УДК 539.12

КОНСТАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ КВАНТОВОГО УРАВНЕНИЯ ЯНГА-БАКСТЕРА НАД ГРАССМАНОВОЙ АЛГЕБРОЙ

С.А. Дуплий, О.И. Котульская, А.С. Садовников
Физико-технический факультет, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
E-mail: Steven.A.Duplij@univer.kharkov.ua. Internet: http://www.math.uni-mannheim.de/~duplij
Поступила в редакцию 25 марта 2005 г.

Исследованы константные решения уравнения Янга-Бакстера для случая 6 вершинной R-матрицы, которая возникает при описании точно-решаемых моделей, квантовой плоскости и специального вида квантовых гейтов. Произведена общая классификация решений над грассмановой алгеброй и рассмотрены различные частные случаи. В отличие от стандартного случая, когда R-матрица над числовым полем может иметь одновременно не более 5 ненулевых элементов, в нашем случае (над грассмановой алгеброй) все 6 элементов могут быть отличны от нуля. Рассмотрены решения, приводящие к регулярным R-матрицам, которые появляются при описании слабых алгебр Хопфа.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: константное решение, грассманова алгебра, квантовый гейт, регулярность, R-матрица

Уравнение Янга-Бакстера [1, 2] является важным в современной теоретической физике [3]. Необходимость детального изучения решений уравнения Янга-Бакстера связана с его ключевой ролью в точнорешаемых моделях статистической механики [2,3] и теории поля в малых размерностях [1], конформной теории поля [4] и в квантовых интегрируемых системах [5]. С теоретико-групповой точки зрения, в то время, как классическое уравнение Янга-Бакстера тесно связано с теорией классических (полупростых) групп, квантовое уравнение Янга-Бакстера является основой современной теории квантовых групп [6–9]. Имеется константная, однопараметрическая и двухпараметрическия формы квантового уравнения Янга-Бакстера [10]. Соответствующие константные (и перестановочные) решения уравнения Янга-Бакстера [11] применяются в квантовании интегрируемых нелинейных уравнений эволюции, теории квантовых групп [12–15] и теории узлов [16, 17]. Решением квантового уравнения Янга-Бакстера является R-матрица [18, 19] (соответствующая трансфер-марице в решеточных статистических моделях [3]).

В последнее время унитарные решения уравнения Янга-Бакстера нашли также применение в квантовых вычислениях [20, 21], при этом унитарная R-матрица специального вида, действуя на квантовое состояние двух кубитов, по теореме Брылинских [22] может трактоваться как универсальный квантовый гейт [23–25].

Обобщение квантового метода обратной задачи рассеяния на суперсимметичные системы [26] и соответствующие R-матрицы были рассмотрены в [27, 28]. Построение суперсимметричных аналогов данных конструкций требует последовательного рассмотрений решений уравнения Янга-Бакстера над грассмановой алгеброй.

В данной работе рассматриваются константные решения уравнения Янга-Бакстера для случая 6 вершин, применяемые для описания двухпараметрической квантовой плоскости [29] и специального вида квантовых гейтов [23,25]. Произведена общая классификация решений и рассмотрены частные случаи. В отличие от стандартного случая, когда R-матрица над обычным числовым полем (например, $\mathbb{R}, \mathbb{C}$) может иметь одновременно не более 5 ненулевых элементов [11, 30], в нашем случае (над грассмановой алгеброй) все 6 элементов могут быть отличны от нуля. Появляется новый вид решений, отсутствующий в стандартном случае [11, 30] — действительно полное 6-вершинное решение. В заключение рассмотрены решения, приводящие к регулярным R-матрицам, которые появляются при описании слабых алгебр Хопфа [31, 32].

УРАВНЕНИЕ ЯНГА-БАКСТЕРА НАД ГРАССМАНОВОЙ АЛГЕБРОЙ

Пусть V — векторное пространство, тогда на тензорном произведении $V^{\otimes n}$ определим линейный оператор $\mathrm{R} : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$ следующим образом. Пусть $\{e_i\}$-базис в V. Сопоставим оператору R числовую матрицу R с n парами индексов

$$\mathrm{R}\left(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}\right) = R_{i_1 \cdots i_n}^{j_1 \cdots j_n} (e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_n}), \tag{1}$$

где по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Рассмотрим n-симплексное уравнение на тензорном произведении $V^{\otimes[n(n+1)/2]}$, где линейные операторы R действуют тривиально, например $\mathrm{R}_{12}\left(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_3}\right) = r_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}\left(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_3}\right)$. В общем случае с $K_\alpha \in \{1, \ldots, N\}$, $N = \dfrac{n(n+1)}{2}$ операторы R имеют вид

$$\left(R_{K_1 \ldots K_n}\right)_{i_1 \cdots i_N}^{j_1 \cdots j_N} = r_{i_{K_1} \cdots i_{K_n}}^{j_{K_1} \cdots j_{K_n}} \prod_{k=1, k \neq K_\alpha, \forall \alpha}^{N} \delta_{i_k}^{j_k}, \tag{2}$$

где $r_{i_{K_1}\cdots i_{K_n}}^{j_{K_1}\cdots j_{K_n}}$ — матричный элемент R-матрицы. Например, 2-симплексное константное уравнение определяется формулой

$$\mathrm{R}_{12}\mathrm{R}_{13}\mathrm{R}_{23} = \mathrm{R}_{23}\mathrm{R}_{13}\mathrm{R}_{12} \tag{3}$$

и называется уравнением Янга-Бакстера [3, 10], а 3-симплексное уравнение

$$\mathrm{R}_{123}\mathrm{R}_{145}\mathrm{R}_{246}\mathrm{R}_{356} = \mathrm{R}_{356}\mathrm{R}_{246}\mathrm{R}_{145}\mathrm{R}_{123} \tag{4}$$

называется уравнением тетраэдра, в [33] рассматривалось также и 4-симплексное уравнение

$$\mathrm{R}_{1234}\mathrm{R}_{1567}\mathrm{R}_{2589}\mathrm{R}_{3680}\mathrm{R}_{4790} = \mathrm{R}_{4790}\mathrm{R}_{3680}\mathrm{R}_{2589}\mathrm{R}_{1567}\mathrm{R}_{1234}. \tag{5}$$

В терминах мультииндексных матриц, определенных в (2), операторные уравнения (3)-(5) принимают вид

$$r_{j_2j_3}^{k_2k_3}\, r_{j_1k_3}^{k_1l_3}\, r_{k_1k_2}^{l_1l_2} = r_{j_1j_2}^{k_1k_2}\, r_{k_1j_3}^{l_1k_3}\, r_{k_2k_3}^{l_2l_3}, \tag{6}$$

$$r_{j_3j_5j_6}^{k_3k_5k_6}\, r_{j_2j_4k_6}^{k_2k_4l_6}\, r_{j_1k_4k_5}^{k_1l_4l_5}\, r_{k_1k_2k_3}^{l_1l_2l_3} = r_{j_1j_2j_3}^{k_1k_2k_3}\, r_{k_1j_4j_5}^{l_1k_4k_5}\, r_{k_2k_4j_6}^{l_2l_4k_6}\, r_{k_3k_5k_6}^{l_3l_5l_6}, \tag{7}$$

$$r_{j_4j_7j_9j_0}^{k_4k_7k_9k_0}\, r_{j_3j_6j_8k_0}^{k_3k_6k_8l_0}\, r_{j_2j_5k_8k_9}^{k_2k_5l_8l_9}\, r_{j_1k_5k_6k_7}^{k_1l_5l_6l_7}\, r_{k_1k_2k_3k_4}^{l_1l_2l_3l_4} = r_{j_1j_2j_3j_4}^{k_1k_2k_3k_4}\, r_{k_1j_5j_6j_7}^{l_1k_5k_6k_7}\, r_{k_2k_5j_8j_9}^{l_2l_5k_8k_9}\, r_{k_3k_6k_8j_0}^{l_3l_6l_8k_0}\, r_{k_4k_7k_9k_0}^{l_4l_7l_9l_0}. \tag{8}$$

Общая формулировка подобных (n-симплексных) уравнений приведена в [34], а перестановочные решения изучались в [30, 33]

В данной работе мы будем рассматривать константные решения для 2-симплексного уравнения (6) (уравнения Янга-Бакстера) над грассмановой алгеброй, являющейся частным случаем супералгебры [35, 36], что является важным шагом на пути последовательного суперсимметричного обобщения уравнения Янга-Бакстера и его константных решений [26, 37, 38].

Пусть Λ — коммутативная супералгебра над полем $\mathbb{K}$ (где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{Q}_p$) с разложением на прямую сумму $\Lambda = \Lambda_{\bar 0} \oplus \Lambda_{\bar 1}$ [35, 36]. Элементы a из $\Lambda_{\bar 0}$ and $\Lambda_{\bar 1}$ являются однородными по отношению к четности $\mathsf{p}(a) \overset{def}{=} \left\{\bar i \in \left\{\bar 0, \bar 1\right\} = \mathbb{Z}_2 \,|\, a \in \Lambda_{\bar i}\right\}$. Суперкоммутатор определяется как $[a, b] = ab - (-1)^{\mathsf{p}(a)\mathsf{p}(b)}\, ba$. В частном случае Λ_n — грассманова алгебра с образующими $\xi_i, \ldots, \xi_n$, которые удовлетворяют $\xi_i\xi_j + \xi_j\xi_i = 0$, $1 \le i, j \le n$, в частности $\xi_i^2 = 0$ (n может быть бесконечным). Структура супералгебры в Λ_n определяется тем, что четность образующей полагается равной $\mathsf{p}(\xi_i) = \bar 1$ [39]. Тогда четный $x \in \Lambda_{\bar 0}$ и нечетный $\varkappa \in \Lambda_{\bar 1}$ элементы грассмановой алгебры разлагаются в сумму (которая конечна при конечном числе образующих ξ_i)

$$x = x_{numb} + x_{nil} = x_0 + x_{12}\xi_1\xi_2 + x_{13}\xi_1\xi_3 + \ldots = x_{numb} + \sum_{1\le r\le n}\ \sum_{1<i_1<\ldots<i_{2r}\le n} x_{i_1\ldots i_{2r}}\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_{2r}}, \tag{9}$$

$$\varkappa = \varkappa_{nil} = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_{123}\xi_1\xi_2\xi_3 + \ldots = \sum_{1\le r\le n}\ \sum_{1<i_1<\ldots<i_{2r-1}\le n} x_{i_1\ldots i_{2r-1}}\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_{2r-1}}, \tag{10}$$

where $x_{i_1\ldots i_n} \in \mathbb{K}$. Отображение ε, отбрасывающее нечетные образующие, называется числовым отображением [40, 41] (канонической проекцией [42], body map [43–45]) и оно действует на элементы (9)–(10) как $\varepsilon(x) = x|_{\xi_i=0} = x_{numb}$, $\varepsilon(\varkappa) = \varkappa|_{\xi_i=0} = 0$. Из (9)-(10) следует, что, например, уравнения $x^2 = 0$, $\varkappa x = 0$ и $\varkappa\varkappa' = 0$ могут иметь ненулевые нетривиальные решения (делители нуля и нильпотенты), которые могут существенно расширить число решений различных уравнений, в том числе, уравнения Янга-Бакстера. Например, в Λ_4 четные ненулевые нильпотенты $x^2 = 0$ удовлетворяют

$$x_0 = 0, \tag{11}$$

$$x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0, \tag{12}$$

и для компонент ненулевых делителей нуля $\varkappa x = 0$ получаем

$$x_0 = 0, \tag{13}$$

$$x_1x_{23} - x_2x_{13} + x_3x_{12} = 0, \tag{14}$$

$$x_1x_{24} - x_2x_{14} + x_4x_{12} = 0, \tag{15}$$

$$x_1x_{34} - x_3x_{14} + x_4x_{13} = 0, \tag{16}$$

$$x_2x_{34} - x_3x_{24} + x_4x_{23} = 0. \tag{17}$$

Для $\varkappa\varkappa' = 0$ мы получаем условия

$$x_ix_j' - x_jx_i' = 0, i, j = 1, 2, 3, 4, \tag{18}$$

которые показывают, что такие нечетные объекты (10) — нильпотенты второй степени нильпотентности $\varkappa^2 = 0$.

Рассмотрим R-матрицу над четной частью грассмановой алгебры, например, с 4 образующими, запишем ее разложение на числовую и нильпотентную части

$$R = R^{(0)} + R^{(12)}\xi_1\xi_2 + R^{(13)}\xi_1\xi_3 + R^{(14)}\xi_1\xi_4 + R^{(23)}\xi_2\xi_3 + R^{(24)}\xi_2\xi_4 + R^{(34)}\xi_3\xi_4 + R^{(1234)}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4, \quad (19)$$

компоненты уравнения Янга-Бакстера представим в таком же виде

$$R_{12} = R_{12}^{(0)} + R_{12}^{(12)}\xi_1\xi_2 + R_{12}^{(13)}\xi_1\xi_3 + R_{12}^{(14)}\xi_1\xi_4 + R_{12}^{(23)}\xi_2\xi_3 + R_{12}^{(24)}\xi_2\xi_4 + R_{12}^{(34)}\xi_3\xi_4 + R_{12}^{(1234)}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4, \quad (20)$$

$$R_{13} = R_{13}^{(0)} + R_{13}^{(12)}\xi_1\xi_2 + R_{13}^{(13)}\xi_1\xi_3 + R_{13}^{(14)}\xi_1\xi_4 + R_{13}^{(23)}\xi_2\xi_3 + R_{13}^{(24)}\xi_2\xi_4 + R_{13}^{(34)}\xi_3\xi_4 + R_{13}^{(1234)}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4, \quad (21)$$

$$R_{23} = R_{23}^{(0)} + R_{23}^{(12)}\xi_1\xi_2 + R_{23}^{(13)}\xi_1\xi_3 + R_{23}^{(14)}\xi_1\xi_4 + R_{23}^{(23)}\xi_2\xi_3 + R_{23}^{(24)}\xi_2\xi_4 + R_{23}^{(34)}\xi_3\xi_4 + R_{23}^{(1234)}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4. \quad (22)$$

Подставим данные выражения в (3) и получим систему уравнений для компонент

$$R_{12}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(0)} = R_{23}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(0)}, \quad (23)$$

$$R_{12}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(12)} + R_{12}^{(0)}R_{13}^{(12)}R_{23}^{(0)} + R_{12}^{(12)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(0)} = R_{23}^{(12)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(12)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(12)}, \quad (24)$$

$$R_{12}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(13)} + R_{12}^{(0)}R_{13}^{(13)}R_{23}^{(0)} + R_{12}^{(13)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(0)} = R_{23}^{(13)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(13)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(13)}, \quad (25)$$

$$R_{12}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(14)} + R_{12}^{(0)}R_{13}^{(14)}R_{23}^{(0)} + R_{12}^{(14)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(0)} = R_{23}^{(14)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(14)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(14)}, \quad (26)$$

$$R_{12}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(23)} + R_{12}^{(0)}R_{13}^{(23)}R_{23}^{(0)} + R_{12}^{(23)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(0)} = R_{23}^{(23)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(23)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(23)}, \quad (27)$$

$$R_{12}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(24)} + R_{12}^{(0)}R_{13}^{(24)}R_{23}^{(0)} + R_{12}^{(24)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(0)} = R_{23}^{(24)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(24)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(24)}, \quad (28)$$

$$R_{12}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(34)} + R_{12}^{(0)}R_{13}^{(34)}R_{23}^{(0)} + R_{12}^{(34)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(0)} = R_{23}^{(34)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(34)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(34)}, \quad (29)$$

$$\begin{gathered}
R_{12}^{(0)}R_{13}^{(12)}R_{23}^{(34)} - R_{12}^{(0)}R_{13}^{(13)}R_{23}^{(24)} + R_{12}^{(0)}R_{13}^{(14)}R_{23}^{(23)} + R_{12}^{(0)}R_{13}^{(23)}R_{23}^{(14)} - R_{12}^{(0)}R_{13}^{(24)}R_{23}^{(13)} + R_{12}^{(0)}R_{13}^{(34)}R_{23}^{(12)} + \\
+ R_{12}^{(12)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(34)} - R_{12}^{(13)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(24)} + R_{12}^{(14)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(23)} + R_{12}^{(23)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(14)} - R_{12}^{(24)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(13)} + R_{12}^{(34)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(12)} + \\
+ R_{12}^{(12)}R_{13}^{(34)}R_{23}^{(0)} - R_{12}^{(13)}R_{13}^{(24)}R_{23}^{(0)} + R_{12}^{(14)}R_{13}^{(23)}R_{23}^{(0)} + R_{12}^{(23)}R_{13}^{(14)}R_{23}^{(0)} - R_{12}^{(24)}R_{13}^{(13)}R_{23}^{(0)} + R_{12}^{(34)}R_{13}^{(12)}R_{23}^{(0)} + \\
+ R_{12}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(1234)} + R_{12}^{(0)}R_{13}^{(1234)}R_{23}^{(0)} + R_{12}^{(1234)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(0)} = R_{23}^{(1234)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(1234)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(1234)} + \\
+ R_{23}^{(34)}R_{13}^{(12)}R_{12}^{(0)} - R_{23}^{(24)}R_{13}^{(13)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(23)}R_{13}^{(14)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(14)}R_{13}^{(23)}R_{12}^{(0)} - R_{23}^{(13)}R_{13}^{(24)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(12)}R_{13}^{(34)}R_{12}^{(0)} + \\
+ R_{23}^{(34)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(12)} - R_{23}^{(24)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(13)} + R_{23}^{(23)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(14)} + R_{23}^{(14)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(23)} - R_{23}^{(13)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(24)} + R_{23}^{(12)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(34)} + \\
+ R_{23}^{(0)}R_{13}^{(34)}R_{12}^{(12)} - R_{23}^{(0)}R_{13}^{(24)}R_{12}^{(13)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(23)}R_{12}^{(14)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(14)}R_{12}^{(23)} - R_{23}^{(0)}R_{13}^{(13)}R_{12}^{(24)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(12)}R_{12}^{(34)}, \quad (30)
\end{gathered}$$

где уравнение (23) представляет собой стандартное константное уравнение Янга-Бакстера для матриц над числовым полем. Все возможные решения уравнения (23) были получены в [11,30]. В принципе, используя эти решения, с помощью системы (24)-(30) можно получить и все соответствующие классы решений на грассмановой алгебре.

В частном случае, когда имеется следующая симметрия

$$R^{(12)} = R^{(13)} = R^{(14)} = R^{(23)} = R^{(24)} = R^{(34)} = R^{(1)}, \quad (31)$$

система (23)-(30) упрощается и приобретает вид

$$R_{12}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(0)} = R_{23}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(0)}, \quad (32)$$

$$R_{12}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(1)} + R_{12}^{(0)}R_{13}^{(1)}R_{23}^{(0)} + R_{12}^{(1)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(0)} = R_{23}^{(1)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(1)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(1)}, \quad (33)$$

$$\begin{gathered}
2(R_{12}^{(0)}R_{13}^{(1)}R_{23}^{(1)} + R_{12}^{(1)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(1)} + R_{12}^{(1)}R_{13}^{(1)}R_{23}^{(0)}) + R_{12}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(1234)} + R_{12}^{(0)}R_{13}^{(1234)}R_{23}^{(0)} + R_{12}^{(1234)}R_{13}^{(0)}R_{23}^{(0)} \\
= 2(R_{23}^{(1)}R_{13}^{(1)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(1)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(1)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(1)}R_{12}^{(1)}) + R_{23}^{(1234)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(1234)}R_{12}^{(0)} + R_{23}^{(0)}R_{13}^{(0)}R_{12}^{(1234)}. \quad (34)
\end{gathered}$$

Таким образом, существуют решения, удовлетворяющие данной системе, но с ненулевой нильпотентной частью.

С формальной точки зрения чисто нильпотентные решения (не содержащее числовой части в разложении (19)) существуют при любом количестве грассмановых образующих. Для того, чтобы кубическое нильпотентное выражение было отлично от нуля, необходимо по крайней мере 6 образующих грассмановой алгебры. Поэтому для числа образующих меньше 6 чисто нильпотетным решением (при $R^{(0)} = 0$) будет любая матрица, так как уравнения для компонент R-матрицы однородные третьей степени.

Если рассматривать R-матрицу общего вида со всеми ненулевыми элементами, то уравнение Янга-Бакстера сводится к системе из 64 уравнений с 16 неизвестными [33]. С учетом разложения над грассмановой алгеброй (19) количество уравнений и количество переменных существенно увеличивается. Поэтому мы будем рассматривать только 6-вершинные решения.

КЛАССИФИКАЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЯНГА-БАКСТЕРА С ЧИСЛОМ ВЕРШИН, МЕНЬШИМ ИЛИ РАВНЫМ ШЕСТИ

В соответствии с [18] 6-вершинным решением уравнения Янга-Бакстера называют R-матрицы вида

$$R=\begin{pmatrix} p & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c & d & \cdot \\ \cdot & a & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}, \tag{35}$$

где a,b,c,d,p,q – четные элементы грассмановой алгебры. Из уравнения Янга-Бакстера (3) следет, что R-матрица определена с точностью до константы (масштабная симметрия), так что всегда можно произвести нормировку на элемент, числовая часть которого отлична от нуля. Поскольку заранее (до классификации) неизвестно, какой из элементов в (3) имеет ненулевую числовую часть, мы не будем производить нормировку в (35).

Из (2) и (3) следует явный вид матриц R_{12}, R_{13}, R_{23}

$$R_{12}=\begin{pmatrix} p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & c & \cdot & d & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot & d & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a & \cdot & b & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot & b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}, R_{13}=\begin{pmatrix} p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c & \cdot & \cdot & d & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & c & \cdot & \cdot & d & \cdot \\ \cdot & a & \cdot & \cdot & b & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot & \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}, \tag{36}$$

$$R_{23}=\begin{pmatrix} p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c & d & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a & b & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c & d & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Подставим R_{12}, R_{13}, R_{23} в (6) и получим следующую (существенно переопределенную) систему уравнений

$$cda = 0, \tag{38}$$

$$bda = 0, \tag{39}$$

$$da(d-a) = 0, \quad pd(d-p)+cbd=0, \tag{40}$$

$$qd(d-q)+cbd = 0, \; pa(a-p)+cba=0, \; qa(a-q)+cba=0. \tag{41}$$

Все параметры представим в виде суммы числовой части и четной нильпотентной $x = x_0 + \tilde{x}$, где $x = a,b,c,d,p,q$. Понятно, что системе уравнений (38)-(41) отдельно должна удовлетворять числовая часть, так что по ней будем производить классификацию решений.

Из-за уравнения (38) $cda = 0$ следует, что решения для числовой части удобно классифицировать по равенству нулю элементов a_0 и d_0.

1) Оба отличны от нуля: $d_0, a_0 \neq 0 \to b_0 = c_0 = 0, a_0 = d_0, \{p_0, q_0\} = \{0, a_0\}$, где $\{\ \}$ означает множество элементов. Тогда для числовой части R-матрицы получаем 4-вершинное решение

$$R^{(0)}=\begin{pmatrix} \{0,a_0\} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_0 & \cdot \\ \cdot & a_0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \{0,a_0\} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \{0,1\} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \{0,1\} \end{pmatrix}, \tag{42}$$

где последняя эквивалентность следует из-за нормировки на $a_0 \neq 0$.

2) Один из элементов a_0 и d_0 отличен от нуля:

2a) $a_0 = 0, d_0 \neq 0 \to \{p_0, q_0\} = \left\{\dfrac{d_0}{2} \pm \sqrt{\dfrac{d_0^2}{4} + b_0 c_0}\right\}$, тогда для числовой части R-матрицы получаем 5-вершинное решение

$$R^{(0)} = \begin{pmatrix} \left\{\frac{d_0}{2} \pm \sqrt{\frac{d_0^2}{4} + b_0 c_0}\right\} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c_0 & d_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & b_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \left\{\frac{d_0}{2} \pm \sqrt{\frac{d_0^2}{4} + b_0 c_0}\right\} \end{pmatrix}. \tag{43}$$

2b) Либо $d_0 = 0, a_0 \neq 0 \to \{p_0, q_0\} = \left\{\frac{a_0}{2} \pm \sqrt{\frac{a_0^2}{4} + b_0 c_0}\right\}$, тогда снова получаем 5-вершинное решение

$$R^{(0)} = \begin{pmatrix} \left\{\frac{a_0}{2} \pm \sqrt{\frac{a_0^2}{4} + b_0 c_0}\right\} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c_0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_0 & b_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \left\{\frac{a_0}{2} \pm \sqrt{\frac{a_0^2}{4} + b_0 c_0}\right\} \end{pmatrix}. \tag{44}$$

3) Обе числовые части элементов a и d равны нулю: $a_0 = d_0 = 0 \to p_0, q_0, b_0, c_0$ – любые, и числовая часть R-матрицы становится диагональной (4-вершинное числовое решение)

$$R^{(0)} = \begin{pmatrix} p_0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c_0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & b_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q_0 \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Теперь продолжим классификацию с учетом нильпотентных частей. Используя тот факт, что элемент обратим, если его числовая часть отлична от нуля, получаем окончательный ответ для первого случая:

1) $a = d$– любые четные обратимые: $b = c = 0, \{p, q\} = \{0, a\}$, тогда имеем 2- и 4-вершинные решения

$$R = \begin{pmatrix} \{0, a\} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a & \cdot \\ \cdot & a & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \{0, a\} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \{0, 1\} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \{0, 1\} \end{pmatrix}, \tag{46}$$

где последняя эквивалентность следует из масштабной симметрии уравнения Янга-Бакстера.

Во втором случае обратимость d приводит к равенству нулю нильпотентного параметра a из уравнения (38). Тогда оставшуюся упрощенную систему уравнений (40)-(41) можно разрешить относительно параметров p и q. Уравнения на эти параметры совпадают

$$p^2 = pd + bc, \quad q^2 = qd + bc. \tag{47}$$

Если дискриминант квадратного уравнения имеет ненулевую числовую часть $\frac{d_0^2}{4} + b_0 c_0 \neq 0$, то решение можно записать в явном виде.

2) При $a = 0$ имеем:

2a) $\frac{d_0^2}{4} + b_0 c_0 \neq 0 \to \{p, q\} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + bc}$, тогда получаем 5-вершинное решение

$$R = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + bc} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c & d & \cdot \\ \cdot & \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + bc} \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Если дискриминант равен нулю $\frac{d_0^2}{4} + b_0 c_0 = 0$, то формула (48) неприменима, т.к. невозможно найти квадратный корень из нильпотентного выражения. Тогда из (38)-(41) и (47) видно, что равенство нулю числовой части дискриминанта приводит к обратимости параметров b, c, p, q. Положим (используя масштабную симметрию) $d = 1$. Уравнения на оставшиеся нильпотентные части p и q имеют вид

$$\tilde{p}^2 = \tilde{q}^2. \tag{49}$$

Тогда получаем:

2b) $\dfrac{d_0^2}{4}+b_0c_0=0\to b,c,p,q$ — обратимые и $p_0=q_0=\dfrac{d_0}{2}, c=\dfrac{\tilde{p}^2-\frac{1}{4}}{b}$, $b_0c_0=-\dfrac{1}{4}, p_0=q_0=\dfrac{1}{2}$. Так что получаем снова 5-вершинное решение

$$R=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\tilde{p} & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \dfrac{\tilde{p}^2-\frac{1}{4}}{b} & 1 & \cdot\\ \cdot & \cdot & b & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}+\tilde{q}\end{pmatrix}. \tag{50}$$

В этом случае получается множество решений по сравнению с предыдущим случаем из-за нильпотентности. Основное отличие от предыдущего случая (48) состоит в том, что параметры p и q сейчас связаны уравнением на нильпотентные части (49), что дает большую свободу в выборе их допустимых значений.

3) В третьем случае, когда числовая часть имеет диагональный вид, можно выделить четыре подслучая.

3a) $p_0^2-b_0c_0\neq 0$ или $q_0^2-b_0c_0\neq 0\to a=d=0,p,q,b,c$ — любые, тогда получаем диагональную R-матрицу (4-вершинное решение)

$$R=\begin{pmatrix}p & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & c & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & b & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & q\end{pmatrix}. \tag{51}$$

3b) $p_0^2-b_0c_0=0$ и $q_0^2-b_0c_0=0$. Положим $p=1$, тогда $p_0^2=q_0^2=b_0c_0=1$,

$$ad = 0, \tag{52}$$

$$a\left(a+\frac{\tilde{c}}{c_0}+\frac{\tilde{b}}{b_0}+\frac{\tilde{b}}{b_0}\frac{\tilde{c}}{c_0}\right) = 0, \tag{53}$$

$$d\left(d+\frac{\tilde{c}}{c_0}+\frac{\tilde{b}}{b_0}+\frac{\tilde{b}}{b_0}\frac{\tilde{c}}{c_0}\right) = 0. \tag{54}$$

Числовая часть параметра q из-за $q_0^2=1$ может принимать значения ±1. Соответственно уравнения для нильпотентной части $\tilde{q}$ — это две различные системы уравнений

$$q_0 = +1\to a\tilde{q}=0, d\tilde{q}=0, \tag{55}$$

$$q_0 = -1\to a\left(a-\tilde{q}\right)=0, d\left(d-\tilde{q}\right)=0. \tag{56}$$

Уравнения (56) удобнее переписать, используя (53)-(54), в линейном по a и d виде:

$$q_0 = +1\to a\tilde{q}=0, d\tilde{q}=0, \tag{57}$$

$$q_0 = -1\to a\left(\tilde{q}-f\right)=0, d\left(\tilde{q}-f\right)=0, \tag{58}$$

где $f=-\dfrac{\tilde{b}}{b_0}-\dfrac{\tilde{c}}{c_0}-\dfrac{\tilde{b}}{b_0}\dfrac{\tilde{c}}{c_0}$.

3c) $p_0^2-b_0c_0=0$ и $q_0^2-b_0c_0=0\to p_0=q_0=b_0=0, c_0\neq 0\to c=1$ и уравнения приобретают вид

$$ad=0, \tag{59}$$

$$a\left(p^2-pa-b\right)=0,\quad d\left(p^2-pd-b\right)=0, \tag{60}$$

$$a\left(q^2-qa-b\right)=0,\quad d\left(q^2-qd-b\right)=0; \tag{61}$$

3d) Все числовые части равны нулю: $p_0=q_0=b_0=c_0=a_0=d_0=0$.

Из уравнений (52)-(54) и (59)-(61) следует, что только в случаях 3b) и 3c) можно ожидать полных 6-вершинных решений, которые отсутствуют в классификации [30, 33].

Рассмотрим теперь конкретный вид решений при числе образующих грассмановой алгебры, равном 2, 3, и 4.

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЯНГА-БАКСТЕРА НАД ГРАССМАНОВОЙ АЛГЕБРОЙ С ДВУМЯ ОБРАЗУЮЩИМИ

Разложение каждого элемента R-матрицы (35) по 2 грассмановым образующим представим в виде

$$c = c_0 + c_{12}\xi_1\xi_2, \;\; b = b_0 + b_{12}\xi_1\xi_2, \;\; d = d_0 + d_{12}\xi_1\xi_2, \qquad (62)$$

$$p = p_0 + p_{12}\xi_1\xi_2, \;\; q = q_0 + q_{12}\xi_1\xi_2, \;\; a = a_0 + a_{12}\xi_1\xi_2. \qquad (63)$$

Подставим эти разложения в систему (38)-(41). Получим систему уравнений

$$c_0d_0a_0 = 0, \quad b_0d_0a_0 = 0, \quad d_0a_0(d_0 - a_0) = 0, \qquad (64)$$

$$p_0d_0(d_0 - p_0) + c_0b_0d_0 = 0, \; q_0d_0(d_0 - q_0) + c_0b_0d_0 = 0, \; p_0a_0(a_0 - p_0) + c_0b_0a_0 = 0, \qquad (65)$$

$$q_0a_0(a_0 - q_0) + c_0b_0a_0 = 0, \; c_0d_0a_{12} + c_0a_0d_{12} + d_0a_0c_{12} = 0, \; b_0d_0a_{12} + b_0a_0d_{12} + d_0a_0b_{12} = 0, \qquad (66)$$

$$d_0a_0(d_{12} - a_{12}) + d_0(d_0 - a_0)a_{12} + a_0(d_0 - a_0)d_{12} = 0, \qquad (67)$$

$$p_0d_0(d_{12} - p_{12}) + p_0(d_0 - p_0)d_{12} + d_0(d_0 - p_0)p_{12} + c_0b_0d_{12} + c_0d_0b_{12} + b_0d_0c_{12} = 0, \qquad (68)$$

$$q_0d_0(d_{12} - q_{12}) + q_0(d_0 - q_0)d_{12} + d_0(d_0 - q_0)q_{12} + c_0b_0d_{12} + c_0d_0b_{12} + b_0d_0c_{12} = 0, \qquad (69)$$

$$p_0a_0(a_{12} - p_{12}) + p_0(a_0 - p_0)a_{12} + a_0(a_0 - p_0)p_{12} + c_0b_0a_{12} + c_0a_0b_{12} + b_0a_0c_{12} = 0, \qquad (70)$$

$$q_0a_0(a_{12} - q_{12}) + q_0(a_0 - q_0)a_{12} + a_0(a_0 - q_0)q_{12} + c_0b_0a_{12} + c_0a_0b_{12} + b_0a_0c_{12} = 0. \qquad (71)$$

Уравнения (64) будем рассматривать как ключевые. Будем искать решение для всех ненулевых элементов c, b, d, p, q, a, т.е. числовая и нильпотентная части одновременно не обращаются в нуль, что существенно сужает классы решений.

Случай I: $d_0 = 0$. Система (64)-(71) приобретает следующий вид:

$$d_0 = 0, \;\; p_0a_0(a_0 - p_0) + c_0b_0a_0 = 0, \;\; q_0a_0(a_0 - q_0) + c_0b_0a_0 = 0, \qquad (72)$$

$$a_0^2d_{12} = 0, \qquad (73)$$

$$c_0a_0d_{12} = 0, \;\; b_0a_0d_{12} = 0, \qquad (74)$$

$$p_0^2d_{12} - c_0b_0d_{12} = 0, \quad q_0^2d_{12} - c_0b_0d_{12} = 0, \qquad (75)$$

$$p_0a_0(a_{12} - p_{12}) + p_0(a_0 - p_0)a_{12} + a_0(a_0 - p_0)p_{12} + c_0b_0a_{12} + c_0a_0b_{12} + b_0a_0c_{12} = 0, \qquad (76)$$

$$q_0a_0(a_{12} - q_{12}) + q_0(a_0 - q_0)a_{12} + a_0(a_0 - q_0)q_{12} + c_0b_0a_{12} + c_0a_0b_{12} + b_0a_0c_{12} = 0. \qquad (77)$$

Из уравнения (73) следует, что $a_0 = 0$, тогда

$$d_0 = 0, \quad a_0 = 0, \qquad (78)$$

$$p_0^2d_{12} - c_0b_0d_{12} = 0, \quad q_0^2d_{12} - c_0b_0d_{12} = 0, \qquad (79)$$

$$p_0^2a_{12} - c_0b_0a_{12} = 0, \quad q_0^2a_{12} - c_0b_0a_{12} = 0. \qquad (80)$$

Из уравнений (79)-(80) следует, что $p_0^2 = q_0^2 = c_0b_0$ (из-за предположения о том, что никакие из 6 элементов не равны 0). Введем параметры $p_0 = q_0 = t, c_0 = r \neq 0$, тогда $b_0 = \dfrac{t^2}{r}$, т.к. нильпотентные части не определяются из уранений (78)-(80), введем еще 6 параметров $c_{12} = v, b_{12} = w, d_{12} = y, p_{12} = l, q_{12} = m, a_{12} = n$. Окончательное решение будет 8-параметрическим

$$c = r + v\xi_1\xi_2, \quad b = \frac{t^2}{r} + w\xi_1\xi_2, \quad d = y\xi_1\xi_2, \qquad (81)$$

$$p = t + l\xi_1\xi_2, \quad q = t + m\xi_1\xi_2, \quad a = n\xi_1\xi_2. \qquad (82)$$

Выпишем результирующую 6-вершинную R-матрицу

$$R = \begin{pmatrix} t + l\xi_1\xi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r + v\xi_1\xi_2 & y\xi_1\xi_2 & 0 \\ 0 & n\xi_1\xi_2 & \dfrac{t^2}{r} + w\xi_1\xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t + m\xi_1\xi_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{t^2}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & y & 0 \\ 0 & n & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix} \xi_1\xi_2. \qquad (83)$$

По классификации предыдущего раздела такое решение относится к случаю 3b. Очевидно, что, если бы мы рассматривали R-матрицу над числовым полем, то это решение являлось бы 4-вершинным, а не 6 (см. [33]). При $t = 0$ мы получаем экзотическую 6-вершинную R-матрицу, в которой только 1 элемент обратим, что в нашей классификации соответствуют случаю 3c.

Случай II: $a_0 = 0$. Система (64)-(71) сводится к следующей:

$$a_0 = 0, \tag{84}$$
$$p_0d_0(d_0 - p_0) + c_0b_0d_0 = 0, \quad q_0d_0(d_0 - q_0) + c_0b_0d_0 = 0, \tag{85}$$
$$c_0d_0a_{12} = 0, \quad b_0d_0a_{12} = 0, \tag{86}$$
$$d_0^2a_{12} = 0, \tag{87}$$
$$p_0d_0(d_{12} - p_{12}) + p_0(d_0 - p_0)d_{12} + d_0(d_0 - p_0)p_{12} + c_0b_0d_{12} + c_0d_0b_{12} + b_0d_0c_{12} = 0, \tag{88}$$
$$q_0d_0(d_{12} - q_{12}) + q_0(d_0 - q_0)d_{12} + d_0(d_0 - q_0)q_{12} + c_0b_0d_{12} + c_0d_0b_{12} + b_0d_0c_{12} = 0, \tag{89}$$
$$p_0^2a_{12} - c_0b_0a_{12} = 0, \quad q_0^2a_{12} - c_0b_0a_{12} = 0. \tag{90}$$

Из (87) следует, что $d_0 = 0$, тогда система сводится к системе (78)-(80) и решение совпадает со Случаем I.

Случай III: $c_0 = b_0 = 0, d_0 = a_0$.Тогда система (64)-(71) приобретает вид:

$$c_0 = 0, \quad b_0 = 0, \quad d_0 = a_0, \tag{91}$$

$$\begin{gathered} p_0d_0(d_0 - p_0) = 0, \;\; q_0d_0(d_0 - q_0) = 0, \\ d_0a_0c_{12} = 0, \quad d_0a_0b_{12} = 0, \\ d_0a_0(d_{12} - a_{12}) = 0, \\ p_0d_0(d_{12} - p_{12}) + p_0(d_0 - p_0)d_{12} + d_0(d_0 - p_0)p_{12} = 0, \\ q_0d_0(d_{12} - q_{12}) + q_0(d_0 - q_0)d_{12} + d_0(d_0 - q_0)q_{12} = 0. \end{gathered} \tag{92}$$

Из уравнений (92) видно, что $a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = 0$, тогда остаются неопределенными коэффициенты $p_0, q_0, a_{12}, b_{12}, c_{12}, d_{12}, p_{12}, q_{12}$. Решение также будет 8-параметрическим $p_0 = t$, $q_0 = r$, $a_{12} = l$, $b_{12} = m$, $c_{12} = n$, $d_{12} = k$, $p_{12} = w$, $q_{12} = s$ и может быть представлено в виде

$$R = \begin{pmatrix} t + w\xi_1\xi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n\xi_1\xi_2 & k\xi_1\xi_2 & 0 \\ 0 & l\xi_1\xi_2 & m\xi_1\xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r + s\xi_1\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & k & 0 \\ 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix} \xi_1\xi_2. \tag{93}$$

Это решение представляет собой 6-вершинную R-матрицу с 2 обратимыми элементами, которое не подпадает под классификацию [11, 30].

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЯНГА-БАКСТЕРА НАД ГРАССМАНОВОЙ АЛГЕБРОЙ С ТРЕМЯ ОБРАЗУЮЩИМИ

Запишем разложение каждого элемента R-матрицы (35) по 3 грассмановым образующим

$$c = c_0 + c_{12}\xi_1\xi_2 + c_{13}\xi_1\xi_3 + c_{23}\xi_2\xi_3, \;\; b = b_0 + b_{12}\xi_1\xi_2 + b_{13}\xi_1\xi_3 + b_{23}\xi_2\xi_3, \tag{94}$$
$$d = d_0 + d_{12}\xi_1\xi_2 + d_{13}\xi_1\xi_3 + d_{23}\xi_2\xi_3, \;\; p = p_0 + p_{12}\xi_1\xi_2 + p_{13}\xi_1\xi_3 + p_{23}\xi_2\xi_3, \tag{95}$$
$$q = q_0 + q_{12}\xi_1\xi_2 + q_{13}\xi_1\xi_3 + q_{23}\xi_2\xi_3, \;\; a = a_0 + a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{13}\xi_1\xi_3 + a_{23}\xi_2\xi_3. \tag{96}$$

Подставим (94)-(96) в систему (38)-(41) и получим уравнения на компоненты

$$c_0d_0a_0 = 0, \;\; b_0d_0a_0 = 0, \;\; d_0a_0(d_0 - a_0) = 0, \tag{97}$$

$$p_0d_0(d_0 - p_0) + c_0b_0d_0 = 0, \; q_0d_0(d_0 - q_0) + c_0b_0d_0 = 0, \tag{98}$$
$$p_0a_0(a_0 - p_0) + c_0b_0a_0 = 0, \; q_0a_0(a_0 - q_0) + c_0b_0a_0 = 0, \tag{99}$$
$$c_0d_0a_{12} + c_0a_0d_{12} + d_0a_0c_{12} = 0, \; c_0d_0a_{13} + c_0a_0d_{13} + d_0a_0c_{13} = 0, \tag{100}$$
$$c_0d_0a_{23} + c_0a_0d_{23} + d_0a_0c_{23} = 0, \; b_0d_0a_{12} + b_0a_0d_{12} + d_0a_0b_{12} = 0, \tag{101}$$
$$b_0d_0a_{13} + b_0a_0d_{13} + d_0a_0b_{13} = 0, \; b_0d_0a_{23} + b_0a_0d_{23} + d_0a_0b_{23} = 0, \tag{102}$$

$$d_0a_0(d_{12}-a_{12})+d_0(d_0-a_0)a_{12}+a_0(d_0-a_0)d_{12} = 0, \quad (103)$$
$$d_0a_0(d_{13}-a_{13})+d_0(d_0-a_0)a_{13}+a_0(d_0-a_0)d_{13} = 0, \quad (104)$$
$$d_0a_0(d_{23}-a_{23})+d_0(d_0-a_0)a_{23}+a_0(d_0-a_0)d_{23} = 0, \quad (105)$$

$$p_0d_0(d_{12}-p_{12})+p_0(d_0-p_0)d_{12}+d_0(d_0-p_0)p_{12}+c_0b_0d_{12}+c_0d_0b_{12}+b_0d_0c_{12}=0, \quad (106)$$
$$p_0d_0(d_{13}-p_{13})+p_0(d_0-p_0)d_{13}+d_0(d_0-p_0)p_{13}+c_0b_0d_{13}+c_0d_0b_{13}+b_0d_0c_{13}=0, \quad (107)$$
$$p_0d_0(d_{23}-p_{23})+p_0(d_0-p_0)d_{23}+d_0(d_0-p_0)p_{23}+c_0b_0d_{23}+c_0d_0b_{23}+b_0d_0c_{23}=0, \quad (108)$$
$$q_0d_0(d_{12}-q_{12})+q_0(d_0-q_0)d_{12}+d_0(d_0-q_0)q_{12}+c_0b_0d_{12}+c_0d_0b_{12}+b_0d_0c_{12}=0, \quad (109)$$
$$q_0d_0(d_{13}-q_{13})+q_0(d_0-q_0)d_{13}+d_0(d_0-q_0)q_{13}+c_0b_0d_{13}+c_0d_0b_{13}+b_0d_0c_{13}=0, \quad (110)$$
$$q_0d_0(d_{23}-q_{23})+q_0(d_0-q_0)d_{23}+d_0(d_0-q_0)q_{23}+c_0b_0d_{23}+c_0d_0b_{23}+b_0d_0c_{23}=0, \quad (111)$$
$$p_0a_0(a_{12}-p_{12})+p_0(a_0-p_0)a_{12}+a_0(a_0-p_0)p_{12}+c_0b_0a_{12}+c_0a_0b_{12}+b_0a_0c_{12}=0, \quad (112)$$
$$p_0a_0(a_{13}-p_{13})+p_0(a_0-p_0)a_{13}+a_0(a_0-p_0)p_{13}+c_0b_0a_{13}+c_0a_0b_{13}+b_0a_0c_{13}=0, \quad (113)$$
$$p_0a_0(a_{23}-p_{23})+p_0(a_0-p_0)a_{23}+a_0(a_0-p_0)p_{23}+c_0b_0a_{23}+c_0a_0b_{23}+b_0a_0c_{23}=0, \quad (114)$$
$$q_0a_0(a_{12}-q_{12})+q_0(a_0-q_0)a_{12}+a_0(a_0-q_0)q_{12}+c_0b_0a_{12}+c_0a_0b_{12}+b_0a_0c_{12}=0, \quad (115)$$
$$q_0a_0(a_{13}-q_{13})+q_0(a_0-q_0)a_{13}+a_0(a_0-q_0)q_{13}+c_0b_0a_{13}+c_0a_0b_{13}+b_0a_0c_{13}=0, \quad (116)$$
$$q_0a_0(a_{23}-q_{23})+q_0(a_0-q_0)a_{23}+a_0(a_0-q_0)q_{23}+c_0b_0a_{23}+c_0a_0b_{23}+b_0a_0c_{23}=0. \quad (117)$$

В симметричном случае, когда компоненты при 2 грассмановых образующих равны у всех элементов $a_{12} = a_{13} = a_{23}$ и т.д., система упрощается и сводится к случаю 2 образующих, поскольку индекс нильпотентности нечисловой части в обоих случаях равен 2.

Как и для двух грассмановых образующих, уравнения (97) будут определяющими, и выделим 3 случая.

Случай I: $d_0 = 0$, тогда система приобретает вид

$$\begin{aligned} d_0 &= 0, \\ p_0a_0(a_0-p_0)+c_0b_0a_0 &= 0,\ q_0a_0(a_0-q_0)+c_0b_0a_0=0, \\ c_0a_0d_{12} &= 0,\ c_0a_0d_{13}=0,\ c_0a_0d_{23}=0, \\ b_0a_0d_{12} &= 0,\ b_0a_0d_{13}=0,\ b_0a_0d_{23}=0, \end{aligned}$$

$$a_0^2d_{12}=0,\ a_0^2d_{13}=0,\ a_0^2d_{23}=0, \quad (118)$$
$$p_0^2d_{12}-c_0b_0d_{12}=0,\ p_0^2d_{13}-c_0b_0d_{13}=0, \quad (119)$$
$$p_0^2d_{23}-c_0b_0d_{23}=0,\ q_0^2d_{12}-c_0b_0d_{12}=0, \quad (120)$$
$$q_0^2d_{13}-c_0b_0d_{13}=0,\ q_0^2d_{23}-c_0b_0d_{23}=0, \quad (121)$$

$$p_0a_0(a_{12}-p_{12})+p_0(a_0-p_0)a_{12}+a_0(a_0-p_0)p_{12}+c_0b_0a_{12}+c_0a_0b_{12}+b_0a_0c_{12} = 0, \quad (122)$$
$$p_0a_0(a_{13}-p_{13})+p_0(a_0-p_0)a_{13}+a_0(a_0-p_0)p_{13}+c_0b_0a_{13}+c_0a_0b_{13}+b_0a_0c_{13} = 0, \quad (123)$$
$$p_0a_0(a_{23}-p_{23})+p_0(a_0-p_0)a_{23}+a_0(a_0-p_0)p_{23}+c_0b_0a_{23}+c_0a_0b_{23}+b_0a_0c_{23} = 0, \quad (124)$$
$$q_0a_0(a_{12}-q_{12})+q_0(a_0-q_0)a_{12}+a_0(a_0-q_0)q_{12}+c_0b_0a_{12}+c_0a_0b_{12}+b_0a_0c_{12} = 0, \quad (125)$$
$$q_0a_0(a_{13}-q_{13})+q_0(a_0-q_0)a_{13}+a_0(a_0-q_0)q_{13}+c_0b_0a_{13}+c_0a_0b_{13}+b_0a_0c_{13} = 0, \quad (126)$$
$$q_0a_0(a_{23}-q_{23})+q_0(a_0-q_0)a_{23}+a_0(a_0-q_0)q_{23}+c_0b_0a_{23}+c_0a_0b_{23}+b_0a_0c_{23} = 0. \quad (127)$$

Из уравнений (118) следует, что $a_0 = 0$, т.к. мы предполагем, что R-матрица содержит 6 ненулевых элементов. Система принимает следующий вид

$$d_0=0, \qquad a_0=0, \quad (128)$$
$$p_0^2d_{12}-c_0b_0d_{12}=0,\ p_0^2d_{13}-c_0b_0d_{13}=0,\ p_0^2d_{23}-c_0b_0d_{23}=0, \quad (129)$$
$$q_0^2d_{12}-c_0b_0d_{12}=0,\ q_0^2d_{13}-c_0b_0d_{13}=0,\ q_0^2d_{23}-c_0b_0d_{23}=0, \quad (130)$$
$$p_0^2a_{12}-c_0b_0a_{12}=0,\ p_0^2a_{13}-c_0b_0a_{13}=0,\ p_0^2a_{23}-c_0b_0a_{23}=0, \quad (131)$$
$$q_0^2a_{12}-c_0b_0a_{12}=0,\ q_0^2a_{13}-c_0b_0a_{13}=0,\ q_0^2a_{23}-c_0b_0a_{23}=0. \quad (132)$$

Поскольку d_{12}, d_{13}, d_{23} одновременно не могут быть равны 0 (мы предполагаем, что никакой из 6 элементов R-матрицы не обращается в нуль, в том числе и полный элемент $d \neq 0$), то из уравнение (129) - (130) следует, что $p_0^2 = q_0^2 = c_0 b_0$. Введем параметры $p_0 = q_0 = t, c_0 = r$, тогда $b_0 = \dfrac{t^2}{r}$, а остаются неопределенными компоненты $d_{12}, d_{13}, d_{23}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, c_{12}, c_{13}, c_{23}$,$b_{12}, b_{13}, b_{23}$,$p_{12}, p_{13}, p_{23}$,$q_{12}, q_{13}, q_{23}$, т.е. решение будет 20-параметрическим.

По аналогии с разложением по 2 грассмановым образующим Случай II совпадет со Случаем I, а Случай III получаем из Случая I, положив $c_0 = b_0 = 0$.

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЯНГА-БАКСТЕРА НАД ГРАССМАНОВОЙ АЛГЕБРОЙ С ЧЕТЫРЬМЯ ОБРАЗУЮЩИМИ

Ранее была получена классификация всех решений, и случаи 1, 2a, 3a не требуют дальнейшего исследования, т.к. решения выписаны в явном виде (46), (48), (50), (51) для любого количества образующих грассмановой алгебры. Оставшиеся случаи 2b, 3b, 3c, 3d содержат нильпотентные уравнения. В общем случае, для нильпотентных уравнений невозможно выписать конкретные выражения для их решений. Поэтому эти случаи требуют дальнейшего анализа.

Поскольку любые выражения третьей степени над грассмановой алгеброй с четырьмя образующими равны нулю, уравнения (38)-(41) упрощаются следующим образом. Случай 2b содержит уравнение второй степени, поэтому оно остается без изменений

$$\tilde{p}^2 = \tilde{q}^2. \tag{133}$$

Для случая 3b система уравнений (55)-(56) также остается неизменной, но изменяется выражение для $f = -\dfrac{\tilde{b}}{b_0} - \dfrac{\tilde{c}}{c_0}$.

В случае 3c уравнения (59)-(61) квадратичны и поэтому не изменяются

$$ab = 0, \quad db = 0, \quad ad = 0. \tag{134}$$

В последнем случае 3d все параметры p, q, a, b, c, d могут быть произвольными четными нильпотентными.

Для решения этих систем запишем все параметры в компонентном виде

$$x = \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{4} x_{ij}\xi_i\xi_j + x_{1234}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4, \tag{135}$$

где $x = a, b, c, d, p, q$. Координата x_{1234} может быть произвольной, т.к. она аннулирует любой такой нильпотент. Тогда в компонентах уравнения будут иметь вид

Случай 2b)

$$p_{12}p_{34} + p_{14}p_{23} - p_{13}p_{24} = q_{12}q_{34} + q_{14}q_{23} - q_{13}q_{24}. \tag{136}$$

Решением может быть, например, при $p_{12} \neq 0$

$$p_{34} = \frac{1}{p_{12}}\left(-p_{14}p_{23} + p_{13}p_{24} + q_{12}q_{34} + q_{14}q_{23} - q_{13}q_{24}\right). \tag{137}$$

Случай 3b)

$$q_{12}a_{34} - q_{13}a_{24} + q_{14}a_{23} + q_{23}a_{14} - q_{24}a_{13} + q_{34}a_{12} = 0, \tag{138}$$

$$q_{12}d_{34} - q_{13}d_{24} + q_{14}d_{23} + q_{23}d_{14} - q_{24}d_{13} + q_{34}d_{12} = 0, \tag{139}$$

$$\begin{gathered}\left(2\left(a_{12}q'_{13} - a_{13}q'_{12}\right) + \left(q_{12}f_{13} - q_{13}f_{12}\right)\right)a_{24} - \left(2\left(a_{12}q'_{14} - a_{14}q'_{12}\right) + \left(q_{12}f_{14} - q_{14}f_{12}\right)\right)a_{23}\\ -\left(2a_{12}q'_{23} + \left(q_{12}f_{23} - q_{23}f_{12}\right)\right)a_{14} + \left(2a_{12}q'_{24} + \left(q_{12}f_{24} - q_{24}f_{12}\right)\right)a_{13} - \left(2a_{12}q'_{34} + \left(q_{12}f_{34} - q_{34}f_{12}\right)\right)a_{12} = 0,\end{gathered} \tag{140}$$

$$\begin{gathered}\left(2\left(d_{12}q'_{13} - d_{13}q'_{12}\right) + \left(q_{12}f_{13} - q_{13}f_{12}\right)\right)d_{24} - \left(2\left(d_{12}q'_{14} - d_{14}q'_{12}\right) + \left(q_{12}f_{14} - q_{14}f_{12}\right)\right)d_{23}\\ -\left(2d_{12}q'_{23} + \left(q_{12}f_{23} - q_{23}f_{12}\right)\right)d_{14} + \left(2d_{12}q'_{24} + \left(q_{12}f_{24} - q_{24}f_{12}\right)\right)d_{13} - \left(2d_{12}q'_{34} + \left(q_{12}f_{34} - q_{34}f_{12}\right)\right)d_{12} = 0,\end{gathered} \tag{141}$$

$$\begin{gathered}\left(a_{12}q'_{13} - a_{13}q'_{12}\right)d_{24} - \left(a_{12}q'_{14} - a_{14}q'_{12}\right)d_{23} - \left(a_{12}q'_{23} - a_{23}q'_{12}\right)d_{14}\\ +\left(a_{12}q'_{24} - a_{24}q'_{12}\right)d_{13} + \left(-2a_{12}q'_{34} + \left(a_{13}q'_{24} + a_{24}q'_{13}\right) - \left(a_{14}q'_{23} + a_{23}q'_{14}\right)\right)d_{12} = 0,\end{gathered} \tag{142}$$

где $q' = \tilde{q}$ в случае "$+$"и $q' = \tilde{q} - f$ в случае "$-$".

Случай 3с)

$$-b_{12}a_{34} + b_{13}a_{24} - b_{14}a_{23} - b_{23}a_{14} + b_{24}a_{13} - b_{34}a_{12} = 0, \tag{143}$$
$$-b_{12}d_{34} + b_{13}d_{24} - b_{14}d_{23} - b_{23}d_{14} + b_{24}d_{13} - b_{34}d_{12} = 0, \tag{144}$$
$$\begin{aligned}(a_{12}b_{13} - a_{13}b_{12})\, d_{24} - (a_{12}b_{14} - a_{14}b_{12})\, d_{23} - (a_{12}b_{23} - a_{23}b_{12})\, d_{14} + (a_{12}b_{24} - a_{24}b_{12})\, d_{13}\\ + (-2a_{12}b_{34} + (a_{13}b_{24} + a_{24}b_{13}) - (a_{14}b_{23} + a_{23}b_{14}))\, d_{12} = 0.\end{aligned} \tag{145}$$

Эту систему уравнений можно разрешить, например, если $b_{12} \neq 0$ и $(a_{12}b_{13} - a_{13}b_{12}) \neq 0$. Тогда можно выразить a_{34}, d_{34}, d_{24} через остальные. Получаемые системы для каждой координаты линейны, поэтому их решениями являются рациональные функции от оставшихся компонент. Окончательные выражения в силу их громоздкости не приводятся.

Только в случаях 3b, 3c, 3d существуют 6-вершинные решения, в отличие от решений над числовым полем, в которых возможны только 5-вершинные решения [11, 30].

РЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЯНГА-БАКСТЕРА

В работе [46] были найдены теоретико-множественные ([47], см. также [12–15].) регулярные (по фон Нойману) решения уравнения Янга-Бакстера. Представляет интерес рассмотрение подобных решений и для 6-вершинной R-матрицы. Напомним, что матрица R является регулярной (по фон Нойману), если существует матрица $\bar{R}$ такая, что $R\bar{R}R = R, \bar{R}R\bar{R} = \bar{R}$ [48–50]. Подобные R-матрицы возникают при исследовании слабых алгебр Хопфа [31, 32, 51]. Свойства регулярных суперматриц рассматривались в [52–54].

Для 6-вершинной R-матрицы мы будем использовать вместо “обратимости“ (условие унитарности в [12, 14])

$$R^{21}R = RR^{21} = id \tag{146}$$

регулярность в виде

$$\begin{aligned} R\bar{R}^{21}R &= R, & (147)\\ \bar{R}^{21}R\bar{R}^{21} &= \bar{R}^{21}, & (148)\end{aligned}$$

где

$$\bar{R}^{21} = \begin{pmatrix} p & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & a & \cdot \\ \cdot & d & c & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & q \end{pmatrix}. \tag{149}$$

Отметим, что неунитарные (с нарушением (146)) теоретико-множественные решения уравнения Янга-Бакстера рассматривались в [13, 55].

Подстановка (149) в (147)-(148) дает ограничения, накладываемые условием регулярности на элементы 6-вершинной R-матрицы (35)

$$p^3 = p, q^3 = q, \tag{150}$$
$$(ab + bd)\, d + \left(a^2 + cb\right) b = b, \tag{151}$$
$$(ab + bd)\, c + \left(a^2 + cb\right) a = a, \tag{152}$$
$$\left(cb + d^2\right) d + (ca + dc)\, b = d, \tag{153}$$
$$\left(cb + d^2\right) c + (ca + dc)\, a = c. \tag{154}$$

Анализ показывает, что регулярные небратимые решения (в смысле $R^{21}R \neq id$) могут быть в случаях: 1) при $a = \pm 1$, p и q одновременно не равны a; и 2а) при $d = \pm 1$, $a = 0$, $bc = 0$, $p = \{0, \pm 1\}$, $q = \{0, \pm 1\}$. Например, для частного случая из 1 имеем

$$R = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{R}^{21} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R\bar{R}^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq id, \tag{155}$$

но регулярность (147)-(148) выполняется. В частном случае из 2а получаем

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \bar{R}^{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R\bar{R}^{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq id, \tag{156}$$

и также — регулярность (147)-(148) выполняется.

Таком образом, в работе получена классификация решений константного 6-вершинного уравнения Янга-Бакстера. Приведены конкретные примеры для случаев 2, 3, 4 образующих алгебры Грассмана и проведен соответствующий анализ. Полученные решения могут быть использованы для построения суперсимметричных обобщений квантовых групп и квантовых вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yang C. N. Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulse delta-function interaction // Phys. Rev. Lett. - 1967. - V. 19. - P. 1312–1315.
2. Baxter R. J. Partition function for the eight-vertex model // Ann. Phys. - 1972. - V. 70. - P. 193–228.
3. Baxter R. Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. - London: Academic Press, 1982.
4. Di Francesco P., Mathieu P., Sénéchal D. Conformal Field Theory. - Berlin: Springer-Verlag, 1997. - 890 p.
5. Faddeev L. D., Reshetikhin N. Y., Takhtajan L. A. Quantum Lie groups and Lie algebras // Leningrad Math. J. - 1990. - V. 1. - P. 193–236.
6. Drinfeld V. G. Quantum groups // Proceedings of the ICM, Berkeley. - Phode Island. AMS, 1987. - P. 798–820.
7. Shnider S., Sternberg S. Quantum Groups. - Boston: International Press, 1993. - 371 p.
8. Демидов Е. Е. Квантовые группы. - М.: Факториал, 1998. - 146 с.
9. Chari V., Pressley A. A Guide to Quantum Groups. - Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
10. Lambe L. A., Radford D. E. Introduction to the Quantum Yang-Baxter Equation and Quantum Groups: An Algebraic Approach. - Dordrecht: Kluwer, 1997. - 292 p.
11. Hietarinta J. All solutions to the constant quantum Yang-Baxter equation in two dimensions // Phys. Lett. - 1992. - V. A165. - P. 245–251.
12. Etingof P., Schedler T., Soloviev A. Set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation // Duke Math. J. - 1999. - № 2. - P. 169–209.
13. Lu J. H., Yan M., Zhu Y. C. On set-theoretical Yang-Baxter equation // Duke. Math. J. - 2000. - V. 104. - № 1. - P. 1–18.
14. Etingof P., Schedler T., Soloviev A. On set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation // Cambridge, 1997. - 4 p. (*Preprint* / MIT, q-alg/9707027).
15. Gu P. A set-theoretical solution of the Yang-Baxter equation and “metahomomorphisms” of groups // Chinese Sci. Bull. - 1997. - V. 42. - № 15. - P. 1602–1606.
16. Kauffman L. H. Knots and Physics. - Singapure: World Sci., 1991.
17. Turaev V. G. Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds. - Berlin: W. de Greuter, 1994.
18. Kassel C. Quantum Groups. - New York: Springer-Verlag, 1995. - 531 p.
19. Majid S. Foundations of Quantum Group Theory. - Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
20. Холево А. С. Введение в квантовую теорию информации. - М.: МЦНМО, 2002.
21. Китаев А., Шень А., Вялый М. Классические и квантовые вычисления. - М.: МЦНМО, 1999.
22. Brylinski J. L., Brylinski R. Universal quantum gates // Mathematics of Quantum Computation. - Boca Raton. Chapman & Hall/CRC Press, 1994. - P. 124–134.
23. Kauffman L. H., Lomonaco S. J. Braiding operators are universal quantum gates // New J. Phys. - 2004. - V. 6. - P. 134–139.
24. Zhang Y., Kauffman L. H., Ge M.-L. Yang-Baxterization, Universal quantum gate, and Hamiltonians // Chicago, 2005. - 36 p. (*Preprint* / Univ. Illinois, quant-ph/0502015).
25. Dye H. A. Unitary solutions to the Yang-Baxter equation in dimension four // Quantum Information Processing. - 2003. - V. 2. - P. 117–150.
26. Khoroshkin S. M., N.Tolstoy V. Universal R-matrix for quantized (super)algebras // Comm. Math. Phys. - 1991. - V. 141. - № 3. - P. 599.
27. Chang D., Phillips I., Rozansky I. R-matrix approach to quantum superalgebras $su_q(m|n)$ // J. Math. Phys. - 1992. - V. 33. - № 11. - P. 3710–3715.
28. Zhang R. B., Gould M. D. Universal R-matrices and invariants of quantum supergroups // J. Math. Phys. - 1991. - V. 32. - № 12. - P. 3261–3267.
29. Manin Y. Multiparametric quantum deformation of the general linear supergroup // Comm. Math. Phys. - 1989. - V. 123. - P. 123–135.
30. Hietarinta J. Solving the two-dimensional constant quantum Yang-Baxter equation // J. Math. Phys. - 1993. - V. 34. - P. 1725–1756.
31. Li F., Duplij S. Weak Hopf algebras and singular solutions of quantum Yang-Baxter equation // Commun. Math. Phys. - 2002. - V. 225. - № 1. - P. 191–217.
32. Duplij S., Li F. Regular solutions of quantum Yang-Baxter equation from weak Hopf algebras // Czech. J. Phys. - 2001. - V. 51. - № 12. - P. 1306–1311.
33. Hietarinta J. Permutation-type solutions to the Yang-Baxter and other n-simplex equations // J. Phys. - 1997. - V. A30. - P. 4757–4771.

34. Carter J. S., Saito M. On formulation and solutions of simplex equations // J. Mod. Phys. - 1996. - V. A11. - P. 4453–4463.
35. Березин Ф. А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. - М.: Изд-во МГУ, 1983. - 208 с.
36. Kac V. G. Lie superalgebras // Adv. Math. - 1977. - V. 26. - № 1. - P. 8–96.
37. Zhang R. B. Graded representations of the Temperley-Lieb algebra, quantum supergroups, and the Jones polynomial // J. Math. Phys. - 1991. - V. 32. - № 10. - P. 2605–2613.
38. Links J., Scheunert M., Gould M. D. Diagonalization of the braid generator on unitary irreps of quantum supergroups // Lett. Math. Phys. - 1994. - V. 32. - № 3. - P. 231–240.
39. Лейтес Д. А. Введение в теорию супермногообразий // Успехи мат. наук. - 1980. - Т. 35. - № 1. - С. 3–57.
40. Манин Ю. И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. - М.: Наука, 1984. - 335 с.
41. De Witt B. S. Supermanifolds. - Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2nd edition. - 1992. - 407 p.
42. Лейтес Д. А. Теория супермногообразий. - Петрозаводск: Карельский филиал АН СССР, 1983. - 199 с.
43. Rogers A. A global theory of supermanifolds // J. Math. Phys. - 1980. - V. 21. - № 5. - P. 1352–1365.
44. Rabin J. M. Supermanifolds and super Riemann surfaces // Super Field Theories. - New York. Plenum Press, 1987. - P. 557–569.
45. Rabin J. M. Status of the algebraic approach to super Riemann surfaces // Physics and Geometry. - New York. Plenum Press, 1991. - P. 653–668.
46. Дуплий С. А., Садовников А. С. Регулярные суперматричные решения квантового уравнения Янга-бакстера // Вестник ХНУ, сер. “Ядра, частицы, поля”. - 2002. - № 569.- Вып. 3(19). - С. 15–22.
47. Drinfeld V. G. On some unsolved problems in quantum group theory // Lect. Notes. Math. - 1992. - V. 1510. - P. 1–8.
48. Penrose R. A generalized inverse for matrices // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. - 1955. - V. 51. - P. 406–413.
49. Rao C. R., Mitra S. K. Generalized Inverse of Matrices and its Application. - New York: Wiley, 1971. - 251 p.
50. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. - М.: Мир, 1972. - 283 с.
51. Duplij S., Li F. On regular solutions of quantum Yang-Baxter equation and weak Hopf algebras // Journal of Kharkov National University, ser. Nuclei, Particles and Fields. - 2001. - V. 521. - № 2(14). - P. 15–30.
52. Дуплий С. А. Полусупермногообразия и полугруппы. - Харьков: Крок, 2000. - 220 с.
53. Duplij S. On supermatrix idempotent operator semigroups // Linear Algebra Appl. - 2003. - V. 360. - P. 59–81.
54. Дуплий С. А., Котульская О. И. Суперматричные структуры и обобщенные обратные // Вестник ХНУ, сер. “Ядра, частицы, поля”. - 2002. - № 548.- Вып. 1(17). - С. 3–14.
55. Soloviev A. Non-unitary set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation // Math. Res. Lett. - 2002. - V. 7. - P. 577–596.

CONSTANT SOLUTIONS OF QUANTUM YANG-BAXTER EQUATION OVER GRASSMANN ALGEBRA

S.A. Duplij, O.I. Kotulska, A.S. Sadovnokov
Department of Physics and Technology
V. N. Karazin Kharkov National University, Svoboda Sq. 4, Kharkov 61077, Ukraine

Constant solutions to Yang-Baxter equation are investigated for the case of 6-vertex R-matrix which appears in desription of exactly solvable models, quantum plane and special quantum gates. The general classification of all possible sulutions over Grassmann algebra and particular cases are studied. As distinct from the standard case, when R-matrix can have only 5 elements, we obtained full 6-vertex solution. The solutions leading to regular R-matrices which appear in weak Hopf algebras are considered.
KEY WORDS: constant solution, Grassmann algebra, quantum gate, regularity, R-matrix