha\dot\alpha} = -l_\alpha{}^\beta p_{\beta\dot\alpha} - p_{\alpha\dot\beta}\bar l^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha}, \quad \delta\zeta^\alpha = \zeta^\beta l_\beta{}^\alpha, \quad \delta\bar\zeta^{\dot\alpha} = \bar l^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\bar\zeta^{\dot\beta}, \quad \delta V = 0, \quad \delta\Lambda = 0; \tag{15}$$

- преобразования дилатаций (только в безмассовом случае $m = 0$)

$$\delta x^{\dot\alpha\alpha} = x^{\dot\alpha\alpha} d, \quad \delta p_{\alpha\dot\alpha} = -p_{\alpha\dot\alpha} d, \quad \delta\zeta^\alpha = \tfrac{1}{2} d\zeta^\alpha, \quad \delta\bar\zeta^{\dot\alpha} = \tfrac{1}{2} d\bar\zeta^{\dot\alpha}, \quad \delta V = 2Vd, \quad \delta\Lambda = 0; \tag{16}$$

- конформные бустовые преобразования (только в безмассовом случае $m = 0$)

$$\delta x^{\dot\alpha\alpha} = x^{\dot\alpha\beta} k_{\beta\dot\beta} x^{\dot\beta\alpha} - 4\zeta^\alpha\bar\zeta^{\dot\alpha}\zeta^\beta k_{\beta\dot\beta}\bar\zeta^{\dot\beta}, \quad \delta p_{\alpha\dot\alpha} = -(k_{\alpha\dot\beta} p_{\beta\dot\alpha} - p_{\alpha\dot\beta} k_{\beta\dot\alpha}) x^{\dot\beta\beta} - 2i(k_{\alpha\dot\beta} p_{\beta\dot\alpha} + p_{\alpha\dot\beta} k_{\beta\dot\alpha})\bar\zeta^{\dot\beta}\zeta^\beta, \tag{17}$$

$$\delta\zeta^\alpha = \zeta^\beta k_{\beta\dot\beta}(x^{\dot\beta\alpha} - 2i\bar\zeta^{\dot\beta}\zeta^\alpha), \quad \delta\bar\zeta^{\dot\alpha} = (x^{\dot\alpha\beta} + 2i\bar\zeta^{\dot\alpha}\zeta^\beta) k_{\beta\dot\beta}\bar\zeta^{\dot\beta}, \quad \delta V = 2(x^{\dot\alpha\alpha} k_{\alpha\dot\alpha}) V, \quad \delta\Lambda = 0;$$

- киральные спинорные преобразования

$$\delta\zeta^\alpha = (n - \tfrac{1}{2})\phi\zeta^\alpha, \quad \delta\bar\zeta^{\dot\alpha} = -(n - \tfrac{1}{2})\phi\bar\zeta^{\dot\alpha}, \quad \delta x^{\dot\alpha\alpha} = 0, \quad \delta p_{\alpha\dot\alpha} = 0, \quad \delta V = 0, \quad \delta\Lambda = 0 \tag{18}$$

с вещественной фазовой переменной ϕ.

Первые два члена лагранжиана (14)

$$L^\infty_{space-time} = -\tfrac{1}{2} p_{\alpha\dot\alpha}\dot\Pi^{\dot\alpha\alpha} + \tfrac{1}{2} V(p_{\alpha\dot\alpha}p^{\dot\alpha\alpha} - 2m^2) \tag{19}$$

инвариантны также относительно

- так называемых преобразований бозе-суперсимметрии

$$\delta x^{\dot\alpha\alpha} = 2i(\bar\zeta^{\dot\alpha}\varepsilon^\alpha - \bar\varepsilon^{\dot\alpha}\zeta^\alpha), \quad \delta\zeta^\alpha = \varepsilon^\alpha, \quad \delta\bar\zeta^{\dot\alpha} = \bar\varepsilon^{\dot\alpha}, \quad \delta p_{\alpha\dot\alpha} = 0, \quad \delta V = \delta\Lambda = 0 \tag{20}$$

с коммутирующим спинорным параметром ε^α, $\bar\varepsilon^{\dot\alpha} = \overline{(\varepsilon^\alpha)}$;

- так называемых бозе-суперконформных бустовых преобразований (только в случае $m = 0$)

$$\delta x^{\dot\alpha\alpha} = 2i(\bar\zeta^{\dot\alpha}\bar\psi_{\dot\beta} x^{\dot\beta\alpha} - x^{\dot\alpha\beta}\psi_\beta\zeta^\alpha) - 4\bar\zeta^{\dot\alpha}\zeta^\alpha(\zeta^\beta\psi_\beta + \bar\psi_{\dot\beta}\bar\zeta^{\dot\beta}), \quad \delta p_{\alpha\dot\alpha} = 4i(\psi_\alpha\zeta^\beta p_{\beta\dot\alpha} - p_{\alpha\dot\beta}\bar\zeta^{\dot\beta}\bar\psi_{\dot\alpha}), \tag{21}$$

$$\delta\zeta^\alpha = -4i\zeta^\alpha\zeta^\beta\psi_\beta + \bar\psi_{\dot\beta}(x^{\dot\beta\alpha} - 2i\bar\zeta^{\dot\beta}\zeta^\alpha), \quad \delta\bar\zeta^{\dot\alpha} = 4i\bar\psi_{\dot\beta}\bar\zeta^{\dot\beta}\bar\zeta^{\dot\alpha} + (x^{\dot\alpha\beta} + 2i\bar\zeta^{\dot\alpha}\zeta^\beta)\psi_\beta, \quad \delta V = -4iV(\zeta^\beta\psi_\beta - \bar\psi_{\dot\beta}\bar\zeta^{\dot\beta}),$$

где ψ_α, $\bar\psi_{\dot\alpha} = (\overline{\psi_\alpha})$ является коммутирующим спинором.

Ниже будет показано, что в терминах твисторных переменных преобразования симметрии (15)-(18), (20), (21) реализованы линейными преобразованиями. В безмассовом случае эти преобразования образуют группу **U(3,2)**.

Кроме связей, присутствующих в лагранжиане (14) явно, то есть массовой связи

$$T = \tfrac{1}{2}(p^2 + m^2) \approx 0 \qquad (22)$$

и спиновой связи

$$\zeta^\alpha p_{\alpha\dot\alpha}\bar\zeta^{\dot\alpha} - s \approx 0\,, \qquad (23)$$

гамильтонов анализ [30] показывает присутствие в системе также бозонных спинорных связей

$$d_{\zeta\alpha} \equiv ip_{\zeta\alpha} + p_{\alpha\dot\alpha}\bar\zeta^{\dot\alpha} \approx 0\,, \qquad \bar d_{\zeta\dot\alpha} \equiv -i\bar p_{\zeta\dot\alpha} + \zeta^\alpha p_{\alpha\dot\alpha} \approx 0\,. \qquad (24)$$

На поверхности связей спиновая связь (23) эквивалентна связи

$$S \equiv \tfrac{i}{2}(\zeta^\alpha p_{\zeta\alpha} - \bar p_{\zeta\dot\alpha}\bar\zeta^{\dot\alpha}) - s \approx 0\,. \qquad (25)$$

Связи T и S являются связями первого рода. Спинорные связи $d_{\zeta\alpha}$ и $\bar d_{\zeta\dot\alpha}$ являются связями второго рода в массивном случае, тогда как в случае безмассовой частицы – это смесь связей первого и второго рода. Вследствие присутствия в системе коммутирующих спинорных переменных, разделение спинорных связей по родам не вызывает проблем.

После квантования [30] волновая функция спиновой частицы $\Psi(\zeta,\bar\zeta)$ выражается через голоморфный полином $\Phi(\zeta)$, зависящий от ζ,

$$\Psi(\zeta,\bar\zeta) = e^{-\zeta\not{p}\bar\zeta}\Phi(\zeta)\,, \qquad \Phi(\zeta) = \zeta^{\alpha_1}\ldots\zeta^{\alpha_J}\phi_{\alpha_1\ldots\alpha_J}\,,$$

или антиголоморфный полином $\bar\Phi(\bar\zeta)$, зависящий от $\bar\zeta$,

$$\Psi(\zeta,\bar\zeta) = e^{\zeta\not{p}\bar\zeta}\bar\Phi(\bar\zeta)\,, \qquad \bar\Phi(\bar\zeta) = \bar\zeta^{\dot\alpha_1}\ldots\bar\zeta^{\dot\alpha_J}\bar\phi_{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_J}\,.$$

Обычные пространственно-временные поля $\phi_{\alpha_1\ldots\alpha_J}$, $\bar\phi_{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_J}$ удовлетворяют уравнению Клейна-Гордона $(p^2+m^2)\phi_{\alpha_1\ldots\alpha_J} = 0$, $(p^2+m^2)\bar\phi_{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_J} = 0$, и, в случае нулевой массы, уравнению Дирака-Вейля $p^{\dot\beta\alpha_1}\phi_{\alpha_1\ldots\alpha_J} = 0$, $p^{\dot\alpha_1\beta}\bar\phi_{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_J} = 0$. Таким образом, квантовый спектр системы содержит только одну частицу спина J, равного значению константы s, перенормированной константами упорядочения. В случае отсутствия потенциального члена $-\Lambda(\zeta^\alpha p_{\alpha\dot\alpha}\bar\zeta^{\dot\alpha} - s)$ в лагранжиане (14) система ослаблена отсутствием связи (25). В этом случае волновая функция выражается через полиномиальный ряд относительно ζ, $\bar\zeta$ нефиксированной степени однородности

$$\Phi(\zeta,\bar\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\zeta^{\alpha_1}\ldots\zeta^{\alpha_n}\bar\zeta^{\dot\alpha_1}\ldots\bar\zeta^{\dot\alpha_m}\phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_m}$$

и квантовый спектр содержит бесконечное число частиц произвольного спина (спиральности). Таким образом, индексный спинор играет роль, аналогичную роли спинорных переменных unfolded формулировки в теории поля частиц высших спинов [35].

ТВИСТОРНАЯ ФОРМУЛИРОВКА МАССИВНОЙ СПИНОВОЙ ЧАСТИЦЫ

В работе [29] была построена твисторная формулировка спиновой частицы ненулевой массы $m \neq 0$. В качестве исходной модели бралась пространственно-временная формулировка спиновой частицы, рассмотренная в предыдущем разделе. Для перехода к твисторной формулировке, в систему, описываемую лагранжианом (14), вводятся чисто калибровочные спинорные переменные, которые, после канонического преобразования, определяют компоненты твисторов. В качестве калибровочных спиноров в работе [29] рассматривались лоренцевы спинорные гармоники [36,37,34]. Калибровочный характер гармоник легко контролируется гармоническими связями, вид которых однозначно определяется геометрией группы Лоренца. В результате канонического преобразования и последующих частичных фиксаций калибровок, полностью исключающих пространственно-временные переменные, получаем твисторную формулировку массивной спиновой частицы. Условия фиксации калибровки имеют прозрачный физический смысл: они определяют систему покоя массивной частицы в гармоническом базисе.

В твисторной формулировке массивная спиновая частица описывается двумя парами ($i = 1,2$) вейлевских спиноров λ_α^i, $\bar\lambda_{\dot\alpha i} = (\overline{\lambda_\alpha^i})$, $\bar\omega_i^\alpha$, $\omega^{\dot\alpha i} = (\overline{\bar\omega_i^\alpha})$ и двумя комплексными скалярами ξ^i, $\bar\xi_i = (\overline{\xi^i})$, канонические коммутационные соотношения для которых $\{\lambda_\alpha^i, \bar\omega_j^\beta\} = \delta_\alpha^\beta\delta_j^i$, $\{\bar\lambda_{\dot\alpha i}, \omega^{\dot\beta j}\} = \delta_{\dot\alpha}^{\dot\beta}\delta_i^j$, $\{\xi^i, \bar\xi_j\} = -\tfrac{i}{2}\delta_j^i$. С точностью до множителя $m^{1/2}$ твисторные спиноры λ^i_α, $\bar\lambda_{\dot\alpha i}$ совпадают с лоренцевыми гармониками, а скаляры ξ^i, $\bar\xi_i$ – со свертками индексного спинора и гармоник, то есть последние являются, фактически, компонентами индексного спинора в гармоническом базисе. Твисторные преобразования, связывающие твисторные и пространственно-временные переменные, имеют вид

$$p_{\alpha\dot\alpha} = \lambda^i_\alpha \bar\lambda_{\dot\alpha i}, \tag{26}$$

$$\omega^{\dot\alpha i} = \tfrac{1}{2} x^{\dot\alpha\alpha}\lambda^i_\alpha - i\xi^i \bar\zeta^{\dot\alpha}, \qquad \bar\omega^\alpha_i = \tfrac{1}{2}\bar\lambda_{\dot\alpha i} x^{\dot\alpha\alpha} + i\bar\xi_i \zeta^\alpha, \tag{27}$$

$$\xi^i = \zeta^\alpha \lambda^i_\alpha, \qquad \bar\xi_i = \bar\lambda_{\dot\alpha i}\bar\zeta^{\dot\alpha}. \tag{28}$$

Фазовое пространство массивной спиновой частицы ограничено связями

$$h \equiv \lambda^{\alpha i}\lambda_{\alpha i} + 2m \approx 0, \qquad \bar h \equiv \bar\lambda_{\dot\alpha i}\bar\lambda^{\dot\alpha i} + 2m \approx 0, \tag{29}$$

$$D_i{}^j \equiv \tfrac{i}{2}(\bar\omega^\alpha_i \lambda^j_\alpha - \bar\lambda_{\dot\alpha i}\omega^{\dot\alpha j}) + \bar\xi_i \xi^j \approx 0, \tag{30}$$

$$S \equiv \bar\xi_i \xi^i - s \approx 0, \tag{31}$$

$$B_0 \equiv \bar\omega^\alpha_i \lambda^i_\alpha + \bar\lambda_{\dot\alpha i}\omega^{\dot\alpha i} \approx 0. \tag{32}$$

Связи ($h - \bar h$, D_0) и ($h + \bar h$, B_0), где $D_0 = D_i{}^i$ – следовая часть связей (30), образуют пары сопряженных связей второго рода. Остальные связи являются связями первого рода.

В каждой паре связей второго рода одну из связей можно рассматривать как условия фиксации калибровки для другой связи этой пары. Из четырех связей второго рода две связи играют выделенную роль. Именно, связь

$$M \equiv h + \bar h \equiv \lambda^{\alpha i}\lambda_{\alpha i} + \bar\lambda_{\dot\alpha i}\bar\lambda^{\dot\alpha i} + 4m \approx 0, \tag{33}$$

содержащая массовый параметр, является аналогом массовой связи в твисторном формализме, тогда как связь $D_0 \approx 0$ определяет спин частицы после квантования. Следовательно, вместо системы со связями (29)-(32) мы можем рассматривать без потери общности эквивалентную систему только со связями первого рода (33), (30), (31), а связи $h - \bar h$ и B_0 опускаем, рассматривая их как условия фиксации калибровки.

Спиноры λ^i и ω^i являются компонентами двух твисторов (битвистора) $Z^i_a = (\lambda^i_\alpha, \omega^{\dot\alpha i})$. После введения стандартным способом сопряженных твисторов $\bar Z^a_i = (\bar\omega^\alpha_i, -\bar\lambda_{\dot\alpha i})$, кинетический член лагранжиана (14) записывается в виде $-\tfrac{1}{2} p_{\alpha\dot\alpha}\Pi^{\dot\alpha\alpha} = \tfrac{1}{2}(\bar Z^a_i dZ^i_a - d\bar Z^a_i Z^i_a) + i(d\bar\xi_i \xi^i - \bar\xi_i d\xi^i)$, тогда как твисторные связи (29), (30) принимают вид

$$h = Z^i_a I^{ab} Z_{bi} + 2m \approx 0, \qquad \bar h = \bar Z^a_i I_{ab} \bar Z^{bi} + 2m \approx 0, \qquad D_i{}^j = \tfrac{i}{2}\bar Z^a_i Z^j_a + \bar\xi_i \xi^j \approx 0$$

где $I^{ab} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $I_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} \end{pmatrix}$ – так называемые бесконечно удаленные твисторы [1-6]. Таким образом, в твисторном формализме массивная спиновая частица описывается лагранжианом

$$L_{twistor} = \tfrac{1}{2}(\bar Z^a_i \dot Z^i_a - \dot{\bar Z}{}^a_i Z^i_a) + i(\dot{\bar\xi}_i \xi^i - \bar\xi_i \dot\xi^i) - \Lambda_m M - \Lambda_j{}^i D_i{}^j - \Lambda_s S, \tag{34}$$

где Λ_m, $\Lambda_j{}^i$ и Λ_s являются множителями Лагранжа для твисторных связей (33), (30) и (31).

ТВИСТОРНАЯ ФОРМУЛИРОВКА БЕЗМАССОВОЙ ЧАСТИЦЫ НЕНУЛЕВОЙ СПИРАЛЬНОСТИ

В случае нулевой массы $m = 0$ спиноры λ^i_α пропорциональны друг другу, $\lambda^1_\alpha \propto \lambda^2_\alpha$, вследствие кинематических связей $\lambda^{\alpha 1}\lambda^2_\alpha = 2m$ (29). Без потери общности мы можем оставить в твисторной формулировке только один спинор λ_α, разрешающий светоподобный вектор энергии-импульса p_μ. Уравнения твисторных преобразований (26)-(28) для безмассовой частицы принимают следующий вид

$$p_{\alpha\dot\alpha} = \lambda_\alpha \bar\lambda_{\dot\alpha}, \tag{35}$$

$$\omega^{\dot\alpha} = \tfrac{1}{2} x^{\dot\alpha\alpha}\lambda_\alpha - i\xi\bar\zeta^{\dot\alpha}, \qquad \bar\omega^\alpha = \tfrac{1}{2}\bar\lambda_{\dot\alpha} x^{\dot\alpha\alpha} + i\bar\xi\zeta^\alpha, \tag{36}$$

$$\xi = \zeta^\alpha \lambda_\alpha, \qquad \bar\xi = \bar\lambda_{\dot\alpha}\bar\zeta^{\dot\alpha}. \tag{37}$$

Здесь λ_α, $\omega^{\dot\alpha}$ и $\bar\lambda_{\dot\alpha} = \overline{(\lambda_\alpha)}$, $\bar\omega^\alpha = \overline{(\omega^{\dot\alpha})}$ являются спинорными компонентами твистора $Z_a = (\lambda_\alpha, \omega^{\dot\alpha})$ и его сопряженного $\bar Z^a = (\bar\omega^\alpha, -\bar\lambda_{\dot\alpha})$, тогда как коммутирующий комплексный скаляр ξ играет роль спиновой переменной в твисторном формализме.

Физический сектор фазового пространства безмассовой частицы ограничен связями первого рода

$$D_0 \equiv \tfrac{i}{2}(\bar{\omega}^{\alpha}\lambda_{\alpha} - \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\omega^{\dot{\alpha}}) + \bar{\xi}\xi = \tfrac{i}{2}\bar{Z}^{a}Z_{a} + \bar{\xi}\xi \approx 0\,, \qquad (38)$$

$$S \equiv \bar{\xi}\xi - s \approx 0\,. \qquad (39)$$

Эти связи являются следствиями связей (29)-(32) в случае нулевой массы и использования одного твистора. Наличие связи (38) следует также из выражений твисторных преобразований (36), (37). Связь (39), которая представляет собой спиновую связь (23) $\zeta^{\alpha}p_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} - s \approx 0$, записанную с помощью (35) и (37) в терминах твисторных переменных, фиксирует спиральность частицы. Лагранжиан безмассовой спиновой частицы в твисторном формализме имеет вид

$$L_{twistor} = \tfrac{1}{2}(\bar{Z}^{a}\dot{Z}_{a} - \dot{\bar{Z}}^{a}Z_{a}) + i(\dot{\bar{\xi}}\xi - \bar{\xi}\dot{\xi}) - \Lambda D_0 - \Lambda_s S\,. \qquad (40)$$

Комплексный скаляр ξ в формулировке (40) является вспомогательным. После исключения его с помощью связи первого рода (39) лагранжиан (40) принимает вид лагранжиана (6), описывающего безмассовые частицы ненулевой спиральности. Получение при переходе от пространственно-временной к твисторной формулировке неизотропного твистора произошло благодаря присутствию вторых слагаемых в твисторных преобразованиях (36). Наличие таких слагаемых в условиях инцидентности неизотропного твистора, записанных в вещественном пространстве-времени, хорошо известно [1-3]. Вещественные лучи, соответствующие неизотропному твистору с условиями инцидентности (36), образуют так называемые конгруэнции Робинсона.

Условия инцидентности (36), которые можно рассматривать как определение спинора ω, можно представить в виде

$$\bar{\omega}^{\alpha} - i\bar{\xi}\zeta^{\alpha} = \tfrac{1}{2}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}x^{\dot{\alpha}\alpha}\,, \qquad \omega^{\dot{\alpha}} + i\xi\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} = \tfrac{1}{2}x^{\dot{\alpha}\alpha}\lambda_{\alpha}\,.$$

Такая запись показывает, что переход от описания состояний нулевой спиральности к описанию состояний ненулевой спиральности достигается за счет твисторного сдвига спинора ω

$$\bar{\omega}^{\alpha} \to \bar{\omega}^{\alpha} - i\bar{\xi}\zeta^{\alpha}\,, \qquad \omega^{\dot{\alpha}} \to \omega^{\dot{\alpha}} + i\xi\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} \qquad (41)$$

в направлении спинора ζ. Поскольку свертка спиноров ζ и λ ненулевая, $\zeta\lambda \neq 0$, мы получаем изменение спиральности

$$\tfrac{i}{2}(\bar{\omega}^{\alpha}\lambda_{\alpha} - \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\omega^{\dot{\alpha}}) \to \tfrac{i}{2}(\bar{\omega}^{\alpha}\lambda_{\alpha} - \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\omega^{\dot{\alpha}}) + \bar{\xi}\xi = \tfrac{i}{2}(\bar{\omega}^{\alpha}\lambda_{\alpha} - \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\omega^{\dot{\alpha}}) + s\,.$$

Твисторный сдвиг (41) отличается от твисторного сдвига [20]

$$\bar{\omega}^{\alpha} \to \bar{\omega}^{\alpha} + l\lambda^{\alpha}\,, \qquad \omega^{\dot{\alpha}} \to \omega^{\dot{\alpha}} + l\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \qquad (42)$$

в направлении спинора λ. Сдвиг (42) приводит к модификации взаимодействия частицы [20] (или струны), но оставляет неизменной спиральность, поскольку при (42) $\bar{\omega}^{\alpha}\lambda_{\alpha} - \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\omega^{\dot{\alpha}} = \mathrm{inv}$. Отметим, что твисторный сдвиг, аналогичный сдвигу (42), рассматривался в [38] при описании AdS_5 частицы.

Твисторные преобразования (35)-(37) аналогичны преобразованиям, возникающим при твисторном описании суперчастицы и определяющим супертвистор Фербера. Поэтому напрашивается объединить координаты твистора $Z_a = (\lambda_{\alpha}, \omega^{\dot{\alpha}})$ и комплексный скаляр ξ в один объект

$$\boldsymbol{Z}_A = (Z_a;\xi) = (\lambda_{\alpha}, \omega^{\dot{\alpha}};\xi)\,, \qquad (43)$$

имеющем пять комплексных компонент и который может быть назван как бозонный супертвистор. Объединяя сопряженные величины в сопряженный бозонный супертвистор

$$\bar{\boldsymbol{Z}}_{\dot{A}} = (\bar{Z}_{\dot{a}};\bar{\xi}) = (\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}, \bar{\omega}^{\alpha};\bar{\xi})\,, \qquad \bar{\boldsymbol{Z}}^{A} = g^{A\dot{B}}\bar{\boldsymbol{Z}}_{\dot{B}} = (\bar{Z}^{a};-2i\bar{\xi}) = (\bar{\omega}^{\alpha}, -\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}};-2i\bar{\xi})\,,$$

где $g^{A\dot{B}} = \begin{pmatrix} g^{a\dot{b}} & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$ лагранжиан (40) без последнего потенциального члена $-\Lambda_s(\bar{\xi}\xi - j)$ принимает вид

$$L^{\infty}_{twistor} = \tfrac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{Z}}^{A}\dot{\boldsymbol{Z}}_{A} - \dot{\bar{\boldsymbol{Z}}}^{A}\boldsymbol{Z}_{A}) - \Lambda\bar{\boldsymbol{Z}}^{A}\boldsymbol{Z}_{A}\,. \qquad (44)$$

В переменных α, β, γ, δ, определяемых посредством выражений $\lambda_1 = i(\alpha+\beta)$, $\lambda_2 = i(\gamma+\delta)$, $\omega^1 = \alpha-\beta$, $\omega^2 = \gamma-\delta$, норма бозонного супертвистора $\tfrac{i}{2}\bar{\boldsymbol{Z}}^{A}\boldsymbol{Z}_{A} = \tfrac{i}{2}(\bar{\omega}^{\alpha}\lambda_{\alpha} - \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\omega^{\dot{\alpha}}) + \bar{\xi}\xi$, участвующего в построении лагранжиана (44), принимает вид

$$\tfrac{i}{2}\bar{\boldsymbol{Z}}^{A}\boldsymbol{Z}_{A} = \bar{\beta}\beta + \bar{\delta}\delta + \bar{\xi}\xi - \bar{\alpha}\alpha - \bar{\gamma}\gamma\,,$$

то есть является квадратичной эрмитовой формой сигнатуры $(+++--)$. Таким образом, лагранжиан (44), описывающий бесконечное множество безмассовых частиц всех спиральностей, инвариантен относительно глобальных преобразований группы **U(3,2)**. В инфинитезимальной форме эти преобразования принимают вид

$$\begin{pmatrix}\lambda_\alpha \\ \omega^{\dot\alpha} \\ \xi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_\alpha{}^\beta - \frac{1}{2}(d - i\phi)\delta_\alpha{}^\beta & -2k_{\alpha\dot\beta} & 4i\psi_\alpha \\ \frac{1}{2}a^{\dot\alpha\beta} & -\bar l^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} + \frac{1}{2}(d + i\phi)\delta_\alpha{}^\beta & -2i\bar\varepsilon^{\dot\alpha} \\ \varepsilon^\beta & 2\bar\psi_{\dot\beta} & ni\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_\beta \\ \omega^{\dot\beta} \\ \xi\end{pmatrix}. \qquad (45)$$

После использования условий (35)-(37) эти преобразования становятся преобразованиями (15)-(18), (20), (21), действующими на переменные пространственно-временной формулировки частицы. Таким образом, так называемые преобразования бозе-суперсимметрии (20) и бозе-суперконформные бустовые преобразования (21) входят в линейную группу **U(3,2)**, которая является аналогом суперконформной группы твисторной формулировки безмассовых частиц высших спинов.

ТВИСТОРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАССИВНОГО ПОЛЯ

Каноническое квантование массивной спиновой частицы в твисторной формулировке (34) выполнено в работе [29]. Волновая функция $\Psi_M(\lambda,\bar\lambda)$ в спектре зависит от половины спинорных компонент битвистора λ^i_α, $\bar\lambda_{\dot\alpha i}$, удовлетворяющих соотношениям (29), и определена в пространстве чисел заполнения операторов рождения и уничтожения двухмерного осциллятора, в терминах которых реализованы спиновые переменные ξ^i, $\bar\xi_i$. Вторая зависимость волновой функции определяется ее внешним индексом. Связи, накладываемые на волновую функцию, образуют алгебру **SU(2)**-преобразований, действующих на индексы i спиноров λ^i_α, $\bar\lambda_{\dot\alpha i}$ и на внешний индекс M волновой функции:

$$\Psi'_M(\lambda') = D^J_{MN}(h)\Psi_M(\lambda),$$

где $h \in$ **SU(2),** $\lambda'^i_\alpha = h^i_j\lambda^j_\alpha$, а D^J_{MN} суть матрица **SU(2)**-преобразований веса J. То есть, твисторное поле определено в действительности на однородном пространстве **SL(2,C)/SU(2)**. Число J, равное константе s, перенормированной константами упорядочения, определяет спин частицы. Индекс M неприводимого представления веса J является собирательным индексом симметризованного произведения $2J$ изоспиновых индексов $i_1, i_2, \ldots, i_{2J} = 1,2$. Таким образом, твисторным полем, описывающим массивную частицу спина J, является поле $\Psi_{i_1\ldots i_{2J}}(\lambda,\bar\lambda)$, симметричное относительно всех внешних **SU(2)**-индексов.

Связь обычных пространственно-временных спин-тензорных полей $\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_{2J}}(x)$ с твисторными полями $\Psi_{i_1\ldots i_{2J}}(\lambda,\bar\lambda)$ устанавливается посредством интегрального преобразования. Сворачивая **SU(2)**-индексы твисторного поля $\Psi_{i_1\ldots i_{2J}}(\lambda,\bar\lambda)$ с **SU(2)**-индексами спиноров $\lambda^{i_1}_{\alpha_1}, \ldots, \lambda^{i_{2J}}_{\alpha_{2J}}$, получаем **SU(2)**-инвариантное выражение, которое, будучи лоренцевым спин-тензором и **SU(2)**-скаляром, определено на однородном пространстве **SL(2,C)/SU(2)**. После интегрирования этого выражения со стандартной экспонентой $e^{ix^\mu p_\mu}$, где $p_\mu = -\frac{1}{2}p_{\alpha\dot\alpha}\sigma^{\dot\alpha\alpha}_\mu = -\frac{1}{2}\lambda^i\sigma_\mu\bar\lambda_i$, получаем обычное пространственно-временное поле[3]

$$\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_{2J}}(x) = \int d^3\lambda\, e^{-\frac{i}{2}x^\mu\lambda^k\sigma_\mu\bar\lambda_k}\,\lambda^{i_1}_{\alpha_1}\ldots\lambda^{i_{2J}}_{\alpha_{2J}}\Psi_{i_1\ldots i_{2J}}(\lambda,\bar\lambda). \qquad (46)$$

Здесь $d^3\lambda$ – инвариантная мера пространства **SL(2,C)/SU(2)**. Поле (46) автоматически удовлетворяет массивному уравнению Клейна-Гордона $(\partial^\mu\partial_\mu - m^2)\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_{2J}}(x) = 0$ благодаря присутствию экспоненты в подынтегральном выражении, полностью симметрично в спинорных индексах, $\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_{2J}}(x) = \Phi_{(\alpha_1\ldots\alpha_{2J})}(x)$, и дает стандартное $(2J+1)$-компонентное полевое описание массивной частицы спина J [41].

Другое описание массивной частицы спина J получается в результате свертки твисторного поля $\Psi_{i_1\ldots i_{2J}}(\lambda,\bar\lambda)$ со спинорами $\bar\lambda^{i_1}_{\dot\alpha_1}, \ldots, \bar\lambda^{i_{2J}}_{\dot\alpha_{2J}}$. Как результат получаем пространственно-временное поле

$$\Phi^{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{2J}}(x) = \int d^3\lambda\, e^{-\frac{i}{2}x^\mu\lambda^k\sigma_\mu\bar\lambda_k}\,\bar\lambda^{\dot\alpha_1 i_1}\ldots\bar\lambda^{\dot\alpha_{2J} i_{2J}}\Psi_{i_1\ldots i_{2J}}(\lambda,\bar\lambda) \qquad (47)$$

только с точечными спинорными индексами. Поле (47), удовлетворяющее уравнению Клейна-Гордона и полностью симметричное в спинорных индексах, определяет $(2J+1)$-компонентное полевое описание массивной частицы спина J в терминах точечных спиноров.

Поля (46) и (47), рассматриваемые вместе, определяют $2(2J+1)$-компонентное полевое описание массивной частицы спина J [41]. Поля (46) и (47) связаны друг с другом уравнениями

---

[3] Для безмассового поля подобные интегральные преобразования рассматривались в [34, 37, 39, 40].

$$(i\partial_{\mu_1}\sigma^{\mu_1}_{\alpha_1\dot\beta_1})\ldots(i\partial_{\mu_{2J}}\sigma^{\mu_{2J}}_{\alpha_{2J}\dot\beta_{2J}})\Phi^{\dot\beta_1\ldots\dot\beta_{2J}} = m^{2J}\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_{2J}}\,, \quad (i\partial^{\mu_1}\sigma^{\dot\alpha_1\beta_1}_{\mu_1})\ldots(i\partial^{\mu_{2J}}\sigma^{\dot\alpha_{2J}\beta_{2J}}_{\mu_{2J}})\Phi_{\beta_1\ldots\beta_{2J}} = m^{2J}\Phi^{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{2J}}\,. \quad (48)$$

При построении **SU(2)**-инварианта часть **SU(2)**-индексов твисторного поля $\Psi_{i_1\ldots i_{2J}}(\lambda,\bar\lambda)$ может быть свернута со спинорами λ^i_α, тогда как оставшиеся индексы – со спинорами $\bar\lambda^i_{\dot\alpha}$. В результате получаем пространственно-временное поле

$$\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}^{\dot\alpha_{n+1}\ldots\dot\alpha_{2J}}(x) = \int d^3\lambda\, e^{-\frac{i}{2}x^\mu\lambda^k\sigma_\mu\bar\lambda_k}\,\lambda^{i_1}_{\alpha_1}\ldots\lambda^{i_n}_{\alpha_n}\bar\lambda^{\dot\alpha_{n+1}i_{n+1}}\ldots\bar\lambda^{\dot\alpha_{2J}i_{2J}}\Psi_{i_1\ldots i_{2J}}(\lambda,\bar\lambda) \quad (49)$$

с n неточечными и $2J-n$ точечными спинорными индексами. По построению, поля (49) полностью симметричные в отношении всех точечных и неточечных индексов, $\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}^{\dot\alpha_{n+1}\ldots\dot\alpha_{2J}} = \Phi_{(\alpha_1\ldots\alpha_n)}{}^{(\dot\alpha_{n+1}\ldots\dot\alpha_{2J})}$, удовлетворяют массивному уравнению Клейна–Гордона $(\partial^\mu\partial_\mu - m^2)\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}^{\dot\alpha_{n+1}\ldots\dot\alpha_{2J}}(x) = 0$ и условию поперечности

$$\partial^\mu\sigma_\mu{}^{\alpha_1}{}_{\dot\alpha_{n+1}}\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}^{\dot\alpha_{n+1}\ldots\dot\alpha_{2J}}(x) = 0\,. \quad (50)$$

Массивную частицу спина J описывают поля (49), в которых полное число точечных и неточечных индексов равно J. Эти поля связаны друг с другом уравнениями Фирца-Паули [42]

$$i\partial^\mu\sigma^{\dot\beta\alpha_n}_\mu\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}{}^{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{2J-n}} = m\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}}{}^{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{2J-n}\dot\beta}\,, \qquad i\partial_\mu\sigma^\mu_{\beta\dot\alpha_n}\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_{2J-n}}{}^{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_n} = m\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_{2J-n}\beta}{}^{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{n-1}}\,. \quad (51)$$

Можно объединить поля (49) $\Phi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2J-1}\alpha_{2J}}$, $\Phi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{2J-1}}{}^{\dot\alpha_{2J}}$,…, $\Phi_{\alpha_1}{}^{\dot\alpha_2\ldots\dot\alpha_{2J-1}\dot\alpha_{2J}}$, $\Phi^{\dot\alpha_1\dot\alpha_2\ldots\dot\alpha_{2J-1}\dot\alpha_{2J}}$ с фиксированным J в одно поле $\Phi_{a_1\ldots a_{2J}}$, дираковские индексы которого $a = 1,2,3,4$ являются собирательными индексами для верхнего неточечного вейлевского индекса $\alpha = 1,2$ и нижнего точечного $\dot\alpha = 1,2$, то есть

$$\Phi_{a_1a_2\ldots a_{2J}} = \begin{pmatrix}\Phi_{\alpha_1a_2\ldots a_{2J}}\\ \Phi^{\dot\alpha_1}{}_{a_2\ldots a_{2J}}\end{pmatrix} \quad (52)$$

и аналогично для остальных индексов $a_2,\ldots,\ a_{2J}$. Это поле полностью симметрично по всем дираковским индексам $\Phi_{a_1a_2\ldots a_{2J}} = \Phi_{(a_1a_2\ldots a_{2J})}$ и удовлетворяет уравнению

$$i\partial^\mu\gamma_{\mu a_1}{}^{b_1}\Phi_{b_1a_2\ldots a_{2J}} = m\Phi_{a_1a_2\ldots a_{2J}}\,,$$

где $\gamma_\mu = \begin{pmatrix}0 & \sigma^{\dot\alpha\beta}_\mu\\ \sigma_{\mu\alpha\dot\beta} & 0\end{pmatrix}$ – матрицы Дирака в вейлевском представлении. Таким образом, поле (52) дает нам описание массивной частицы спина J в формализме Баргмана-Вигнера [43].

Пара из неточечного $\alpha=1,2$ и точечного $\dot\alpha=1,2$ индексов превращается в четырехкомпонентный векторный индекс $\mu=1,2,3,4$ с помощью σ- матриц Паули. Поэтому, из полей (49) при полуцелом J могут быть построены спин-тензорные поля

$$\Phi_{\mu_1\ldots\mu_{[J]}\alpha} = \sigma_{\mu_1\dot\alpha_1}^{\alpha_1}\ldots\sigma_{\mu_{[J]}\dot\alpha_{[J]}}^{\alpha_{[J]}}\Phi^{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{[J]}}_{\alpha_1\ldots\alpha_{[J]}\alpha}\,, \qquad \Phi_{\mu_1\ldots\mu_{[J]}}{}^{\dot\alpha} = \sigma_{\mu_1\dot\alpha_1}^{\alpha_1}\ldots\sigma_{\mu_{[J]}\dot\alpha_{[J]}}^{\alpha_{[J]}}\Phi^{\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_{[J]}\dot\alpha}_{\alpha_1\ldots\alpha_{[J]}}\,,$$

где $[J] = J - \frac{1}{2}$ – целая часть J, оставшиеся вейлевские спинорные индексы, которых объединяются в дираковский спинорный индекс $a = 1,2,3,4$. В результате получаем поле

$$\Phi_{\mu_1\ldots\mu_{[J]}a} = \begin{pmatrix}\Phi_{\mu_1\ldots\mu_{[J]}\alpha}\\ \Phi_{\mu_1\ldots\mu_{[J]}}{}^{\dot\alpha}\end{pmatrix}, \quad (53)$$

полностью симметричное по векторным индексам $\Phi_{\mu_1\ldots\mu_{[J]}a} = \Phi_{(\mu_1\ldots\mu_{[J]})a}$. Как следствие уравнений (50), (51) и вследствие симметричности полей по спинорным индексам, поле (53) удовлетворяет уравнениям

$$i\partial^\mu\gamma_{\mu a}{}^b\Phi_{\mu_1\ldots\mu_{[J]}b} = m\Phi_{\mu_1\ldots\mu_{[J]}a}\,, \qquad \gamma^{\mu_1}{}_a{}^b\Phi_{\mu_1\ldots\mu_{[J]}b} = 0\,, \qquad \partial^{\mu_1}\Phi_{\mu_1\ldots\mu_{[J]}a} = 0\,,$$

то есть описывает массивную частицу спина J в формализме Рариты-Швингера [44].

Таким образом, предложенная твисторная формулировка воспроизводит основные подходы в описании массивной спиновой частицы, в частности, описания с помощью $(2J+1)$- и $2(2J+1)$- компонентных полей, полей Фирца-Паули, Баргмана-Вигнера и Рариты-Швингера.

В период работы над этой статьей скоропостижно умер В.Г. Зима. С. Федорук скорбит о своем научном учителе и воспитателе.

Выражаем искреннюю благодарность А.Ю. Нурмагамбетову и Д.П. Сорокину за постоянное внимание к работе и ценные замечания. Также признательны И.А. Бандосу, Е.А. Иванову, С.О. Кривоносу, Е. Лукерскому за интерес к работе и стимулирующие обсуждения.

Работа поддержана грантом INTAS-2000-254 Европейского содружества и проектом № 02.07/383 Украинского национального фонда по фундаментальным исследованиям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Penrose R. Twistor algebra // J. Math. Phys. – 1967. – V.8. – p.345.
2. Penrose R. and MacCallum M.A.H. Twistor theory: an approach to the quantization of the fields and space-time // Phys. Reports – 1972. – V.6C. – p.241.
3. Penrose R. The twistor programme // Rep. Math. Phys. – 1977. – V.12. – p.65.
4. Пенроуз Р., Риндлер В. Спиноры и пространство-время, Т.2: Пер. с англ. – М.: Мир. 1988, 572с.
5. Hughston L.P. Twistor and Particles, Lecture Notes in Physics, Berlin, V. 97, 1979, 153 pp.
6. Hugget S.A. and Tod K.P. An Introduction to the Twistor Theory, Cambridge University Press, 1994, 178 pp.
7. Ferber A. Supertwistors and conformal supersymmetry // Nucl. Phys. – 1978. – V. B132. – p.55.
8. Shirafuji T. Lagrangian mechanics of massless particles with spin // Prog. Theor. Phys. – 1983. – V. 70. – p.18.
9. Witten E. A twistor-like transform in ten dimensions // Nucl. Phys. – 1986. – V. B266. – p.245.
10. Bengtsson A.K.H., Bengtsson I., Cederwall M. and Linden N. Particles, superparticles, and twistors // Phys. Rev. – 1987. – V.D36. – p.1766.
11. Bengtsson I. and Cederwall M. Particles, twistors and the division algebras // Nucl. Phys. – 1988. – V. B302. – p.81.
12. Eisenberg Y. and Solomon S. The twistor geometry of the covariantly quantized Brink-Schwarz superparticle // Nucl. Phys. – 1988. – V. B309. – p.709; (Super-)field theories from (super-)twistors // Phys. Lett. – 1989. – V. 220B. – p.562.
13. Eisenberg Y. Toward interacting (super)field theories from (super)twistors // Phys. Lett. – 1989. – V. 225B. – p.95.
14. Plyushchay M.S. Lagrangian formulation for the massless (super)particles in (super)twistor approach // Mod. Phys. Lett. – 1989. – V. A4. – p.1827.
15. Sorokin D.P., Tkach V.I. and Volkov D.V. Superparticles, twistors and Siegel symmetry // Mod.Phys.Lett.–1989.–V.A4.–p.901.
16. Sorokin D.P., Tkach V.I., Volkov D.V. and Zheltukhin A.A. From the superparticle Siegel symmetry to the spinning particle proper-time supersymmetry // Phys. Lett. – 1989. – V. 216B. – p.302.
17. Volkov D.V. and Zheltukhin A.A. On the equivalence of the lagrangians of massless Dirac and supersymmetrical particles // Lett. Math. Phys. – 1989. – V. 17. – p.141; Lagrangians for massless particles and strings with local and global supersymmetry// Nucl. Phys. – 1990. – V. B335. – p.723.
18. Sorokin D.P. Double supersymmetric particle theories // Fortschr. Phys. – 1990. – V. 38. – p.923;
Гуменчук В.И., Сорокин Д.П. Релятивистская динамика суперчастиц и твисторное соответствие // Ядерная физика. – 1990. – V. 51. – p.350.
19. Townsend P. Supertwistor formulation of the spinning particle // Phys. Lett. – 1991. – V. 261B. – p.65.
20. Soroka V.A., Tkach V.I., Volkov D.V. and Sorokin D.P. A generalized twistor dynamics of relativistic particles and strings // Int. J. Mod. Phys. – 1992. – V. A7. – p.5977; Твисторный сдвиг в уравнениях релятивистских частиц и струн // Письма в ЖЭТФ. – 1990. – V. 52. – p.526.
21. Bandos I., Nurmagambetov A., Sorokin D., Volkov D.V. Twistor-like superparticle revisited // Class. Quantum Grav. – 1995. – V. 12. – p.1881.
22. Sorokin D.P. Superbranes and superembeddings // Phys. Reports – 2000. – V. 329. – p.1.
23. Perjes Z. Twistor variables of relativistic mechanics // Phys. Rev. – 1975. – V. D11. – p.2031; Perspectives of Penrose theory in particle physics // Reports Math. Phys. – 1977. – V. 12. – p.193; Unitary space of particle internal states // Phys. Rev. – 1979. – V. D20. – p.1857.
24. Tod P. Some symplectic forms arising in twistor theory // Reports Math. Phys. – 1977. – V. 11. – p.339.
25. Bette A. On a pointlike relativistic massive and spinning particle // J. Math. Phys. – 1984. – V. 25. – p.2456; Directly interacting massless particles – a twistor approach // J. Math. Phys. – 1996. – V. 37. – p.1724.
26. Fedoruk S. and Zima V.G. Uniform twistor-like formulation of massive and massless superparticles with tensorial central charges // Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) – 2001. – V. B102&103. – p.233.
27. Bette A., De Azcarraga J.A., Lukierski J. and Miquel-Espanya C. Massive relativistic particle model with spin and electric charge from two-twistor dynamics // Preprint hep-th/0405166, 15 p.
28. Berkovits N. and Motl L. Cubic twistorial string field theory // JHEP. – 2004. – V. 0404. – P.056;
Berkovits N. and Witten E. Conformal supergravity in twistor-string theory // Preprint hep-th/0406051, 43 p.;
Siegel W. Untwisting the twistor superstring // Preprint hep-th/0404255, 16 p.
29. Fedoruk S. and Zima V.G. Bitwistor formulation of massive spinning particle // J. Kharkiv University– 2003. – V. 585. – p.39.
30. Зима В.Г., Федорук С. Спиновая (супер)частица с коммутирующим индексным спинором // Письма в ЖЭТФ. – 1995. – V. 61. – p.251.
31. Zima V.G. and Fedoruk S. Weinberg propagator of a free massive particle with an arbitrary spin from the BFV-BRST path integral // Class. Quantum Grav. – 1999. – V. 16. – p.3653.
32. Brink L. and Schwarz J. Quantum superspace // Phys. Lett. – 1981. – V. 100B. – p.310.
33. Весс Ю., Беггер Дж. Суперсимметрия и супергравитация. Пер. с англ.-М.: Мир, 1986, 184 с.
34. Зима В.Г., Федорук С. Ковариантное квантование d=4 суперчастицы Бринка-Шварца с использованием лоренцевых гармоник // Теоретическая и математическая физика. – 1995. – V. 102. – p.305.
35. Vasiliev M.A. Conformal higher spin symmetries of 4d massless supermultiplets and OSp(L,2M) invariant equations in generalized (super)space // Phys. Rev. – 2002. – V. D66. – p.066006.
36. Galperin A., Ivanov E., Kalizin E., Ogievetsky V. and Sokatchev E. Unconstrained N=2 matter, Yang-mills and Supergravity theories in harmonic superspace // Class. Quantum Grav. – 1984. – V. 1. – p.469.
37. Бандос И.А. Суперчастица в лоренц-гармоническом суперпространстве // Ядерная физика. – 1990. – T.51. – C.1429.
Bandos I.A. and Zheltukhin A.A. N=1 super-p-branes in twistor-like Lorentz harmonic formulation // Class. Quantum Grav. – 1995. – V. 12. – P.609.

38. Claus P., Rahmfeld J. and Zunger Y. A simple particle action from a twistor parametrization of AdS_5 // Phys. Lett. – 1999. – V.466B. – p.181;
Claus P., Kallosh R. and Rahmfeld J. BRST quantization of a particle in AdS_5 // Phys. Lett. – 1999. – V. 462B. – p.285.
39. Bandos I., Lukierski J. and Sorokin D. Superparticle models with tensorial central charges // Phys. Rev. – 2000. – V. D61. – p.040002.
40. Plyushchay M., Sorokin D. and Tsulaia M. Higher spins from tensorial charges and OSp(N|2n) symmetry // JHEP– 2003. – V.0304. – p.013.
41. Weinberg S. Feynman rules for any spin // Phys. Rev. – 1964. – V. 133. – p.B1318.
42. Fierz M. and Pauli W. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field // Proc. Roy. Soc. (London) – 1939. – V. A173. – p.211.
43. Bargman V. and Wigner E. Group theoretical discussion of relativistic wave equations // Proc. Am. Acad. Sci. – 1948. – V. 34. – p.211.
44. Rarita W. and Schwinger J. On a theory of particles with half-integer spin // Phys. Rev. – 1941. – V. 60. – p.61.

TWISTORIAL SPINNING PARTICLE

V.G. Zima[*], **S. Fedoruk**[**]
[*]*Kharkiv National University, 61077 Kharkiv, 4 Svobody Sq., Ukraine*
[**]*Ukrainian Engineering-Pedagogical Academy, 61003 Kharkiv, 16 Universitetska Str., Ukraine*

It is established a correspondence of twistor formulation and formulation in real space-time for massive and massless particles of arbitrary spins (helicities). It is obtained the equations of twistor transformations realizing the correspondence of twistor description and description of spinning particle in terms of the real space-time variables. It is constructed integral transformation of the twistor field obtained in prime quantization of a spinning particle in the twistor formulation. Space-time spin-tensor fields obtained after the transformations reproduce descriptions of massive spinning particle in terms of $(2J+1)$ - and $2(2J+1)$ -component fields and Fierz-Pauli, Bargman-Wigner and Rarita-Schwinger fields.
KEY WORDS: Penrose’s twistors, spinning particle, conformal symmetry, twistor transformation.