УДК 530.12:530.145

ЛАГРАНЖИАНЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЯХ МУЛЬТИГРАВИТАЦИИ

С.А. Дуплий, А.Т. Котвицкий
Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина
пл. Свободы, 4, Харьков 61077
E-mail: Steven.A.Duplij@univer.kharkov.ua , Albert.T.Kotwicki@univer.kharkov.ua
Поступила в редакцию 10 ноября 2004 г.

Рассмотрена нелинейная формулировка мультигравитации в рамках концепции слабо связанных миров. Проанализирован общий вид лагранжиана мультигравитации и показано, что при некоторых конкретных соотношениях параметров эта модель переходит в "классические" модели, например в модели типа Паули – Фирца. Из общих принципов инвариантности, а именно из требования того чтобы потенциал взаимодействия оставался скаляром при вариации метрических тензоров, получено ограничение на вид функции, которая описывает взаимодействие вселенных. Также предложены новые виды инвариантных объемов, которые при стремлении $g_R \to g_L$, в случае бигравитации, переходят в стандартный объем римановой геометрии.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: мультигравитация, бигравитация, лагранжианы, нелинейные модели, слабо связанные миры.

Одной из наиболее важных задач теоретической физики является объединение стандартной модели теории поля и общей теории относительности, т.е. построение непротиворечивой теории, описывающей как электрослабые и сильные взаимодействия, так и гравитацию [1]. Наиболее популярным в настоящее время является способ, основанный на различных многомерных конструкциях, включающих "расширенные" объекты, что, очевидно, модифицирует физику на малых расстояниях.

С другой стороны, настоящая общепринятая парадигма должна сохраниться и на больших масштабах, в частности, для справедливости общей теории относительности. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что необходимо добавить новые виды гравитирующей материи по принципам стандартной теории поля, такие как темная материя и темная энергия [2]. В частности, эти понятия возникли под влиянием астрофизических и космологических фактов – таких, как вращение галактик и ускоренное расширение Вселенной.

Здесь мы рассматриваем вопросы, связанные с "массивной гравитацей", допускающей существование очень легких гравитонов с комптоновской длиной волны, по порядку совпадающей с космологическим масштабом. В частности, любая модель типа Калуцы–Клейна предсказывает, кроме безмассовых гравитонов, существование бесконечного "набора" массивных гравитонов. Однако их использование для изменения гравитационных явлений на больших масштабах является проблематичным. Так как в этих моделях спектр оказывается регулярным так, что, даже если первые моды были очень легкими, то не будет существовать ни одного режима, в котором первая мода или несколько первых мод были бы существенными, т.е. режима, в котором одна мода смогла бы "обрезать" остальные массивные состояния. Другими словами, как только первая мода становится существенной, также становятся существенными и остальные моды. Однако совершенно другая ситуация наблюдается в некоторых моделях типа бран. В частности, в [3], обнаружена возможность существования иерархической щели, $m_1 << m_2$, в спектре между первой модой (или первой группой мод) и высшими модами. Такая модель называется мультигравитацией [4], и в ней возможны эффективные четырехмерные теории, которые содержат только безмассовые и ультралегкие гравитоны, но обрезаются состояния с большими гравитонными массами. Подобные теории предсказывают спектр масс $m_1 M_{Planck}^{1+\gamma} \approx m_2^{2+\gamma}$, где γ лежит в пределах от 0 до 1 [5]. Такой спектр интересен с феноменологической точки зрения, когда m_1^{-1} имеет космологический порядок.

НЕЛИНЕЙНАЯ ФОРМУЛИРОВКА МУЛЬТИГРАВИТАЦИИ

До настоящего времени мультигравитация была, в основном, исследована в линеаризованных приближениях. Поэтому очень важно найти формулировку нелинейной мультигравитации, которая содержала бы класс эффективных четырехмерных лагранжианов, описывающих в некотором пределе обрезание "легкой" моды в иерархическом спектре. Согласно общим положениям мультигравитации мы принимаем концепцию слабо связанных миров (Weakly Coupled Worlds) WCW [6]. В рамках этой концепции предполагается, что несколько Вселенных (помеченных как i=1, …, N) имеют свои метрические тензоры $g_{(i)\mu\nu}$ и свой набор физических полей $\{\Phi_i\}$, которые связаны только через некоторые, смешивающие их, гравитационные поля, т.е. взаимодействие зависит только от метрик. Мы потребуем, чтобы в теории существовал предел (скажем при некотором параметре $\lambda \to 0$) при котором появлялись бы N диффеоморфизмов, каждый из которых соответствовал бы "своим" безмассовым гравитонам. Таким образом, единственным действием, которое включало бы в себя N безмассовых гравитонов является сумма несвязанных действий (типа действий общей теории относительности [3, 5])

$$S_0 = \sum_{i=1}^{N} S[g_i, \Phi_i],$$

$$S[g_i, \Phi_i] = \int d^4x \sqrt{|g_i|} [M_i^2 R(g_i) - \Lambda_i + L(g_i, \Phi_i)], \quad (1)$$

где M – константа для i - го мира, R – скалярная кривизна, построенная по метрике $g_{(i)\mu\nu}$, Λ_i – космологическая константа i - го мира. Следовательно, единственное действие для Вселенных, связанных только через гравитационное поле, должно иметь вид

$$S_{tot} = S_0 + \lambda S_{\text{int}}(g_1, g_2, ..., g_N). \quad (2)$$

Тогда при $\lambda \to 0$ мы имеем N невзаимодействующих миров, т.е. предполагается, что в этом случае для любого из наблюдателей в одном мире другие Вселенные имеют только метафизическое существование. Эта теория имеет симметрию $\Pi_i Diff_{(i)}$, где каждый диффеоморфизм действует отдельно на собственной метрике $g_{(i)\mu\nu}$ и собственных полях Φ_i. В случае взаимодействующих Вселенных, т.е. при $\lambda \neq 0$, симметрия полного действия уменьшается до одной группы диффеоморфизмов. Диагональная группа общих диффеоморфизмов изменяет каждую метрику так

$$\delta g_{\mu\nu}^{(i)} = \varepsilon^{\lambda} \partial_{\lambda} g_{\mu\nu}^{(i)} + \partial_{\mu} \varepsilon^{\lambda} g_{\lambda\nu}^{(i)} + \partial_{\nu} \varepsilon^{\lambda} g_{\mu\lambda}^{(i)} \equiv D_{\mu}^{(i)} \varepsilon_{\nu} + D_{\nu}^{(i)} \varepsilon_{\mu}, \quad (3)$$

где ε_ν - есть вектор Киллинга, а $\delta g_{\mu\nu}^{(i)}$ по сути определяет производную Ли, т.е. $\delta g_{\mu\nu}^{(i)} = L_{\varepsilon} g_{\mu\nu}^{(i)}$.

Эта симметрия вносит определенные ограничения на слагаемое, описывающее взаимодействие $\lambda S_{\text{int}}(g_1, g_2, ..., g_N)$, т.е. эта часть лагранжиана должна зависеть только от инвариантов, которые можно сконструировать из нескольких метрик. Например, от дополнительных кинетических слагаемых от ковариантных производных типа $g_{(i)}^{\mu\nu} D_{\lambda}^{(j)} g_{\mu\nu}^{(k)}$ (такие слагаемые не существуют в случае одной метрики, т.к. $D_{\lambda}^{(i)} g_{\mu\nu}^{(i)} \equiv 0$). Тем не менее, мы будем рассматривать только ультралокальное взаимодействие, т.к. модификация кинетических слагаемых приводит, как правило, к нежелательным следствиям. Поэтому взаимодействие в (2) имеет вид [6]

$$\lambda S_{\text{int}} = -\mu^4 \int d^4x \; V(g_1(x), ..., g_N(x)), \quad (4)$$

где μ – есть массовый масштаб, а V является скалярной плотностью от N метрик взятой в той же самой “точке”.

Например, в случае N=2 (модель бигравитации) мы записываем действие в виде

$$S = \int d^4x \sqrt{|g_L|} [M_L^2 R(g_L) - \Lambda_L + L(g_L, \Phi_L)] + \int d^4x \sqrt{|g_R|} [M_R^2 R(g_R) - \Lambda_R + L(g_R, \Phi_R)] -$$
$$-\mu^4 \int d^4x (|g_R g_L|)^{1/4} V(g_L, g_R). \quad (5)$$

Здесь индекс i «пробегает» значения L – left R – right.

ПОСТРОЕНИЕ ИВАРИАНТНОГО ОБЪЕМА

В последнем слагаемом, описывающем взаимодействие двух миров (5), мы явным образом выделили инвариантный объем

$$d\Omega = d^4x (|g_R g_L|)^{1/4}.$$

И, таким образом, функция $V(g_L, g_R)$ уже есть скаляр, зависящий от двух метрик. Необходимо отметить, что такое обобщение инвариантного объема на случай двух метрик не является однозначным. Например, можно определить объем как

$$d\Omega = d^4x(\sqrt{|g_R|} + \sqrt{|g_L|})/2\,,$$

и тогда в случае $g_R = g_L$ мы также получаем обычное выражение для инвариантного объема с одной метрикой. Более общий случай описывется формулой

$$d\Omega = 2^{a-3/2} d^4x(|g_R|^a + |g_L|^a)(|g_R| + |g_L|)^{a-1/2}\,,$$

где a положительная константа. Имеются и другие варианты выбора объема, которые будут рассмотрены в дальнейших работах.

ОБЩИЙ ВИД ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВСЕЛЕННЫХ

Необходимость того, чтобы под действием (3) потенциал $V(g_L, g_R)$ в (5) оставался скаляром, приводит к тому, что эта функция должна зависеть от смешанного тензора H, который определяется следующим выражением

$$H^{\mu}{}_{\nu} = g_L^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu}^R\,. \tag{6}$$

При этом вариация $g_{L,R}^{\mu\sigma}$ определяется по правилу

$$\delta g_{R,L}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\lambda}\partial_{\lambda} g_{R,L}^{\mu\nu} - g_{R,L}^{\lambda\nu}\partial_{\lambda}\varepsilon^{\mu} - g_{R,L}^{\mu\lambda}\partial_{\lambda}\varepsilon^{\nu}\,. \tag{7}$$

В 4-х мерном пространстве существует только 4 независимых скалярных инварианта, которые можно построить из тензора *H*. Введем матричное обозначение $\widehat{H}$ для тензора *H*, тогда 4 инварианта можно построить как след матрицы $\widehat{H}$ соответственно в 1-й, 2-й, 3-й, 4-й степени, т.е.

$$\tau_n \equiv \mathrm{Sp}(\widehat{H}^n)\,, \tag{8}$$

где n =1,2,3,4. Для этих 4-х скаляров можно получить и другую форму записи. Если определить четыре собственных значения λ_a (*a=0,1,2,3*) тензора *H* по обычному правилу

$$H^{\mu}{}_{\nu}\xi^{\nu} = \lambda\xi^{\mu}\,, \tag{9}$$

где ξ^{μ} – есть собственный вектор тензора *H*, то получаем

$$\tau_n = \lambda_0^n + \lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n\,.$$

В случае действительных и положительных собственных значений λ_a удобно рассматривать логарифмы собственных значений

$$\mu_a \equiv \ln\lambda_a\,. \tag{10}$$

Тогда, определяя четыре симметричных полинома σ_n как степени μ_a т.е.

$$\sigma_n = \mu_0^n + \mu_1^n + \mu_2^n + \mu_3^n\,, \tag{11}$$

можем записать потенциал как

$$V(g_L, g_R) = V(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)\,. \tag{12}$$

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

Важной характеристикой взаимодействующих вселенных является поведение функции $V(\sigma_n)$ в таких областях: 1) вблизи нуля $\sigma_n \to 0$; 2) при $\sigma_n \to \infty$; 3) около критических точек, в которых исчезает производная от потенциала $\dfrac{\partial V}{\partial \sigma_n}$.

Первый класс моделей – это модели бигравитации с равными нулю космологическими постоянными $\Lambda_R = \Lambda_L = 0$ в линеаризованном приближении, т.е. оба метрических тензора $g_{\mu\nu}^{R,L}$ являются возмущенной метрикой на плоском пространстве – времени $\eta_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu}^{R,L} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{R,L}, \tag{13}$$

где $h^{R,L} << 1$. В этом приближении тензор *H* принимает вид

$$H^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + h_R{}^{\mu}{}_{\nu} - h_L{}^{\mu}{}_{\nu}. \tag{14}$$

Причем индексы поднимаются и опускаются при помощи метрического тензора пространства Минковского. Собственные значения λ_a связаны с μa выражением $\lambda_a = 1 + \mu_a$, где $\mu_a << 1$. В этой модели можно получить обычный массовый член типа Паули – Фирца $h_\nu^\mu h_\mu^\nu - h_\mu^\mu h_\nu^\nu$, если при малых значениях $\mu_a \to 0$ потенциальная функция имеет вид

$$V(\sigma_a) = \sigma_2 - \sigma_1^{\,2}. \tag{15}$$

Второй класс моделей можно определить как класс потенциалов симметричных относительно замены $L \leftrightarrow R$, т.е. $V(g_L, g_R) = V(g_R, g_L)$. Такая замена приводит к тому, что собственные значения λ_a заменяются на обратные $\lambda_a \to \lambda_a^{-1}$, а, следовательно, их логарифм изменяет знак $\mu_a \to -\mu_a$. В терминах σ_n класс таких потенциалов будет определяться функциями, удовлетворяющими соотношению

$$V(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = V(-\sigma_1, \sigma_2, -\sigma_3, \sigma_4). \tag{16}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе анализируется некая обобщенная модель нелинейной мультигравитации, лагранжиан которой, при специфическом выборе параметров, принимает тот или иной "классический" вид. Из общих принципов предлагается построение потенциала взаимодействия, рассмотрены предельные случаи и предложены новые виды инвариантного объема. Дальнейшее направление наших исследований связано с построением эффективных действий мультигравитиции для конкретных моделей, например, моделей Калуцы-Клейна, моделей бран, супергравитиции и некоммутативной геометрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mohapatra R.N. Unification and Supersymmetry. Berlin. Springer-Verlag, 1986.
2. Srednicki M.A. Particle Physics and Cosmology: Dark Matter. Amsterdam, Netherlands: North-Holland, 1990.
3. Kogan I.I., Mouslopoulos S., Papazoglou A., Ross G.G. and Santiago J. A Three three-brane Universe:New Phenomenology for the New Millennium? // Nucl. Phys. B -2000. -V.584, -P. 313-328; Gregory R., Rubakov V.A. and Sibiryakov S.M. Opening up extra dimensions at ultra-large scales // Phys. Rev. Lett. –2000. -V.84. –P. 5928-5931; Kogan I.I. and Ross G.G. Brane Universe and Multigravity: Modification of gravity at large and small distances // Phys. Lett. B. –2000. –V.485. – P. 255-262.
4. Kogan I.I. Multi(Scale)Gravity: A Telescope for the Micro-World // arXiv:[astro-ph/0108220].
5. Boulanger N., Damour T., Gualtieri L. and Henneaux M. Inconsistency of interacting, multi-graviton theories // Nucl. Phys. B. -2001. -V597. –P.127-171.
6. Damour T. and Kogan I.I. Effective lagrangians and universality classes of nonlinear bigravity // arXiv: [hep-th/0206042].

LAGRANGIANS IN NONLINEAR MULTIGRAVITY MODELS

S.A. Duplij, A.T. Kotvytskiy
V.N. Karazin Kharkov National University, 61077, Svoboda sq.4.
E–mail: Steven.A.Duplij@univer.kharkov.ua, Albert.T.Kotwicki@univer.kharkov.ua

Nonlinear formulation of multigravity in the framework of weak coupled worlds is considered. The general form of multigravity lagrangians is analyzed. It is shown that when some paramenetrs satisfy special relations, this model tranforms into “classical” models, for indstance Pauli-Fiertz model. From general invariance principles and from requirement that interaction potential retain scalar one under metric tensor variations, the restriction of the shape of function describing universes interaction, is obtained. New shapes of invariant volume, which in case of bigravity in the limit $g_R \to g_L$ transform into the standard Riemann geometry volume, are introduced.

KEY WORDS: multigravity, bigravity, lagrangians, nonlinear models, weakly coupled worlds.