УДК 539.12

О КВАНТОВОЙ КИНЕМАТИКЕ И ДИНАМИКЕ НА СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ В РАМКАХ ПОДХОДА ШВИНГЕРА

И.Г. Харин
Национальный Научный Центр “Харьковский Физико-технический Институт ”,
ул. Академическая 1, Харьков, 61108, Украина
E-mail:igor@isc.kharkov.com
Поступила в редакцию 15 ноября 2004 г.

Показано, что в рамках Швингеровской формулировки квантовой кинематики и динамики естественным образом возникает понятие суперпространства. Алгебраическая подобность обращения с величинами различной четности, алгебраическое определение операции дифференцирования в рамках этого подхода приводит к упрощению вывода многих важных результатов суперанализа. В частности в данной работе, используя этот подход, приводится вывод формулы для супердетерминанта, базирующийся на понятии дельта-функции на пространстве четных и нечетных переменных.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: квантовая динамика, четные и нечетные переменные, супергруппа, суперпространство, супердетерминант

В работах [1-3] Швингер, основываясь на своей формулировке квантовой динамики, которая позволяет вывести все свойства квантовой системы из одного динамического принципа, пришел к выводу, что функция Лагранжа с использованием взаимодополнительных канонических переменных первого и второго рода (известные в настоящий момент, как четные и нечетные переменные соответственно) должна иметь вид

$$L=\frac{1}{2}\left(p^{(1)}\circ\frac{dq^{(1)}}{dt}-\frac{dp^{(1)}}{dt}\circ q^{(1)}\right)+\frac{1}{2}\left(p^{(2)}\circ\frac{dq^{(2)}}{dt}-\frac{dp^{(2)}}{dt}\circ q^{(2)}\right)-H, \tag{1}$$

где для переменных первого и второго рода оператор ○ означает симметризацию и антисимметризацию соответственно, кроме того

$$\left[q_k^{(1)},q_l^{(1)}\right]=\left[p_k^{(1)},p_l^{(1)}\right]=0,\left[q_k^{(1)},p_l^{(1)}\right]=i\delta_{k,l}$$
$$\left\{q_k^{(2)},q_l^{(2)}\right\}=\left\{p_k^{(2)},p_l^{(2)}\right\}=0,\left\{q_k^{(2)},p_l^{(2)}\right\}=i\delta_{k,l}\,.$$

В лекциях в Лезуше (1955) [4] (некоторая часть материала была издана в [5-10]) он использовал левые и правые производные по антикоммутирующим переменным, грассмановы переменные, чтобы придать форму обычной группы Ли "специальной канонической группе преобразований", зависящей от коммутирующих и антикоммутирующих переменных (теперь аналогичные группы называют супергруппами).

Далее рассмотрим основные понятия интегрального исчисления на суперпространстве в рамках подхода Швингера.

ЭЛЕМЕНТ ОБЪЕМА НА ПРЯМОЙ СУММЕ ПОДПРОСТРАНСТВ НЕЧЕТНЫХ И ЧЕТНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Используя специальную каноническую группу и пользуясь алгебраическим определением операции дифференцирования, Швингер пришел к выводу, что во всех формулах для динамических переменных, операция интегрирования для переменных второго рода является операцией дифференцирования [11, с.113-115]. Рассматривая преобразование канонических переменных второго рода $\langle q^{(2)}{}'|q^{(2)}{}''\rangle$, Швингер отмечает [11, с.108-113], что смысл дельта-функции на пространстве нечетных переменных имеет следующая величина $\delta(q^{'(2)}-q^{''(2)})=\prod_k(q_k^{'(2)}-q_k^{''(2)})$. Это позволяет утверждать, что для дельта-функции в пространстве нечетных переменных $\delta(\lambda q^{(2)})=\det\lambda\,\delta(q^{(2)})$ при линейном преобразовании $q^{(2)}\to\lambda q^{(2)}$, и, следовательно,

$$d(\lambda\theta)=\frac{1}{\det\lambda}d(\theta) \tag{2}$$

для элемента объема $d(\theta)$, где $1/\det\lambda$ якобиан, соответствующий преобразованию, для которого дифференциал в пространстве нечетных переменных θ преобразуется как $d\theta'=\lambda d\theta$. Таким образом, если рассматривать преобразование l в пространстве четных переменных ($dx'=ldx$) и преобразование λ в пространстве нечетных переменных, что соответствует преобразованию $S=\begin{pmatrix} l & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ на пространстве, являющемся прямой суммой подпространств $L={}^0L\oplus{}^1L$, где ${}^0L$ образованно только из четных величин x, а

${}^{1}L$ из нечетных величин θ, то для преобразования элемента объема $d(z)=d(x)d(\theta)$ в L для S, где $z\in L$, имеем

$$d(Sz)=\frac{\det l}{\det\lambda}d(z)\,. \tag{3}$$

СУПЕРДЕТЕРМИНАНТ

И наконец, рассмотрим тот шаг, который мог сделать в 60-х Швингер, и о чем написал в 1979: “All right, wise guy! Then why didn’t you do it first?” [12].

Продолжим алгебраический подход на суперпространство, являющееся прямой суммой подпространств $L={}^{0}L\oplus{}^{1}L$, с учетом преобразований, *перемешивающих* четные и нечетные переменные. Легко показать, что, так как правила обращения со сложной функцией и дифференциалами на суперпространстве алгебраически подобны, соответствующим величинам на пространстве четных переменных, то якобиан, обладает стандартным мультипликативным свойством относительно последовательности преобразований образующих на суперпространстве. Любое преобразование $M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, где для d существует обратное преобразование, можно разложить на три последовательных преобразования

$$M=ABC=\begin{pmatrix}1 & bd^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a-bd^{-1}c & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ d^{-1}c & 1\end{pmatrix}, \tag{4}$$

(разложение Гаусса, см., например, [13, с. 56]). В случае, когда a и d четные преобразования на ${}^{0}L$ и ${}^{1}L$ соответственно, а b и c – нечетные преобразования (*перемешивающие* четные и нечетные переменные), для преобразования вектора в суперпространстве, имеем следующее утверждение: так как первое преобразование C изменяет нечетные величины только за счет четных, а последнее A наоборот, то, используя метод определения якобиана через дельта-функцию, получаем, что якобианы для этих преобразований равны 1. Отсюда следует, что якобиан для преобразования M $J_M=J_B$, соответствующий преобразованию на суперпространстве, дифференциалы при котором преобразуются, как $dz'=Mdz$. Преобразование B - это прямое произведение преобразований $a_S=a-bd^{-1}c$ на ${}^{0}L$ (дополнение Шура) и d на ${}^{1}L$, таким образом $J_B=J_{a_S}J_d$. Тогда, учитывая вышесказанное о якобиане преобразования на пространстве ${}^{1}L$, в случае суперпространства получаем формулу

$$J_M=\det(a-bd^{-1}c)\det d^{-1}\,, \tag{5}$$

что и является формулой супердетерминанта для суперматрицы M, впервые опубликованной в таком виде Пахомовым в 1974 [14].

ВЫВОДЫ

Таким образом, алгебраическая подобность обращения с динамическими величинами разной четности, естественность введения супердетерминанта через определение дельта-функции в рамках подхода Швингера, говорит о том, что в этом подходе [15], незаслуженно сейчас забытом (однако см. [16]), еще в 60-х годах XX века были заложены основы для описания квантовой кинематики и динамики на суперпространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schwinger J. The Theory of Quantized Fields. I // Phys. Rev. -1951 - V.82. – P. 914-927.
2. Schwinger J. On the Green's Functions of Quantized Fields. II // Proc. NAS. - 1951. - V.37. – P. 452-455.
3. Schwinger J. A Note on the Quantum Dynamical Principle // Phil. Mag. - 1953. - V.44. – P. 1171-1179.
4. Schwinger J. Lectures at the Summer School of Theoretical Physics. - France : Les Houches, 1955.
5. Schwinger J. The Special Canonical Group // Proc. NAS. - 1960. - V. 46. – P. 1401-1415.
6. Schwinger J. Unitary Operator Bases // Proc. NAS. - 1960. - V. 46. – P. 570-579.
7. Schwinger J. Unitary Transformations and the Action Principle // Proc. NAS. - 1960. - V.46. – P. 883-897.
8. Schwinger J. Quantum Variables and the Action Principle // Proc. NAS. - 1961. - V.47. – P. 1075-1083.
9. Schwinger J. Exterior Algebra and the Action Principle. I // Proc. NAS. - 1962. - V.48. – P. 603-611.
10. Schwinger J. The Theory of Quantized Fields. II // Phys. Rev. - 1953. - V.91. – P. 713-728.
11. Швингер Ю. Квантовая кинематика и динамика – М.: Наука, 1992.- 321 с.
12. Schwinger J. Multispinor basis of fermi-bose transformation // Ann. Phys. - 1979. - V.119. – P. 192-237.
13. Желобенко Д. П. Компактные группы Ли и их представления. - М.: Наука, 1968. – 477 с.

14. Пахомов В. Ф. Автоморфизмы тензорного произведения абелевой и грассмановой алгебр // Матем. Заметки. - 1974. - Т.16. – С. 65-74.
15. Schwinger J. Quantum Kinematic and Dynamics. - New York: W.A. Benjamin, 1970. -327 p.
16. Kharin I. "Anticommuting variables, pre-history in physics" // Concise Encyclopedia of Supersymmetry. - Dordrecht-Boston-London. Kluwer Academic Publishers, Eds. S. Duplij, W. Siegel, J. Bagger, 2004. - P. 18-19.

ABOUT QUANTUM KINEMATICS AND DYNAMICS ON SUPERSPACE WITHIN THE FRAMEWORK OF SCHWINGER'S APPROACH

I.G. Kharin
National Scientific Center "Kharkov Institute Physics and Technology", Akademicheskaia 1, Kharkov, 61108, Ukraine

We show that in the frameworks of Schwinger's formulation of quantum kinematics and dynamics naturally there is a concept of superspace. Within the frameworks of this approach the algebraic similitude of the manipulation with variables of various parity, the algebraic definition of the differentiation operation results in simplification of a conclusion of many important results of the superanalysis. In particular in this paper using this approach we deduce the formula for the superdeterminant basing on the concept of delta - function on the space of even and odd variables.

KEY WORDS: quantum dynamics, even and odd variables, supergroup, superspace, superdeterminant