

УДК:533.951

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОРОДНОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ С ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИМИ СТЕНКАМИ

В.И. Лапшин, В.И. Ткаченко, И.В. Ткаченко

*Национальный Научный Центр ХФТИ
ул. Академическая 1, Харьков, 61108, Украина
e-mail tkachenko@kipt.kharkov.ua*

Поступила в редакцию 14 июня 2004 г.

В работе рассматриваются вопросы устойчивости электронной плазмы в цилиндрическом волноводе с идеально проводящими стенками. Получено дисперсионное уравнение для электронного плазменного кольца и построены поверхности, определяющие области существования устойчивых решений, для различных параметров системы и различных значений азимутального волнового числа l . Показано, что с ростом l относительная доля устойчивых колебаний электронного плазменного кольца уменьшается. Также показано, что при малых плотностях возможно существование квазистойчивых колебаний.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: заряженная плазма, электронное плазменное кольцо, диокотронная (слиппинг) неустойчивость

Широкий спектр применения заряженной (в зарубежной печати – «нейтральной») плазмы может легко объяснить тот повышенный интерес, который вызывают исследования по этой тематике. Заряженная плазма используется в ускорителях, основанных на коллективных эффектах, в исследованиях по физике сильноточных релятивистских электронных пучков, для генерации мощного микроволнового излучения, для захвата античастиц и получения позитронной плазмы [1], а также ускорения ионов и нагрева плазмы на коллективных неустойчивостях. Для наибольшей эффективности подобных исследований необходимо знать свойства равновесия и устойчивости заряженной плазмы, удерживаемой магнитным полем.

На сегодняшний день существует довольно широкий круг монографий, публикаций и экспериментальных работ в данном направлении. Вопросы устойчивости электронных плазменных систем, в целом, хорошо изучены. В работах [2-4] рассматриваются вопросы устойчивости электронной плазмы с различными профилями плотности. В работе [5] исследованы дисперсионные свойства электронного плазменного кольца и электронного плазменного кольца, с примыкающей к стенке волновода внешней границей (электронной плазменной трубы). Показано, что в случае электронной плазменной трубы неустойчивостей не возникает, а также получено условие, для параметров системы, при которых в электронном плазменном кольце возникают неустойчивости, получено ограничение $l \neq 0$ на спектр азимутальных волновых чисел.

За последнее десятилетие был проведен целый ряд экспериментов [6-9], в которых электронный плазменный пучок существовал достаточно большое время, большее, чем требуется для развития диокотронной (слиппинг) неустойчивости.

В работе мы аналитически получим дисперсионное уравнение для электронного плазменного кольца, дисперсионное уравнение электронной плазменной трубы получим соответствующим предельным переходом $R_2 \rightarrow R_c$ (смысл R_2 и R_c ясен из рис.1) и остановимся на исследовании дисперсионных свойств электронного плазменного кольца и электронной плазменной трубы. Также мы покажем, что в электронном плазменном кольце возможно существование колебаний с малым по отношению к частоте инкрементом.

ПОЛУЧЕНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим электронное плазменное кольцо, находящееся в цилиндрическом идеально проводящем волноводе во внешнем постоянном магнитном поле $\vec{H}_0 \uparrow \uparrow \vec{e}_z$. Распределение плотности электронов в кольце показано на рис.1. Это распределение можно записать следующим образом:

$$\Omega_e^2 = \begin{cases} 0, & 0 < r < R_1, \\ \Omega_e^2, & R_1 < r < R_2, \\ 0, & R_2 < r < R_c, \end{cases} \quad (1)$$

где $\Omega_e^2 = \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}$ - электронная плазменная частота, n_e - невозмущенная плотность электронов, R_1 , R_2 - внутренний и внешний радиусы электронного плазменного кольца, R_c - радиус стенки. Невозмущенная скорость пучка в аксиальном направлении постоянна и равна v_{z0} .

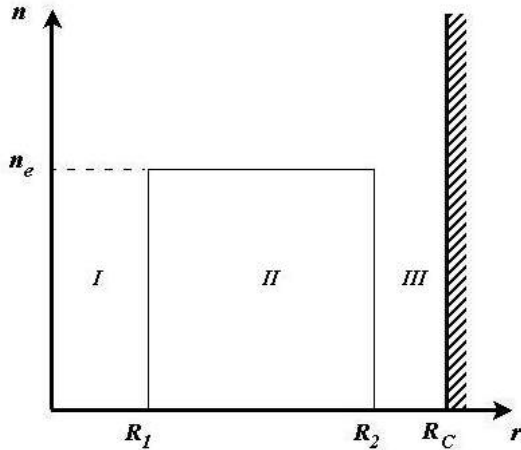


Рис.1. Профиль функции распределения электронов

Остановимся на анализе случая бесшпировых колебаний, когда пучок электронов движется с постоянной угловой скоростью $\Omega = const$, где $\Omega = \frac{\omega_e}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\Omega_e^2}{\omega_e^2}} \right]$, а $\omega_e = \frac{eH}{m_e c}$ - циклотронная частота. Такие движения столба заряженной плазмы становятся возможными в том случае, когда на внутренней стенке столба ($r = R_1$) находится поверхностный заряд $\sigma_1 = -\frac{en_e R_1}{2}$, а на поверхности проводника ($r = R_c$) - $\sigma_1 = \frac{en_e R_2^2}{2R_c}$. В противном случае возникает шир средней угловой скорости Ω и система будет подвержена диокотронной (слиппинг) неустойчивости [5].

Для получения дисперсионного уравнения воспользуемся уравнениями Максвелла, дополнив их уравнениями движения и непрерывности:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} en_e \vec{v} \quad (3)$$

$$\text{div} \vec{E} = -4\pi en_e \quad (4)$$

$$m_e \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = -e \vec{E} - \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \quad (5)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div} n_e \vec{v} = 0. \quad (6)$$

Считая, что существуют малые добавки к скорости v_r , v_θ , v_z , плотности \tilde{n} и потенциалу $\tilde{\varphi}$, получим решения уравнений (2-6), удержав члены первого порядка малости:

$$v_r = \frac{i \cdot (\omega_e - 2\Omega) \frac{e}{m}}{(\omega - l\Omega - k_z v_{z0})^2 - (\omega_e - 2\Omega)^2} \left[\frac{l}{r} \tilde{\varphi} + \frac{(\omega - l\Omega - k_z v_{z0})}{(\omega_e - 2\Omega)} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{\varphi} \right] \quad (7)$$

$$v_g = -\frac{e}{m} \frac{1}{(\omega - l\Omega - k_z v_{z0})^2 - (\omega_e - 2\Omega)^2} \left[(\omega - l\Omega - k_z v_{z0}) \frac{l}{r} \tilde{\varphi} + (\omega_e - 2\Omega) \frac{\partial}{\partial r} \tilde{\varphi} \right] \quad (8)$$

$$v_z = -\frac{e}{m} \frac{1}{(\omega - l\Omega - k_z v_{z0})} k_z \tilde{\varphi} \quad (9)$$

$$\tilde{n} = -\frac{1}{(\omega - l\Omega - k_z v_{z0})} \left[-\frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n_e v_r) + \frac{l \cdot n_e}{r} v_g + k_z v_z n_e \right]. \quad (10)$$

Из уравнений (7-10) и уравнения Пуассона:

$$\Delta \tilde{\varphi} = 4\pi e \tilde{n}$$

получим уравнение для возмущения потенциала:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \varepsilon_1 r \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} - \frac{l^2}{r^2} \varepsilon_1 \tilde{\varphi} - k_z^2 \varepsilon_3 \tilde{\varphi} - \frac{l}{r} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial r} \tilde{\varphi} = 0, \quad (11)$$

где введены следующие обозначения:

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\Omega_e^2}{(\omega - l\Omega - k_z v_{z0})^2 - (\omega_e - 2\Omega)^2},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Omega_e^2 (\omega_e - 2\Omega)}{(\omega - l\Omega - k_z v_{z0}) \left[(\omega - l\Omega - k_z v_{z0})^2 - (\omega_e - 2\Omega)^2 \right]},$$

$$\varepsilon_3 = 1 - \frac{\Omega_e^2}{(\omega - l\Omega - k_z v_{z0})^2}.$$

Следует отметить, что общий вид решений (7-11) не зависит от профиля функции распределения (1) и поэтому они являются справедливыми как для случая электронного плазменного кольца, так и для случаев электронного плазменного цилиндра и электронной плазменной трубы.

Запишем решения уравнения (11) для трех областей

$$\tilde{\varphi}_1 = A_1 I_l(\kappa_1 r) + B_1 K_l(\kappa_1 r), \quad (12)$$

$$\tilde{\varphi}_2 = A_2 J_l(\kappa_2 r) + B_2 N_l(\kappa_2 r), \quad (13)$$

$$\tilde{\varphi}_3 = A_3 I_l(\kappa_3 r) + B_3 K_l(\kappa_3 r), \quad (14)$$

где $\kappa_1 = \kappa_3 = k_z$, а $\kappa_2^2 = k_z^2 \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}$. Учитывая, что решение в области 1 должно быть ограничено,

соответствующий коэффициент при функции Макдональда положим равным нулю.

Решения (12), (13) и (14) описывают поведение возмущения электростатического потенциала $\tilde{\varphi}$ в областях 1, 2, и 3 соответственно. Необходимо дополнить систему уравнений (12-14) граничными условиями на внутреннем и внешнем радиусах кольца и на поверхности волновода. Условия непрерывности $\tilde{\varphi}$ при $r = R_1$ и $r = R_2$ запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(r = R_1) &= \tilde{\varphi}_2(r = R_1) \\ \tilde{\varphi}_2(r = R_2) &= \tilde{\varphi}_3(r = R_2). \end{aligned}$$

А условие равенства нулю возмущения потенциала на поверхности волновода будет иметь следующий вид:

$$\tilde{\varphi}_3(r = R_c) = 0.$$

Еще одно соотношение между $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$ и $\tilde{\varphi}_3$ получим, связав разрыв возмущений радиального электрического поля при переходе через границу кольца с поверхностной плотностью заряда, создаваемого возмущениями. Для этого уравнение (11) домножим на r и проинтегрируем по r в пределах от $r = R_1 - \alpha$ до

$r = R_1 + \alpha$ для внутреннего радиуса кольца и от $r = R_2 - \alpha$ до $r = R_2 + \alpha$ для внешнего, переходя в полученных интегралах к пределу $\alpha \rightarrow +0$.

Исключив таким образом неизвестные константы из уравнений (12), (13) и (14) получим следующее дисперсионное уравнение для плазменного электронного кольца

$$\frac{\left\{ \varepsilon_1 \kappa_2 R_1 \cdot \frac{J'_l(\kappa_2 R_1)}{J_l(\kappa_2 R_1)} - \kappa_2 R_1 \frac{I'_l(\kappa_2 R_1)}{I_l(\kappa_2 R_1)} - l \varepsilon_2 \right\} [J_l(\kappa_2 R_1) N'_l(\kappa_2 R_2) - J'_l(\kappa_2 R_2) N_l(\kappa_2 R_1)] \cdot \kappa_2 R_2}{\frac{J_l(\kappa_2 R_2)}{J_l(\kappa_2 R_1)} \frac{\kappa_1 R_2}{G(R_2, R_c)} [K_l(\kappa_1 R_c) I'_l(\kappa_1 R_2) - K'_l(\kappa_1 R_2) I_l(\kappa_1 R_c)] + \left\{ l \varepsilon_2 \frac{J_l(\kappa_2 R_2)}{J_l(\kappa_2 R_1)} - \varepsilon_1 \kappa_2 R_2 \cdot \frac{J'_l(\kappa_2 R_1)}{J_l(\kappa_2 R_1)} \right\}} = \varepsilon_1 \kappa_2 R_1 [J_l(\kappa_2 R_2) N'_l(\kappa_2 R_1) - J'_l(\kappa_2 R_1) N_l(\kappa_2 R_2)] + \kappa_1 R_1 [J_l(\kappa_2 R_1) N_l(\kappa_2 R_2) - J_l(\kappa_2 R_2) N_l(\kappa_2 R_1)] \times \frac{I'_l(\kappa_1 R_1)}{I_l(\kappa_1 R_1)} + l \varepsilon_2 [J_l(\kappa_2 R_1) N_l(\kappa_2 R_2) - J_l(\kappa_2 R_2) N_l(\kappa_2 R_1)] , \quad (15)$$

где $G(R_2, R_c) = K_l(\kappa_1 R_c) I_l(\kappa_1 R_2) - K_l(\kappa_1 R_2) I_l(\kappa_1 R_c)$.

Штрихованные величины в уравнении (15) означают производные по полному аргументу соответствующей специальной функции. Например, $\left. \frac{dJ_l(\kappa_i r)}{d\kappa_i r} \right|_{r=R_i} = J'_l(\kappa_i R_i)$.

Дисперсионное уравнение (15) описывает распространение электростатических волн в холодном заряженном плазменном кольце с равномерным распределением плотности заряда. Оно связывает частоту колебаний ω с азимутальным волновым числом l , продольным волновым числом k_z и параметрами R_1 , R_2 , R_c , ω_e , описывающими равновесное состояние. В общем случае, из уравнения (15) невозможно получить точное аналитическое решение для ω . Однако в некоторых предельных случаях возможно привести это дисперсионное уравнение к более простому виду.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ В ДЛИННОВОЛНОВОМ ПРЕДЕЛЕ

Исследуем уравнение (15) в длинноволновом пределе. Для этого положим $k_z = 0$. Заметим, что при таком условии уравнение (15), записанное для электронного плазменного цилиндра, не имеет решений в виде нормальных типов колебаний при $l = 0$ [5]. Поэтому ограничим наше рассмотрение исследованием возмущений только с такими азимутальными волновыми числами. В этом случае (при $l \neq 0$ и $k_z = 0$) уравнение (15) приобретет такой вид:

$$\frac{2(1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\left[\frac{(R_2/R_c)^{2l} + 1}{(R_2/R_c)^{2l} - 1} - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \right]} = (R_2/R_1)^{2l} \left((R_1/R_2)^{2l} - 1 \right) \left(\varepsilon_1 \frac{(R_1/R_2)^{2l} + 1}{(R_1/R_2)^{2l} - 1} - 1 - \varepsilon_2 \right). \quad (16)$$

Уравнение (16) в предельных случаях, при устремлении $R_1 \rightarrow 0$ или $R_2 \rightarrow R_c$ описывает дисперсионные свойства плазменного цилиндра или плазменной трубы соответственно. Дисперсионное уравнение (16) в пределе $R_2 \rightarrow R_c$ принимает следующий вид:

$$\varepsilon_1 \frac{(R_1/R_2)^{2l} + 1}{(R_1/R_2)^{2l} - 1} - 1 - \varepsilon_2 = 0. \quad (17)$$

Как видно из (17), это уравнение является алгебраическим уравнением третьего порядка относительно частоты ω . Аналитическое исследование уравнения (17) показывает, что в области параметров $\frac{R_2}{R_c}$ и $\frac{\Omega_e}{\omega_e}$ оно не имеет комплексных корней, поэтому колебания в электронной плазменной трубе устойчивы, что соответствует результату, приведенному в [5].

Проанализируем теперь дисперсионное уравнение (16) в случае, когда $R_2 \neq R_c$. Уравнение (16) является уравнением шестого порядка относительно частоты ω , поэтому его аналитическое решение не представляется

возможным. Тем не менее, можно определить численно значение таких параметров как R_1/R_2 , R_2/R_c , Ω_e/ω_e , при которых возможно развитие неустойчивости.

На рис.2 приведены области устойчивости в пространстве параметров R_1/R_2 , R_2/R_c , Ω_e/ω_e , для различных значений l . Алгоритм построения областей устойчивости был следующим: при фиксированных значениях R_1/R_2 , R_2/R_c , Ω_e/ω_e определялись соответствующие частоты, в том случае, если все решения были вещественными, соответствующая точка отображалась в пространстве (для наглядности черным цветом на рис. 2 показаны проекции областей устойчивости на плоскость $\delta_1\delta_2$).

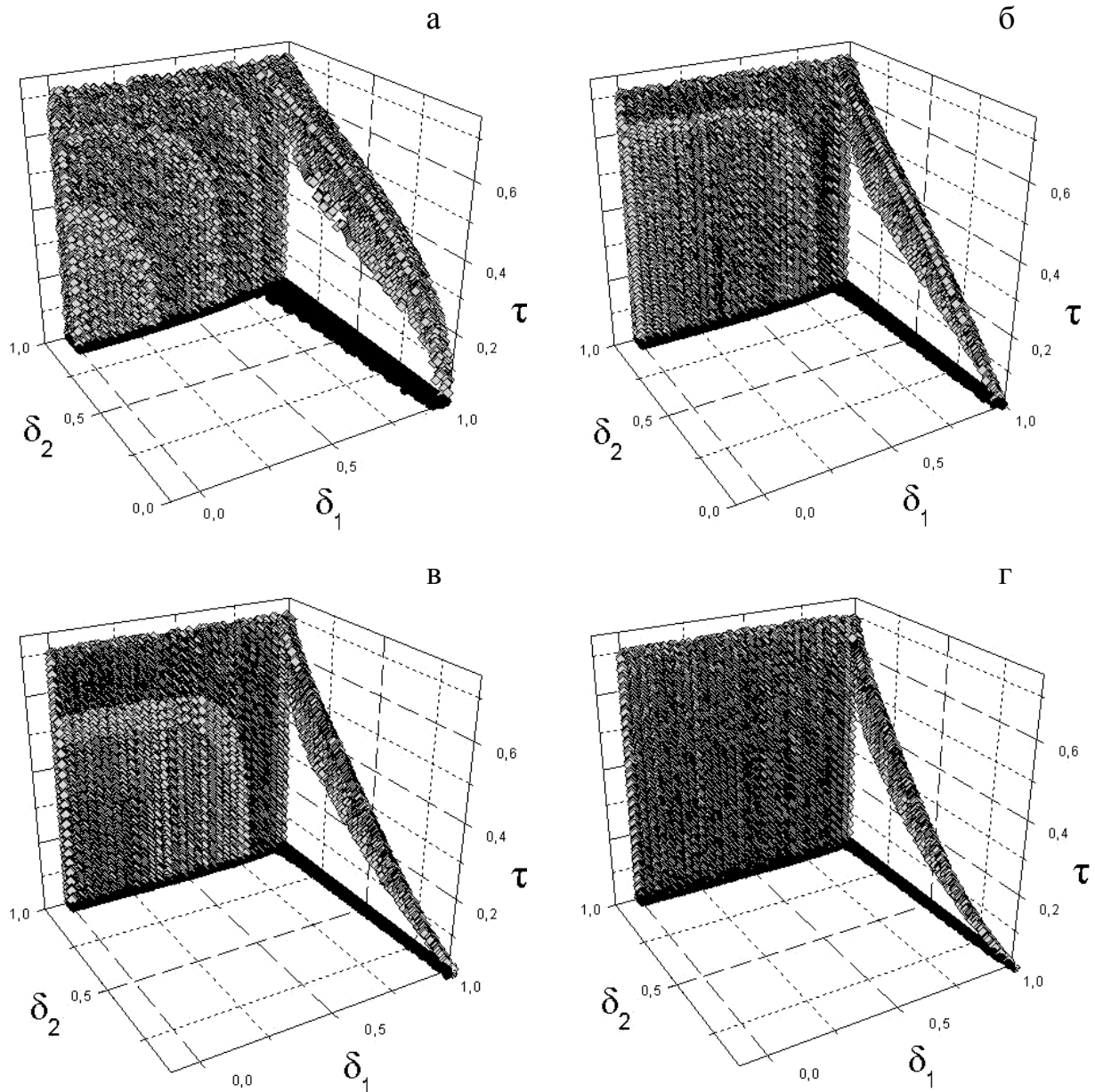


Рис.2. Области устойчивых и неустойчивых колебаний в пространстве параметров

$$\delta_1 = \frac{R_1}{R_2}, \quad \delta_2 = \frac{R_2}{R_c} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{\Omega_e}{\omega_e}. \quad \text{а) } l=1 \quad \text{б) } l=2 \quad \text{в) } l=3 \quad \text{г) } l=4.$$

Как видно из рис.2, устойчивые колебания происходят в электронном плазменном кольце в тех областях, где Ларморова частота значительно выше плазменной и внешний радиус кольца незначительно отличается от радиуса волновода, кроме того, относительная доля устойчивых колебаний (объем областей существования устойчивых решений по отношению к объему пространства $\delta_1\delta_2\tau$) с ростом l уменьшается. Также можно построить область существования квазиустойчивых ($\text{Im}(\omega)/\text{Re}(\omega) \ll 1$) колебаний.

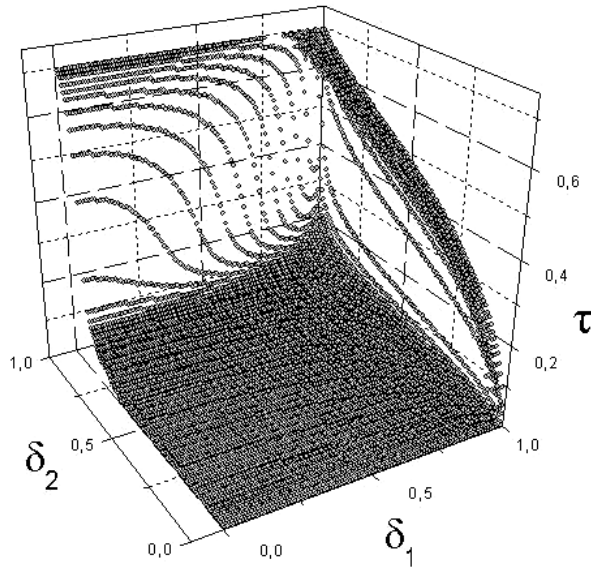


Рис.3. Область существования квазиустойчивых решений (ниже поверхности) для $l = 1$.

Существование квазиустойчивых колебаний может, на наш взгляд, объяснить ряд экспериментов [6-9], в которых пучок электронов существовал достаточно длительное время ($\tau \sim 10^{-3}$ с), значительно большее, чем требовалось для развития диокотронной неустойчивости $\tau_D \sim 10^{-5}$ с. Определение областей устойчивости и квазиустойчивости может оказаться полезным для проведения экспериментальных работ в области управляемого термоядерного синтеза, физики сильноточных пучков, а также накопителей заряженных частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J.J. Bollinger and J. Fajans // Non-neutral plasmas, Proc. of "Workshop on non-neutral plasmas", University of Colorado, 29 July – 1 August, 1997, Colorado, USA, 8 p.
2. R.H. Levy. Diocotron instability in cylindrical geometry // Phys. Fluids. – 1965. – V.8. – N7. – P. 1288-1295.
3. R.C. Davidson and Gian Marco Felice. Influence of profile shape on the diocotron instability in a non-neutral plasma column // Phys. Plasmas. – 1998. – V.5. – N10. – P. 3497-3511.
4. T.B. Mitchell and C.B. Driscoll. Electron vortex orbits and merger // Phys. Fluids. – 1996. – V.8. – N7. – P. 1828-1840.
5. Р. Девидсон. Теория заряженной плазмы. – М.: Мир, 1978. – 216 с.
6. В.А. Башко, С.М. Криворучко, И.К. Тарасов. Экспериментальные исследования механизма накопления и удержания заряженной плазмы при инжекции пучка электронов в однородное магнитное поле // Физика плазмы. – 1992. – Т.17. – Вып. 8. – С. 925-930.
7. С.М. Криворучко, И.К. Тарасов. Влияние внешних возмущений на растекание заряженной электронной плазмы в магнитном поле // Физика плазмы. – 1993. – Т.19. – Вып. 11. – С. 1343-1351.
8. A.A. Bizyukov, E.D. Volkov, I.K. Tarasov. Charged particles accumulation in drift space of warm electron beam during non-stationary virtual cathode existence // Problems of Atomic Science and Technology, series "Plasma Physics (7)". – 2002. – N4. – P. 144-145.
9. A.A. Bizyukov, E.D. Volkov, I.K. Tarasov. Self-consistent Penning-Malmberg trap // Problems of Atomic Science and Technology, series "Plasma Physics (7)". – 2002. – N4. – P. 146-148.

STABILITY OF THE HOMOGENEOUS ELECTRON PLASMA IN CYLINDRICAL SUPERCONDUCTIVE WAVEGUIDE

V.I. Lapshyn, V.I. Tkachenko, I.V. Tkachenko

National Science Center KIPT

Akademicheskaya str. 1, Kharkov, 61108, Ukraine

e-mail tkachenko@kipt.kharkov.ua

Questions of stability of electron plasma in a cylindrical waveguide with ideally conductive walls are considered. The dispersion equation of an electron plasma ring is received and the surfaces determining areas of existence of stable solutions, for various parameters of the system and various values of an azimuth wavenumber l are constructed. It is shown, that with growth of l the relative part of stable oscillations of an electron plasma ring decreases. Also it was shown, that at small densities quasi-stable oscillations can exist.

KEY WORDS: non-neutral plasma, electron plasma ring, diocotron (slipping) instability