УДК 539.12

СТРУКТУРА КВАНТОВОЙ ЛИНЕЙНОЙ ПОЛУГРУППЫ С РЕГУЛЯРНЫМ ПАРАМЕТРОМ КВАНТОВАНИЯ

С.А. Дуплий, А.С. Садовников
Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков 61077
Поступила в редакцию 11 ноября 2004 г.

Рассмотрена возможность построения квантовой плоскости с регулярным параметром квантования. Предложены два варианта обобщения квантовой плоскости на тернарный случай: простейший и использующий соотношения Лёде, которые не нарушают структуру квазитреугольной биалгебры. Найдены уравнения на образующие универсальной кодействующей на такие квантовые плоскости, обсуждаются предельные случаи.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: квантовая плоскость, универсальная кодействующая, квазитреугольная биалгебра, регулярность, алгебра Хопфа, полугруппа.

В настоящее время теория квантовых групп, появившаяся при исследовании квантового метода обратной задачи [1], представляет собой развитое направление [2] с применениями в таких областях, как точнорешаемые модели статистической физики и квантовое уравнение Янга-Бакстера [3], некоммутативная дифференциальная геометрия [4], универсальные обертывающие алгебры и алгебры Хопфа [5]. В подходе Манина [6] квантовая группа рассматривается как «группа автоморфизмов» квантового линейного пространства. Так, в случае квантовой плоскости изучались универсальные кодействующие для значений параметра квантования $q=\pm 1$ (коммуцтирующие и антикоммутирующие алгебры), $q=1^{1/n}$, $q\in C\setminus\{0\}\left(q\neq\pm 1\right)$ что давало отличные между собой алгебры [6].

При переходе от квантовой линейной группы к квантовой линейной супергруппе [7] возникают нильпотенты и делители нуля – так, что логичным является допущение о возможном расширении области значений самого параметра q.

В работе рассматривается построение аналога квантовой линейной группы, но с необратимым параметром q, что приводит к полугруппе преобразований квантовой плоскости [8]. Подобные обобщения квантовых групп (алгебр Хопфа [9]) уже рассматривались: построение face-алгебр [10], слабые алгебры Хопфа [11], ослабление требования биективности антипода [12] и квантовые группоиды [13].

Цель работы – построение соотношений на образующие квантовой линейной полугруппы, универсально кодействующей на квантовую плоскость с возможностью введения необратимого параметра квантования. При этом порождающие соотношения квантовой плоскости выбирались в простейшем и специальном видах.

КВАНТОВАЯ ЛИНЕЙНАЯ ГРУППА И РЕГУЛЯРНЫЙ ПАРАМЕТР ДЕФОРМАЦИИ

Стандартное квантование алгебры матриц $M\left(2\right)$ над полем k строится как универсальная кодействующая над квантовыми плоскостями [6]

$$\begin{aligned} A(x,y)&=k(x,y)/(xy-qyx),\\ B(\xi,\eta)&=k(\xi,\eta)/(\xi\eta-q^{-1}\eta\xi), \end{aligned} \tag{1}$$

и кодействие определяется образующими T^i_j, $i,j=1,2$ алгебры $M\left(2\right)$ как

$$\begin{aligned} &\delta(x)\to T\otimes x,\ \delta^*(\xi)\to T^*\otimes\xi,\\ &\delta(x^i)=\sum T^i_j\otimes x^j,\ \delta^*(\xi_i)=\sum T^j_i\otimes\xi_j. \end{aligned} \tag{2}$$

При определении кодействия алгебры на две квантовые плоскости получается, что при $q=1$ имеем $M\left(A,B\right)\cong k\left(\mathtt{Mat}\left(n\right)\right)$, так что $M_q\left(2\right)\cong k\left(a,b,c,d\right)/\left(I_A\bullet I_B\right)$, где I_A и I_B – идеалы, порожденные соответственно квадратичными соотношениями универсальной кодействующей на A и B. В конкретной реализации этого подхода порождающие соотношения

$$\begin{aligned} &ac=qca,\quad ab=qba,\\ &cd=qdc,\quad bd=qdb,\\ &ad-da=(q-q^{-1})bc,\quad bc=cb \end{aligned} \tag{3}$$

алгебраической структуры, возможно записать, используя R-матрицу $RT_1T_2 = T_2T_1R$, где индекс при T означает номер индекса в R при свертке $R^{ij}_{kl}T^k_mT^l_n = T^j_lT^i_kR^{kl}_{mn}$. Матрица R удовлетворяет квантовому уравнению Янга-Бакстера [1-3]

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \tag{4}$$

Если параметр квантования необратим, т.е. q^{-1} не всегда существует, естественно предположить вместо обратного существование обобщенного обратного элемента $\tilde{q}$, удовлетворяющего соотношениям регулярности

$$q\tilde{q}q = q, \quad \tilde{q}q\tilde{q} = \tilde{q}. \tag{5}$$

Однако для последовательного построения квантовой плоскости с необратимым параметром квантования q квадратичных соотношений

$$xy = qyx, \quad \tilde{q}xy = yx, \tag{6}$$

порождающих идеал, недостаточно, так как подстановкой одного из этих соотношений в другое получаются выражения $xy = q\tilde{q}xy$, $yx = \tilde{q}qyx$, из которых вместе с регулярностью q и $\tilde{q}$ видно, что $q\tilde{q}$ и $\tilde{q}q$ есть единица для элементов вида $x^ky^l; k,l \in \mathbb{Z}^+, kl \neq 0$ в свободном модуле, порожденном свободными образующими x и y ($q,\tilde{q} \in Q$ - некоторая регулярная ассоциативная алгебра).

ПРОСТЕЙШЕЕ ТЕРНАРНОЕ ОБОЩЕНИЕ КВАНТОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Непосредственным обобщением, совместным с квадратичным, является набор кубических соотношений [8]

$$xxy - q_1xyx = 0, \quad yxx - \tilde{q}_1xyx = 0, \quad xyy - q_2yxy = 0, \quad yyx - \tilde{q}_2yxy = 0, \tag{7}$$

вместе с условием регулярности для q и $\tilde{q}$

$$q_i\tilde{q}_iq_i = q_i, \quad \tilde{q}_iq_i\tilde{q}_i = \tilde{q}_i, \; i = 1,2. \tag{8}$$

На свободные образующие x, y дополнительных условий, отличных от (7) (обычно обратимость) не налагаются [2].

Тогда квантовой плоскостью с необратимым параметром квантования назовем $A(x,y) = Q(x,y)/I_{q,\tilde{q}}$, где $I_{q,\tilde{q}}$ – идеал, порожденный соотношениями (7). Аналогичные соотношения имеют место и для дуальной плоскости $B(\xi,\eta) = Q(\xi,\eta)/I_{p,\tilde{p}}$.

Назовем квантовой полугруппой биалгебру $H(A,B)$, универсально кодействующую на две дуальные квантовые плоскости A и B. Тогда биалгебра $H(A,B)$ строится факторизацией свободной алгебры над $\mathbb{Q}$ с образующими $[T^i_j] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ по двустороннему идеалу, порожденному соотношениями, которые получаются из условия сохранения соотношений (1), а именно

$$\begin{gathered}
aac - q_1aca = 0, \; caa - \tilde{q}_1aca = 0, \; acc - q_2cac = 0, \; cca - \tilde{q}_2cac = 0 \\
bbd - q_1bdb = 0, \; dbb - \tilde{q}_1bdb = 0, bdd - q_2dbd = 0, \; ddb - \tilde{q}_2dbd = 0 \\
aab - p_1aba = 0, \; baa - \tilde{p}_1aba = 0, abb - p_2bab = 0, \; bba - \tilde{p}_2bab = 0, \\
ccd - p_1cdc = 0, \; dcc - \tilde{p}_1cdc = 0, cdd - p_2dcd = 0, \; ddc - \tilde{p}_2dcd = 0, \\
q_1aad + \tilde{q}_1bac + abc - q_1^2acb - q_1\tilde{q}_1bca - q_1ada = 0, \\
q_1cab + \tilde{q}_1daa + cba - \tilde{q}_1^2bca - \tilde{q}_1q_1acb - \tilde{q}_1ada = 0, \\
q_1acd + \tilde{q}_1bcc + adc - q_2q_1cad - q_2\tilde{q}_1dac - q_2cbc = 0, \\
q_1ccb + \tilde{q}_1dca + cda - \tilde{q}_2q_1cad - \tilde{q}_2\tilde{q}_1dac - \tilde{q}_2cbc = 0, \\
q_2abd + \tilde{q}_2bbc + bad - q_1q_2adb - q_1\tilde{q}_2bda - q_1bcb = 0, \\
q_2cbb + \tilde{q}_2dba + dab - \tilde{q}_1q_2adb - \tilde{q}_1\tilde{q}_2bda - \tilde{q}_1bcb = 0,
\end{gathered} \tag{9}$$

$$q_2add+\tilde{q}_2bdc+bcd-q_2^2cbd-q_2\tilde{q}_2dbc-q_2dad=0,$$
$$q_2cdb+\tilde{q}_2dda+dcb-\tilde{q}_2q_2cbd-\tilde{q}_2\tilde{q}_2dbc-\tilde{q}_2dad=0,$$
$$p_1aad+\tilde{p}_1cab+acb-p_1^2abc-p_1\tilde{p}_2cba-p_1ada=0,$$
$$p_1bac+\tilde{p}_1daa+bca-\tilde{p}_1^2cba-\tilde{p}_1p_1abc-\tilde{p}_1ada=0,$$
$$p_1abd+\tilde{p}_1cbb+adb-p_2p_1bad-p_2\tilde{p}_1dab-p_2bcb=0,$$
$$p_1bbc+\tilde{p}_1dba+bda-\tilde{p}_2p_1bad-\tilde{p}_2\tilde{p}_1dab-\tilde{p}_2bcb=0,$$
$$p_2acd+\tilde{p}_2ccb+cad-p_1p_2adc-p_1\tilde{p}_2cda-p_1cbc=0,$$
$$p_2bcc+\tilde{p}_2dca+dac-\tilde{p}_1p_2adc-\tilde{p}_1\tilde{p}_2cda-\tilde{p}_1cbc=0,$$
$$p_2add+\tilde{p}_2cdb+cbd-p_2^2bcd-p_2\tilde{p}_2dcb-p_2dad=0,$$
$$p_2bdc+\tilde{p}_2dda+dbc-\tilde{p}_2p_2bcd-\tilde{p}_2^2dcb-\tilde{p}_2dad=0.$$

АЛЬТЕРНАТИВНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ТЕРНАРНЫХ СООТНОШЕНИЙ МЕТОДОМ ЛЁДЕ

Существует иной способ построения квантовых групп (или квазитреугольных алгебр Хопфа) по постоянному решению квантового уравнения Янга-Бакстера, разработанный в [14]. При этом квантовая группа строится на генераторах $\left\{1,t_j^i,u_j^i,E_i,F^i\right\}$: матриц *T,U*, стоке *E* и столбце *F* соответственно. Для вышеуказанного случая F^i соответствует образующим квантовой плоскости x,y, а E_i соответствуют сопряженной квантовой плоскости с образующими ξ,η. Структура алгебры строится факторизацией по идеалу, порожденному соотношениями

$$\begin{aligned}&R_{12}T_1T_2=T_2T_1R_{12},E_1T_2=T_2E_1R_{12},\\&R_{12}U_1U_2=U_2U_1R_{12},F_1U_2=R_{12}U_2F_1,\\&R_{12}U_1T_2=T_2U_1R_{12},T_2F_1=R_{12}F_1T_2,\\&EF-FE=T-U,U_1E_2=E_2U_1R_{12},\end{aligned}\tag{10}$$

а коумножение определяется

$$\begin{aligned}&\Delta(T)=T\otimes T,\Delta(E)=E\otimes T+1\otimes E,\\&\Delta(U)=U\otimes U,\Delta(F)=F\otimes 1+U\otimes F,\end{aligned}\tag{11}$$

условия дуальности выглядят так

$$\langle U,T\rangle=R,\langle 1,T\rangle=\langle U,1\rangle=\langle F,E\rangle=1.\tag{12}$$

Однако коммутационные соотношения на E_i и F_i-генераторы не заданы. Метод построения таких соотношений, не разрушающих структуру биалгебры, был предложен Лёде в [14] (структура алгебры Хопфа также сохраниется). Метод состоит из наложения на E соотношений N-порядка

$$E_{i_1}\ldots E_{i_N}\omega^{i_1\ldots i_N}=0,\tag{13}$$

для каждого решения ω системы уравнений

$$\left[\frac{N}{n}\right]_B\omega_{1\ldots N}=0,(n=1,2,\ldots,N-1),\tag{14}$$

где $B=\sigma R,(\sigma(x\otimes y)=y\otimes x)$ обобщенный биномиальный коэффициент, который определяется следующим образом: для *x,y* и $x_1y_2=y_1x_2B_{12}$

$$(x_1+y_1)\ldots(x_N+y_N)=\sum_{n=0}^{N}y_1\ldots y_nx_{n+1}\ldots x_N\left[\frac{N}{n}\right]_B.\tag{15}$$

Коммутационное соотношения для F^i определяется аналогично ($\theta_{i\ldots j}=\omega^{i\ldots j}$)

$$\theta^{i_1\ldots i_N}F^{i_1}\ldots F^{i_N}=0.\tag{16}$$

Этими соотношениями биалгебра (или алгебра Хопфа) полностью определяется. В интересующем нас случае N=3 уравнение для ω имеет вид

$$\begin{aligned}&\left(1+B_1+B_1B_2\right)\omega=0,\\&\left(1+B_2+B_2B_1\right)\omega=0.\end{aligned}\tag{17}$$

Тогда для квантовой плоскости Манина (случай $M_q\left(2\right)$)

$$R=\begin{pmatrix} q & . & . & . \\ . & 1 & q-q^{-1} & . \\ . & . & 1 & . \\ . & . & . & q \end{pmatrix}\tag{18}$$

уравнения, на образующие E_i, имеют вид

$$\begin{aligned}&\left(E_2E_1-qE_1E_2\right)E_1=E_1\left(E_2E_1-qE_1E_2\right),\\&\left(E_2E_1-qE_1E_2\right)E_2=E_2\left(E_2E_1-qE_1E_2\right).\end{aligned}\tag{19}$$

Эти уравнения имеют прозрачный смысл, если обозначить квантовый коммутатор $\left[x,y\right]_q=qxy-yx$, и тогда

$$\left[\left[E_1,E_2\right]_q,E_1\right]=0,\left[\left[E_1,E_2\right]_q,E_2\right]=0,\tag{20}$$

где $\left[\bullet,\bullet\right]$ - классический коммутатор. В интересующем регулярном случае удобно переписать квантовый коммутатор в виде $\left[x,y\right]_q=q^{1/2}(q^{1/2}xy-q^{-1/2}yx)$. Обозначим $q^{1/2}=r,q^{-1/2}=\tilde{r}$ и для сопряженной квантовой плоскости $p^{1/2}=s,p^{-1/2}=\tilde{s}$. Тогда уравнения на образующие универсальной кодействующей

$$\begin{aligned}&\left(rac-\tilde{r}ca\right)a=a\left(rac-\tilde{r}ca\right),\left(rbd-\tilde{r}db\right)b=b\left(rbd-\tilde{r}db\right),\\&\left(rac-\tilde{r}ca\right)c=c\left(rac-\tilde{r}ca\right),\left(rbd-\tilde{r}db\right)d=d\left(rbd-\tilde{r}db\right),\\&\left(sab-\tilde{s}ba\right)a=a\left(sab-\tilde{s}ba\right),\left(scd-\tilde{s}dc\right)c=c\left(scd-\tilde{s}dc\right),\\&\left(sab-\tilde{s}ba\right)b=b\left(sab-\tilde{s}ba\right),\left(scd-\tilde{s}dc\right)d=d\left(scd-\tilde{s}dc\right),\\&\left(1+\tilde{r}^2\right)daa-\left(1+\tilde{r}^2\right)ada-\left(2+r^2+\tilde{r}^2\right)bca+\left(1+r^2\right)bac+\tilde{r}^2cba+abc=0,\\&\left(1+\tilde{s}^2\right)daa-\left(1+\tilde{s}^2\right)ada-\left(2+s^2+\tilde{s}^2\right)cba+\left(1+s^2\right)cab+\tilde{s}^2bca+acb=0,\\&daa-aad-\left(1+r^2\right)bca+\left(1+\tilde{r}^2\right)acb+r^2bac-\tilde{r}^2cab=0,\\&daa-aad-\left(1+s^2\right)cba+\left(1+\tilde{s}^2\right)abc+s^2cab-\tilde{s}^2bac=0,\\&\left(1+\tilde{r}^2\right)cbb-\left(1+r^2\right)bcb-\left(2+r^2+\tilde{r}^2\right)adb+\left(1+r^2\right)abd+r^2bad+dab=0,\\&\left(1+s^2\right)cbb-\left(1+\tilde{s}^2\right)bcb-\left(2+s^2+\tilde{s}^2\right)dab+\left(1+\tilde{s}^2\right)dba+\tilde{s}^2bda+adb=0,\\&-\tilde{r}^2cbb+r^2bbc-\left(1+r^2\right)bda+\left(1+\tilde{r}^2\right)adb+dba-abd=0,\\&s^2cbb-\tilde{s}^2bbc-\left(1+s^2\right)dab+\left(1+\tilde{s}^2\right)bad+dba-abd=0,\end{aligned}\tag{21}$$

$$\left(1+r^2\right)add-\left(1+r^2\right)dad-\left(2+r^2+\tilde{r}^2\right)cbd+\left(1+\tilde{r}^2\right)cdb+r^2bcd+dcb=0,$$

$$\left(1+s^2\right)add-\left(1+s^2\right)dad-\left(2+s^2+\tilde{s}^2\right)dbc+\left(1+\tilde{s}^2\right)bdc+s^2dcb+bcd=0,$$

$$dda-add-\left(1+r^2\right)dbc+\left(1+\tilde{r}^2\right)cbd+r^2bdc-\tilde{r}^2cdb=0,$$

$$dda-add-\left(1+s^2\right)dcb+\left(1+\tilde{s}^2\right)bcd+s^2cdb-\tilde{s}^2bdc=0,$$

$$\left(1+r^2\right)bcc-\left(1+\tilde{r}^2\right)cbc-\left(2+r^2+\tilde{r}^2\right)dac+\left(1+\tilde{r}^2\right)dca+\tilde{r}^2cda+adc=0,$$

$$\left(1+\tilde{s}^2\right)bcc-\left(1+s^2\right)cbc-\left(2+s^2+\tilde{s}^2\right)adc+\left(1+s^2\right)acd+s^2cad+dac=0,$$

$$r^2bcc-\tilde{r}^2ccb-\left(1+r^2\right)dac+\left(1+\tilde{r}^2\right)cad+dca-acd=0,$$

$$-\tilde{s}^2bcc+s^2ccb-\left(1+s^2\right)cda+\left(1+\tilde{s}^2\right)adc+dca-acd=0.$$

Эти формулы позволяют легко перейти к необратимому случаю, если предположить регулярность параметров $r\tilde{r}r=r,\ \tilde{r}r\tilde{r}=\tilde{r},\ s\tilde{s}s=s,\ \tilde{s}s\tilde{s}=\tilde{s}$.

При $q=1$ алгебры A и B естественно градуированы и каждый компонент градуировки степени выше второй коммутативен. В классическом случае вся алгебра коммутативна. В этом проявляется некий предел некоммутативности алгебры: при квантовании коммутативность ослабляется и в конце концов "исчезает" в членах однородности два, и универсальная кодействующая такой алгебры не будет коммутативной при $q=1$.

Отметим, что теорема о произведении R-точек [2] также справедлива и в нашем необратимом случае. Это говорит о том, что о полученных биалгебрах имеет смысл говорить как о квантовых аналогах полугруппы преобразований.

ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе предложены аналоги квантовой плоскости с возможностью введения необратимого параметра квантования и проведено их простейшее исследование, построены биалгебры, универсально кодействующие на такие квантовые плоскости. Во втором варианте обобщения квантовой плоскости на тернарный случай используется связь с R-матрицей – универсальным элементом квантового дубля, что в последствии может привести к тернарному аналогу *RTT*-соотношения. Проведен простейший анализ полученных соотношений и возможные пути обобщения некоторых стандартных понятий квантовых групп [2-5], что может привести к построению нетривиальных соответствующих физических моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fadeev L.D., Reshetikhin N.Y., Takhrajan L.A. Quantum Lie groups and Lie algebras // Leningrad Math. J. – 1990. – V.1. – P.193-236.
2. Chari V., Pressley A.A Guide to Quantum Groups. – Cambridge University Press, 1996; Kassel C. Quantum Groups. – New York: Springer-Verlag, 1995.- 531p.; Shnider S., Sternberg S. Quantum Groups. – Boston: International Press, 1993. – 371p.
3. Lambe L.A., Radford D.E. Introduction to the Quantum Yang-Baxter Equation and Quantum Groups: An Algebraic Approach. – Dordrecht: Kluwer, 1997. – 292 p.; Бухштабер В.М. Преобразования Янга-Бакстера // Успехи мат. наук. – 1998. –Т. 53. – С. 1343-1379.
4. Woronowicz S.L. Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups) // Comm. Math. Phys. –1989. – V. 122 – P. 125-170; Madore J. Introduction to Noncommutative Geometry and its Applications. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
5. Drienfeld V.G. Quantum groups // Proceedings of the ICM, Berkeley. Phode Island. AMS, 1987. – P. 798-820; Majid S. Foundations of Quantum Group Theory. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995; Демидов Е.Е. Квантовые группы. – М.: Факториал, 1998. – 146 с; Kogorodski L.I., Soibelman Y.S. Algebras of Functions on Quantum Groups. – Providence: AMS, 1998.
6. Manin Y. Multiparametric quantum deformation of the general linear supergroup // Comm. Math Phys. – 1989. – V. 123. – P.123-135; Manin Y.I. Topics in Noncommutative Differential Geometry. – Princeton: Princeton University Press, 1991; Schirmacher A., Wess J., Zumin B. The two parameter deformation of GL(2) its differential calculus, and Lie algebra // J. Phys. – 1991. – V.49. – P. 317-321.
7. Zhang R.B., Gould M.D. Univeral R-matrixes and invariants of quantum supergroups // J. Math. Phys. – 1991. – V. 32. - P. 3261-3267; Chang D., Phillips I., Rozansky I. R-matrix approach to quantum superalgebras $SU_q(mn)$ // J. Math. Phys. – 1992. – V. 33. – P. 11; Duplij S., Sadovnikov A. Quantum general linear supergroup. Concise Encyclopedia of Supersymmetry. – Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, 2004. – P. 317.

8. Duplij S., Sadovnikov A. On the structure of quantum linear semigroup // Journal of Kharkov National University, ser. Nuclei, Particles and Fields. – 2003. – № 601. – 2(22). – P. 32-40 .
9. Abe E. Hopf Algebras. – Cambridge: Cmbridge Univ. Press, 1980. – 221 p.; Sweedlier M.E. Hopf Algebras. – New York: Benjamin, 1969. – 336 p.
10. Hayachi T. An algebra related to the fusion rules of Wess-Zumin-Witten models // Lett. Math. Phys. – 1991. – V. 22. – P. 291-296; Hayashi T. Face algebras and unitarity of SU(N)L – TQFT // Commun. Math. Pys. – 1999. – V. 203. - P. 221-247.
11. Duplij S., Li F. On regular solutions of quantum Yang-Baxter equation and weak Hopf algebras // Journal of Kharkov National University, ser. Nuclei, Particles and Fields. – 2001. – № 522. – 2(14) – P. 35-49; Li F., Duplij S. Weak Hopf algebras and singular solutions of quantum Yang-Baxter equation // Commun. Math. Phys. – 2002. – V. 225. – P. 191-217; Duplij S., Li F. Regular solutions of quantum Yang-Baxter equation from weak Hopf algebras // Czech. J. Phys. – 2001. – V. 51. – P. 1306-1311.
12. Nichols W.D., Taft E.J. The Left Antipodes of a Left Hopf Algebra. – Contemp. Math. 13 – Providence: Aver. Math. Soc., 1982; Green J.F., Nicols W.D., Taft E.J. Left Hopf Algebras // J. Algebra. – 1980. – V. 65. – P. 399-411.
13. Bohm G., Nill F., Szlachanyi K. Weak Hopf algebras I. Integral theory and C*-structure // J. Algebra. – 1999. – V. 221. – P. 385-438; Bohm G., Szlachanyi K. A coassociative C*-quantum group with nonintegral dimensions // Lett. Math. Phys. – 1996. – V. 38. – P. 437-456; Nikshych D., Vainerman L. Finite quantum groupoids and their applications // Los Angeles. – 2000. – 44 p. (Preprint / Univ. California, math. QA/0006057).
14. Ludde M. Yang-Baxter deformations of semisimple Lie algebras // J. Math. Phys. – 1993. – V. 34. – P. 864-874; Vladimirov A.A. Some remarks on producing Hopf algebras // Preprint: Univ. California, math. QA/9507012. – 1995. – 6 p.

QUANTUM LINEAR SEMIGROUP STRUCTURE WITH REGULAR QUANTIZATION PARAMETER

S.A. Duplij, A.S. Sadovnikov
Department of Physics and Technology, V.N. Karazin National University,
Pl. Svobody, 4, Kharkiv, 61077, Ukraine

The possibility of construction of quantum plane with regular quantization parameter is considered. Two ways of generalization of quantum plane to ternary case are investigated. The first one is the simplest, whereas the second one uses the Lüdde relation which do not disturb the quasitriangular bialgebra structure. The equations for generators of universal coacting for these quantum planes are derived, some special cases are discussed.
KEY WORDS: quantum plane, universal coacting, quasitriangular bialgebra, regularity, Hopf algebra, semigroup.