УДК 530.1.19

О БОРНОВСКИХ ПОПРАВКАХ К СЕЧЕНИЮ ИЗЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Н.Ф. Шульга, В.В. Бойко
Институт теоретической физики им. А.И.Ахиезера
Национальный научный центр "Харьковский физико-технический институт"
ул. Академическая 1, Харьков, 61108, Украина
E-mail: shulga@kipt.kharkov.ua
Поступила в редакцию 27 мая 2005г.

Исследуется квазиклассическое выражение для спектрально-угловой плотности излучения релятивистских электронов во внешнем неоднородном поле с учетом эффекта отдачи при излучении, полученное на основе операторного квазиклассического метода. Выполнено разложение этого выражения по потенциалу внешнего поля и проведено сопоставление полученных результатов с соответствующими результатами расчетов борновского приближения в квантовой электродинамике методом диаграммной техники Фейнмана. Показано несоответствие квазиклассических результатов и второго борновского приближения в области больших энергий фотона.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: квазиклассическое приближение, борновское приближение, вероятность излучения, сечение излучения, сечение рассеяния

При прохождении ультрарелятивистских электронов через кристалл возможны различные интерференционные эффекты в излучении, благодаря которым спектр излучения электронов в кристалле содержит резкие максимумы с высокой интенсивностью излучения в них. На возможность существования таких эффектов было обращено внимание в работах [1-3] при исследовании процесса излучения релятивистских электронов в кристалле на основе первого борновского приближения квантово-электродинамической теории возмущений. Анализ условий применимости борновского приближения в рассматриваемой задаче, однако, показал, что эти условия быстро нарушаются с ростом энергии частицы и с уменьшением углов падения частиц на кристалл по отношению к одной из кристаллических осей или плоскостей [4-6 с.77, 121-124].

Для описания излучения электронов в кристаллах вне области применимости борновской теории возмущений в настоящее время широко используются формулы для интенсивности излучения, полученные на основе операторного квазиклассического метода [7 с.211-217, 8 с.45-56]. Использование этих формул, в рассматриваемой задаче, является довольно удобным, так как характеристики излучения в них с учетом квантового эффекта отдачи при излучени определяются классическими траекториями частицы.

Целью настоящей работы является сравнительный анализ основных результатов теории излучения релятивистских электронов в неоднородном внешнем поле, полученных на основе операторного квазиклассического метода и на основе диаграммной техники Фейнмана. Мы обращаем внимание на одну из проблем, связанных с применением формулы для интенсивности излучения, полученной на основе операторного квазиклассического метода, к описанию излучения электронов в ориентированном кристалле. Проблема состоит в следующем. При выводе обсуждаемой формулы, как отмечается в [7 с.211-217, 8 с.45-56], отброшены члены порядка $\frac{e\hbar|\vec{F}|}{\varepsilon^2}$, где e -элементарный заряд электрона, $\hbar$ -постоянная Планка, $|\vec{F}|$ -величина внешнего поля и ε -энергия электрона. Это условие не противоречит возможности проведения в полученных формулах разложения по потенциалу. Мы получаем и анализируем слагаемые пропорциональные U^2 и U^3, полученные путем разложения этой формулы по потенциалу. При этом мы показываем, что вклад в сечение излучения, пропорциональный U^3, отличается от соответствующего результата, полученного на основе учета вклада в излучение второго борновского приближения в рамках диаграммной техники Фейнмана [9]. Отличие имеет место в области частот излучения $\hbar\omega \sim \varepsilon$. Различие становится наиболее существенным при выполнении условий каналирования частицы в кристалле.

Полученные результаты указывают на необходимость анализа возможностей применения квазиклассической формулы для интенсивности излучения, полученной на основе операторного квазиклассического метода, для описания процесса излучения высокоэнергетических частиц в неоднородном внешнем поле.

СПЕКТРАЛЬНО-УГЛОВАЯ ПЛОТНОСТЬ ИЗЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОНА В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В работах [7 с.211-217, 8 с.45-56] было показано, что в квазиклассическом приближении квантовой электродинамики спектрально-угловая плотность излучения электрона высокой энергии во внешнем поле может быть представлена в виде:

$$dw = \frac{e^2}{\hbar\omega}\frac{d^3k}{4\pi^2}\frac{\varepsilon^2+\varepsilon'^2}{2\varepsilon'^2}\int\frac{d^3r_0}{V}\left\{\left|\left[\vec{n},\vec{I}\right]\right|^2 + \frac{(\hbar\omega)^2 m^2}{\varepsilon^2\left(\varepsilon^2+\varepsilon'^2\right)}|I|^2\right\}, \tag{1}$$

где e и m -заряд и масса электрона, ω и $\vec{k}$ -частота и волновой вектор излученного фотона, ε -начальная энергия электрона, $\varepsilon' = \varepsilon - \hbar\omega$ -энергия электрона после излучения фотона,

$$\vec{I} = \int_{-\infty}^{\infty}\vec{v}(t)e^{i\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\omega(t-\vec{n}\vec{r}(t))}dt\,,\; I = \int_{-\infty}^{\infty}e^{i\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\omega(t-\vec{n}\vec{r}(t))}dt\,. \tag{2}$$

Здесь $\vec{r}(t)$ -классическая траектория электрона с энергией ε во внешнем поле, V -объем всего пространства, $\vec{v}(t)$ -вектор скорости частицы и $\vec{n} = \vec{k}/k$ - единичный вектор в направлении излучения фотона. Данная формула содержит интегрирование по всем начальным условиям $\vec{r}_0$ на траекторию [6 с.77].

Входящая в (2) траектория частицы определяется уравнением движения

$$\dot{\vec{v}}(t) = \frac{e}{\varepsilon(t)}\left\{\vec{E} + \left[\vec{v}(t),\vec{H}\right] - \vec{v}(t)(\vec{v}(t),\vec{E})\right\}, \tag{3}$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ векторы внешнего электрического и магнитного полей, $\varepsilon(t) = \dfrac{m}{\sqrt{1-\vec{v}(t)^2}}$ -энергия частицы. Здесь и далее мы пользуемся системой единиц $\hbar = c = 1$.

Формула (1) была получена на основе предложенного в [7 с.211-217] операторного квазиклассического метода. Метод состоит в переходе от шредингеровского к гейзенберговскому представлению операторов, входящих в матричный элемент процесса излучения и последующему переходу от некоммутирующих операторов к коммутирующим величинам. При этом в [7 с.138] отмечалось, что представление (1) для вероятности излучения справедливо с точностью до членов порядка $e\hbar\left|\vec{F}\right|/\varepsilon^2$. Отметим, что формула (1) получена с учетом эффекта отдачи при излучении.

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ПОТЕНЦИАЛУ КВАЗИКЛАССИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ФОТОНА В НЕОДНОРОДНОМ ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Условие применимости квазиклассической формулы (1) для интенсивности излучения $e\hbar\left|\vec{F}\right|/\varepsilon^2 << 1$ не противоречит возможности проведения в ней разложения по потенциалу внешнего поля. Такое разложение соответствует борновской теории возмущений для сечения излучения в квантовой электродинамике. С учетом этого выполним в формуле (1) разложение по потенциалу, удерживая слагаемые пропорциональные U^2 и U^3 а затем сравним полученный результат с соответствующим результатом, полученным на основе диаграммной техники Фейнмана.

Рассмотрим вначале разложение по потенциалу в формуле (1), полагая для простоты, что частица движется в неоднородном внешнем поле, потенциал которого $U(\vec{r})$ не зависит от времени.

Уравнение движения релятивистской частицы (3) в таком поле приобретает следующий вид

$$\dot{\vec{v}}(t) = \frac{1}{\varepsilon(t)}\left(-\nabla U + \vec{v}(t)\left(\vec{v}(t),\nabla U\right)\right). \tag{4}$$

Решение $\vec{r}(t)$ этого уравнения будем искать в виде ряда по степеням потенциала внешнего поля:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t + \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t) + \ldots\,. \tag{5}$$

где $\vec{r}_1 \sim U^1, \vec{r}_2 \sim U^2, \ldots$, а $\vec{v}$ -начальная скорость электрона. Подставляя это разложение в уравнение движения и собирая члены одного порядка малости по степеням U, получим уравнения для $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{1}{\varepsilon}\left\{-\frac{\partial}{\partial \vec{r}_0}U(\vec{r}_0+\vec{v}t)+\vec{v}\left(\vec{v},\frac{\partial}{\partial \vec{r}_0}U(\vec{r}_0+\vec{v}t)\right)\right\},$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{\varepsilon}\left\{-\frac{\partial}{\partial \vec{r}_0}\left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}_0}U(\vec{r}_0+\vec{v}t),\vec{r}_1(t)\right)+\vec{v}\left(\vec{v},\frac{\partial}{\partial \vec{r}_0}\left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}_0}U(\vec{r}_0+\vec{v}t),\vec{r}_1(t)\right)\right)+\vec{v}\left(\dot{\vec{r}}_1,\frac{\partial}{\partial \vec{r}_0}U(\vec{r}_0+\vec{v}t)\right)\right. \tag{6}$$

$$\left.+\dot{\vec{r}}_1\left(\vec{v},\frac{\partial}{\partial \vec{r}_0}U(\vec{r}_0+\vec{v}t)\right)\right\}-\frac{e^2}{m^2}\ddot{\vec{r}}_1\left(\vec{v},\dot{\vec{r}}_1\right).$$

Здесь $\varepsilon = \dfrac{m}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}$ -постоянная величина.

Аналогичные разложения мы получим для величин $\vec{I}, I$, подставив в них выражение для траектории (5):

$$\begin{aligned}\vec{I} &= \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \ldots,\\ I &= I_1 + I_2 + \ldots,\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}\vec{I}_1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\dot{\vec{r}}_1 - i\omega\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\vec{v}(\vec{n},\vec{r}_1)\right\}e^{i\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\omega(1-\vec{n}\vec{v})t}dt,\\ \vec{I}_2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\dot{\vec{r}}_2 - i\omega\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\vec{v}(\vec{n},\vec{r}_2)-\frac{1}{2}\omega^2\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2}\vec{v}(\vec{n},\vec{r}_1)^2 - i\omega\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(\vec{n},\vec{r}_1)\dot{\vec{r}}_1\right\}e^{i\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\omega(1-\vec{n}\vec{v})t}dt.\end{aligned} \tag{8}$$

Всюду в дальнейшем будем проводить вычисления только для величины $\vec{I}$, так как для I все вычисления аналогичны.

Воспользуемся разложением потенциала $U(\vec{r})$ в интеграл Фурье

$$U(\vec{r}) = \int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}e^{i\vec{q}\vec{r}}U_q\ .$$

Проведем, также, разложение вектора $\vec{q}$ на параллельную и перпендикулярную $\vec{v}$ составляющие $\vec{q} = \vec{q}_\parallel + \vec{q}_\perp$. Тогда легко проверить, что

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \frac{-i}{\varepsilon}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}e^{i\vec{q}(\vec{r}_0+\vec{v}t)}\frac{U_q}{(\vec{q}\vec{v})^2}\left\{-\vec{q}+\vec{v}(\vec{v},\vec{q})\right\},\\ \vec{r}_2 &= \int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q'}{(2\pi)^3}\frac{i}{\varepsilon^2}\frac{U_{q-q'}U_{q'}}{q_\parallel v}e^{i\vec{q}(\vec{r}_0+\vec{v}t)}\left\{W\vec{v}+Q\vec{q}_\perp+Q'\vec{q}\,'_\perp\right\}.\end{aligned} \tag{9}$$

Явные выражения для W, Q, Q' достаточно громоздки. Значительные упрощения этих величин возникают в случае, если ультрарелятивистский электрон излучает в поле атома или набора атомов, потенциал которых быстро убывает на расстояниях, превышающих радиус R Томаса-Ферми экранировки потенциала атома. Связано это с тем, что, как будет показано ниже, характерные значения $q_\parallel$, вносящие основной вклад в излучение в рассматриваемом случае, по порядку величины $q_\parallel \sim \delta$, где $\delta = m^2\omega/2\varepsilon\varepsilon'$. Характерные же значения величин $q_\perp, q'_\parallel$ и $q'_\perp$ по порядку величины равны R^{-1}. Поэтому при достаточно больших значениях энергии электрона всегда может быть выполнено условие $\delta R << 1$. Выражения для W, Q и Q' в этом случае существенно упрощается, приобретая следующий вид

$$W = \frac{\vec{q}\,'_\perp(\vec{q}\,'_\perp-\vec{q}_\perp)}{q'_\parallel q_\parallel};\ Q = -\frac{\vec{q}\,'_\perp(\vec{q}\,'_\perp-\vec{q}_\perp)}{q'_\parallel q_\parallel};\ Q' = \frac{1}{q'_\parallel}. \tag{10}$$

Сразу же отметим порядок этих величин

$$W \sim \frac{1}{R\delta};\ Q \sim \frac{1}{\delta};\ Q' \sim R.$$

С учетом (10) находим, что

$$\left[\vec{n},\vec{I}_1\right]=\int\frac{d^3q}{(2\pi)^2}\vec{N}(\vec{q})e^{i\vec{q}\vec{r}_0}\delta\left(q_\parallel+g_\parallel\right), \tag{11}$$

$$\left[\vec{n},\vec{I}_2\right]=\int\frac{d^3q}{(2\pi)^2}\int\frac{d^3q'}{(2\pi)^3}\vec{N}(\vec{q},\vec{q}\,')e^{i\vec{q}\vec{r}_0}\delta\left(q_\parallel+g_\parallel\right), \tag{12}$$

где введены следующие обозначения

$$g_\parallel=\frac{\omega}{v}\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\left(1-v\cos\theta_\gamma\right),$$

$$\vec{N}(\vec{q})=\frac{U_q}{\varepsilon q_\parallel v^2}\left\{-\left[\vec{n},\vec{q}_\perp\right]+\left(\frac{\omega}{v}\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{(\vec{n}\vec{q}_\perp)}{q_\parallel}+\frac{1}{\gamma^2}\frac{\omega}{v^2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)\left[\vec{n},\vec{v}\right]\right\},$$

$$\vec{N}(\vec{q},\vec{q}\,')=\frac{U_{q-q''}U_{q'}}{\varepsilon^2 v}\left\{\left[\vec{n},\vec{v}\right]W_2+\left[\vec{n},\vec{q}_\perp\right]Q_2+\left[\vec{n},\vec{q}\,'_\perp\right]Q_2'\right\},$$

и θ_γ -угол между импульсом электрона и импульсом фотона.

Входящие в $\vec{N}(\vec{q},\vec{q}\,')$ величины W_2, Q_2 и Q_2' определяются соотношениями

$$W_2=-W+\omega\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{1}{q_\parallel v}\left((\vec{n},\vec{v})W+(\vec{n},\vec{q}_\perp)Q+(\vec{n},\vec{q}\,'_\perp)Q'\right)+\omega\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}W_1+\frac{1}{2}\omega^2\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2}G,$$

$$Q_2=-Q+\omega\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}Q_1,$$

$$Q_2'=-Q'+\omega\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}Q_1',$$

где

$$G=\frac{1}{\left(q_\parallel-q_\parallel'\right)^2q_\parallel'^2v^4}\left\{(\vec{n},\vec{q}\,'_\perp)(\vec{n},\vec{q}_\perp)-(\vec{n},\vec{q}\,'_\perp)^2+\frac{1}{\gamma^2}\frac{q_\parallel'}{v}(\vec{n},\vec{v})(\vec{n},\vec{q}_\perp)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{\gamma^2}\frac{q_\parallel-2q_\parallel'}{v}(\vec{n},\vec{v})(\vec{n},\vec{q}\,'_\perp)+\frac{1}{\gamma^4}\frac{q_\parallel q_\parallel'}{v^2}(\vec{n},\vec{v})^2-\frac{1}{\gamma^4}\frac{q_\parallel'^2}{v^2}(\vec{n},\vec{v})^2\right\},$$

$$W_1=\frac{-1}{q_\parallel'^2v^4\gamma^2}\left\{(\vec{n},\vec{q}\,'_\perp)+\frac{1}{\gamma^2}\frac{q_\parallel''}{v}(\vec{n},\vec{v})\right\},$$

$$Q_1=\frac{-1}{\left(q_\parallel-q_\parallel'\right)q_\parallel'^2v^3}\left\{(\vec{n},\vec{q}\,'_\perp)+\frac{1}{\gamma^2}\frac{q_\parallel'}{v}(\vec{n},\vec{v})\right\},$$

$$Q_1'=\frac{1}{\gamma^2q_\parallel'^2v^4}\left\{(\vec{n},\vec{q}\,'_\perp)+\frac{1}{\gamma^2}\frac{q_\parallel'}{v}(\vec{n},\vec{v})\right\}.$$

Подставляя разложения (7) в (1) находим, что первые члены разложения по потенциалу входящего в (1) слагаемого $\left|\left[\vec{n},\vec{I}\right]\right|^2$ могут быть записаны в виде

$$\left|\left[\vec{n},\vec{I}\right]\right|^2=\left|\left[\vec{n},\vec{I}_1\right]\right|^2+2\,\mathrm{Re}\left(\left[\vec{n},\vec{I}_1\right]\left[\vec{n},\vec{I}_2^{\,*}\right]\right)+\dots$$

В результате интегрирования этого выражения по $\vec{r}_0$ находим, что

$$\int d^3\ddot{r}_0\left|\left[\vec{n},\vec{I}_1\right]\right|^2=vt\int\frac{d^2q_\perp}{(2\pi)^2}\left|\vec{N}_g(\vec{q})\right|^2, \tag{13}$$

где индекс g указывает на то, что всюду положено $q_\parallel=-g_\parallel$.

Для дальнейших вычислений введем систему полярных координат, в которой θ_γ-угол между импульсом электрона и импульсом фотона, φ-азимутальный угол. В этой системе координат может быть выполнено в явном виде интегрирование величин $\left|\vec{N}_g(\vec{q})\right|^2$ и $\vec{N}_g{}^*(\vec{q},\vec{q}\,')\vec{N}_g(\vec{q})$ по азимутальному углу φ. При этом с точностью до членов порядка γ^{-2} включительно получим

$$\int_0^{2\pi}\left|\vec{N}_g(\vec{q})\right|^2 d\varphi = \frac{2\pi\left|U_q\right|^2}{\varepsilon^2 g_\parallel^{\ 2}} q_\perp^2\left(1-2\frac{\delta}{g_\parallel}\left(1-\frac{\delta}{g_\parallel}\right)\right),$$
$$\int_0^{2\pi}\vec{N}_g{}^*(\vec{q},\vec{q}\,')\vec{N}_g(\vec{q})d\varphi = \frac{U_q U^*_{q-q'}U^*_{q'}}{\varepsilon^2}\frac{\vec{q}\,'_\perp(\vec{q}\,'_\perp-\vec{q}_\perp)}{g_\parallel^2 q_\parallel'^2} q_\perp^2\pi\left\{1-\frac{2\delta}{g_\parallel}\left(1-\frac{\delta}{g_\parallel}\right)\right\}. \tag{14}$$

Выполнив аналогичные вычисления для входящего в (1) слагаемого $\left|I\right|^2$, получим

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int d^3\vec{r}_0\left|I_1\right|^2 = vt\int\frac{d^2q_\perp}{(2\pi)^2}\frac{\left|U_q\right|^2}{m^2 g_\parallel^{\ 2}}(4\pi)q_\perp^2\left\{\frac{\delta}{g_\parallel}-\frac{\delta^2}{g_\parallel^{\ 2}}\right\},$$
$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int d^3r_0 I_1 I_2^* = \frac{U_q U^*_{q-q'}U^*_{q'}}{\varepsilon\varepsilon'^2 v^5 g_\parallel^2}q_\perp^2\frac{\vec{q}\,'_\perp(\vec{q}\,'_\perp-\vec{q}_\perp)}{q_\parallel'^2}\pi\frac{\omega}{g_\parallel}\left(1-\frac{\delta}{g_\parallel}\right). \tag{15}$$

Переходя далее от вероятности излучения (1) к сечению излучения, приходим к следующей формуле для первых двух членов разложения сечения излучения по потенциалу внешнего поля

$$d\sigma = \frac{e^2}{2\pi^2}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\frac{q_\perp^2}{g_\parallel^2}dg_\parallel q_\perp dq_\perp\frac{d\omega}{\omega}\frac{\delta}{m^2}\left\{1+\frac{\omega^2}{2\varepsilon\varepsilon'}-\frac{2\delta}{g_\parallel}\left(1-\frac{\delta}{g_\parallel}\right)\right\}\left|U_q\right|^2\times$$
$$\left\{1-\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{Re}\left(\int\frac{d^3q'}{(2\pi)^3}\frac{\vec{q}\,'_\perp(\vec{q}_\perp-\vec{q}\,'_\perp)}{q_\parallel'^2}\frac{U^*_{q_\perp-q'_\perp,q'_\parallel}U^*_{q'_\perp,q'_\parallel}}{U^*_q}\right)\right\}. \tag{16}$$

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СЕЧЕНИЙ ИЗЛУЧЕНИЯ, ПОЛУЧЕННЫХ НА ОСНОВЕ ОПЕРАТОРНОГО КВАЗИКЛАССИЧЕСКОГО МЕТОДА И ДИАГРАММНОЙ ТЕХНИКИ ФЕЙНМАНА

Формула (16) для сечения излучения была получена путем разложения квазиклассического выражения (1) для вероятности излучения по степеням потенциала взаимодействия частицы с внешним полем, с учетом вклада в излучение слагаемых пропорциональных U^3. Такое разложение сечения излучения по степеням U соответствует борновской теории возмущений в квантовой электродинамике. Аналогичные вычисления были проведены в работе [9] на основе диаграммной техники Фейнмана, с учетом вклада в излучение второго борновского приближения. При этом было получено следующее выражение для сечения излучения

$$d\sigma = \frac{e^2}{2\pi^2}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\frac{q_\perp^2}{g_\parallel^2}dg_\parallel q_\perp dq_\perp\frac{d\omega}{\omega}\frac{\delta}{m^2}\left\{F\left|U_q\right|^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\varepsilon}\left[F+\frac{\omega}{\varepsilon'}\left(1-4\frac{\delta}{g_\parallel}\left(1-\frac{\delta}{g_\parallel}\right)+\frac{\omega^2}{2\varepsilon\varepsilon'}\left(1-\frac{\delta}{g_\parallel}\right)\right)\right]U_q\,\mathrm{Re}\left(\int\frac{d^3q'}{(2\pi)^3}\frac{(\vec{q}_\perp-\vec{q}\,'_\perp)\vec{q}\,'_\perp}{(q_\parallel-q'_\parallel+i0)(q'_\parallel+i0)}U^*_{q-q'}U^*_{q'}\right)\right\}, \tag{17}$$

где $F = 1+\dfrac{\omega^2}{2\varepsilon\varepsilon'}-\dfrac{2\delta}{g_\parallel}\left(1-\dfrac{\delta}{g_\parallel}\right)$ и $g_\parallel \geq \delta = \dfrac{m\omega^2}{2\varepsilon\varepsilon'}$.

Эта формула для сечения излучения справедлива в области малых значений переданного импульса $q_\perp << m$.

Сравнивая формулы (16) и (17), видим, что в первом борновском приближении сечения излучения (16) и (17) полностью совпадают. Слагаемые же, связанные с вкладом в сечение второго борновского приближения, несколько отличаются. А именно, поправка к сечению (17) имеет дополнительные слагаемые, пропорциональные $\frac{\omega}{\varepsilon'}$ и $\frac{\omega^3}{\varepsilon\varepsilon'^2}$, по сравнению с соответствующей поправкой к сечению (16). Обсудим поэтому более подробно соответствие между формулами (16) и (17) для сечений излучения.

При выполнении условия $g_{\|} \sim \delta << q_{\| eff}$ (условие применимости формулы (16)) в области малых частот излученных фотонов, когда можно пренебречь эффектом отдачи при излучении $(\omega << \varepsilon)$, формулы (16) и (17) совпадают с учетом вклада в излучение второго борновского приближения. В этом случае в (16) и (17) зависимостью Фурье-компоненты потенциала внешнего поля от $g_{\|}$ можно пренебречь. Благодаря этому в (16) и (17) в явном виде может быть выполнено интегрирование по $g_{\|}$. В результате приходим к следующему выражению для сечения излучения

$$d\sigma = dw(q_{\perp}) d\sigma_l(q_{\perp}), \tag{18}$$

где $dw(q_{\perp})$ -вероятность излучения,

$$dw(q_{\perp}) = \frac{2e^2}{3\pi}\frac{q_{\perp}^2}{m^2}\frac{d\omega}{\omega} \tag{19}$$

и $d\sigma_l(q_{\perp})$ -сечение рассеяния электрона в поле $U(\vec{r})$ с учетом вклада второго борновского приближения

$$d\sigma_l(q_{\perp}) = \frac{d^2 q_{\perp}}{4\pi^2}\left\{\left|U_{q_{\perp}}\right|^2 - \frac{1}{\varepsilon}U_{q_{\perp}} \operatorname{Re}\int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3}\frac{(\vec{q}_{\perp} - \vec{q}'_{\perp})\vec{q}'_{\perp}}{(q'_{\|} - i0)^2} U^*_{q_{\perp}-q'_{\perp}, q'_{\|}} U^*_{q'_{\perp}, q'_{\|}}\right\}. \tag{20}$$

Таким образом, при $\delta << q_{\perp}$ имеет место теорема о факторизации сечения излучения, согласно которой сечение излучения распадается на произведение вероятности излучения на сечение упругого рассеяния. Существенным при этом является то, что при $\omega << \varepsilon$ такая факторизация сечения излучения имеет место с учетом поправки к сечению рассеяния пропорциональной ε^{-1}.

В области больших частот $\omega \sim \varepsilon$ при выполнении условия $g_{\|} \sim \delta << q_{\perp}$ в результате интегрирования в (17) по $g_{\|}$ приходим к следующему выражению для сечения излучения

$$d\sigma = dw_q(q_{\perp})\frac{d^2 q_{\perp}}{4\pi^2}\left\{\left|U_{q_{\perp}}\right|^2 - \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2\varepsilon\varepsilon'}U_{q_{\perp}} \operatorname{Re}\int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3}\frac{(\vec{q}_{\perp} - \vec{q}'_{\perp})\vec{q}'_{\perp}}{(q'_{\|} - i0)^2} U^*_{q_{\perp}-q'} U^*_{q'}\right\}, \tag{21}$$

где

$$dw_q(q_{\perp}) = \frac{2e^2}{3\pi}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\left(1 + \frac{3\omega^2}{4\varepsilon\varepsilon'}\right)\frac{q_{\perp}^2}{m^2}\frac{d\omega}{\omega}. \tag{22}$$

Формула же (16) приводит к соотношению (18) для сечения излучения, в котором $dw(q_{\perp})$ и $d\sigma_l(q_{\perp})$ определяются формулами (19) и (20).

В случае потенциала Кулона имеем следующее выражение для U_q

$$U_q = \frac{4\pi Z e^2}{q^2}. \tag{23}$$

Интегрирование во входящем в (20) интеграле по $\vec{q}'$ в этом случае может быть выполнено аналитически:

$$\operatorname{Re}\int \frac{d^3 q'}{(2\pi)^3}\frac{(\vec{q}_{\perp} - \vec{q}'_{\perp})\vec{q}'_{\perp}}{(q'_{\|} - i0)^2} U^*_{q_{\perp}-q'_{\perp}, q'_{\|}} U^*_{q'_{\perp}, q'_{\|}} = \frac{2\pi^2 Z^2 e^4}{q_{\perp}}. \tag{24}$$

При этом сечение рассеяния (20), с учетом вклада второго борновского приближения, приобретает вид

$$d\sigma_l(q_{\perp}) = \frac{4Z^2 e^4 d\Omega}{\varepsilon^2 \theta_e^4}\left\{1 - \frac{e}{|e|}\frac{\pi Z e^2}{2}\theta_e\right\}, \tag{25}$$

где $\theta_e = \dfrac{q_\perp}{p}$ - угол рассеяния частицы, $\theta_e << 1$, и $d\Omega$ - элемент телесного угла в направлении рассеяния. Эта формула для сечения рассеяния совпадает с соответствующим результатом работы [10], относящимся к малым углам рассеяния.

Сечение же излучения (21) для такого потенциала имеет вид

$$d\sigma = dw_q(q_\perp)\frac{4Z^2e^4d^2q_\perp}{q_\perp^3}\left\{1-\frac{e}{|e|}\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2\varepsilon\varepsilon'}\frac{\pi Ze^2}{2}q_\perp\right\}. \tag{26}$$

Таким образом, в области частот $\omega \sim \varepsilon$ теорема о факторизации сечения излучения (18) справедлива с точностью до членов порядка ε^{-1}. При этом квазиклассическая формула (1) для вероятности излучения приводит к неправильному выражению для поправки, пропорциональной ε^{-1}. Связано это видимо, с тем что точность вывода формулы (1) является меньшей чем точность, определяемая параметром $\dfrac{e\hbar|\vec{F}|}{\varepsilon^2}$.

При излучении электрона в кулоновском поле поправка к сечению излучения пропорциональная ε^{-1} весьма мала, поэтому может сложится впечатление, что учет этой поправки приводит к несущественному эффекту. Это, однако, далеко не так, поскольку учет этой поправки приводит к зависимости сечения излучения от знака заряда частицы. Кроме того, в случае излучения релятивистского электрона в кристалле величина этой поправки может значительно возрасти по сравнению с ее значением при излучении на одном атоме. Это было показано в работе [9] на простейшем примере излучения электрона в поле кристаллической плоскости атомов при падении частиц под малым углом θ к этой плоскости. Ниже мы продемонстрируем различие сечений излучения, определяемых формулами (16) и (17), для этого простейшего случая.

СЕЧЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПОЛЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Движение быстрой заряженной частицы в кристалле под малым углом θ к одной из кристаллических плоскостей атомов определяется в основном непрерывным потенциалом этой плоскости, который представляет собой потенциал атомов, лежащих в плоскости, усредненный по координатам y и z данной плоскости. Фурье-компонента усредненного потенциала плоскости определяется соотношением

$$U_g = (2\pi)^2\delta(g_y)\delta(g_z)\frac{1}{a_ya_z}u_g, \tag{27}$$

где $\delta(g)$ -дельта-функция, a_y и a_z среднее расстояние между атомами в плоскости вдоль осей y и z, а u_g - Фурье-компонента потенциала отдельного атома в плоскости. Если потенциал атома представляет собой экранированный потенциал Кулона, то

$$u_g = \frac{4\pi Z|e|}{\vec{g}^2+R^{-2}}, \tag{28}$$

где R -радиус Томаса-Ферми экранировки потенциала атома.

При взаимодействии частицы с таким полем, как легко проверить, входящие в (17) и (18) величины $g_\parallel$ и $q_\parallel$ определяются соотношениями

$$g_\parallel = \theta g_x,\ q_\parallel = \theta q_x, \tag{29}$$

где g_x и q_x -координаты векторов $\vec{g}$ и $\vec{q}$ вдоль оси x (ось x ортогональна плоскости атомов (y, z)). При этом, входящие в (17) векторы $\vec{g}_\perp$ и $\vec{q}_\perp$ имеют отличные от нуля только компоненты g_x и q_x.

Используя это соотношение, приходим к следующему выражению для сечения излучения(17)

$$d\sigma = N\frac{16\pi Z^2e^6}{a_ya_z\theta^2}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\frac{\delta}{m^2}\frac{d\omega}{\omega}\int_{\delta/\theta}^{\infty}dg_x\frac{1}{\left(g_x^2+R^{-2}\right)^2}\left\{F(g_x)+\frac{e}{|e|}\frac{4\pi Ze^2R}{\varepsilon a_ya_z\theta^2}\left[F(g_x)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{\omega}{\varepsilon'}\left(1-4\frac{\delta}{\theta g_x}\left(1-\frac{\delta}{\theta g_x}\right)+\frac{\omega^2}{2\varepsilon\varepsilon'}\left(1-\frac{\delta}{\theta g_x}\right)\right)\right]\frac{g_x^2+R^{-2}}{g_x^2+4R^{-2}}\right\}, \tag{30}$$

где $F(g_x) = 1 + \frac{\omega^2}{2\varepsilon\varepsilon'} - \frac{2\delta}{\theta g_x}\left(1 - \frac{\delta}{\theta g_x}\right)$.

При выводе этой формулы в (17) было выполнено интегрирование по переменной q'_x с учетом формулы (28) для Фурье-компоненты потенциала.

В результате аналогичных преобразований формула (16) приобретает следующий вид

$$d\sigma = N\frac{16\pi Z^2 e^6}{a_y a_z \theta^2}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\frac{\delta}{m^2}\frac{d\omega}{\omega}\int_{\delta/\theta}^{\infty} dg_x \frac{F(g_x)}{\left(g_x^2 + R^{-2}\right)^2}\left\{1 + \frac{e}{|e|}\frac{4\pi Ze^2 R}{\varepsilon a_y a_z \theta^2}\frac{g_x^2 + R^{-2}}{g_x^2 + 4R^{-2}}\right\}. \tag{31}$$

Формулы (30) и (31) показывают, что при заданном θ спектральная плотность излучения $\omega\, d\sigma/d\omega$ содержит максимум в области частот, определяемой условием

$$\delta^{-1} \sim 2R/\theta\,. \tag{32}$$

С ростом энергии частицы положение этого максимума быстро стремится в область больших частот. При этом в области энергий $\varepsilon \geq m^2 R/\theta$ положение этого максимума находится в области частот $\omega \sim \varepsilon$, для которых существенен эффект отдачи при излучении.

Формулы (30) и (31) показывают, что относительный вклад второго борновского приближения в сечение излучения определяется параметром

$$\alpha_p \sim \frac{4\pi Ze^2 R}{\varepsilon a_y a_z \theta^2}\,. \tag{33}$$

Этот параметр представляет собой отношение квадрата критического угла плоскостного каналирования частиц в кристалле $\theta_p^2 = \frac{4\pi Ze^2 R}{\varepsilon a_y a_z}$ к квадрату угла θ падения частиц на кристалл по отношению к кристаллической плоскости

$$\alpha_p \sim \theta_p^2/\theta^2\,. \tag{34}$$

Таким образом, с уменьшением θ поправка, приводящая к зависимости сечения излучения от знака заряда частицы, быстро растет. Согласно (30), эта поправка содержит дополнительные, по сравнению с (31), слагаемые, пропорциональные ω/ε и $(\omega/\varepsilon)^3$. При этом в области максимума спектра излучения это различие будет определяться параметром

$$\frac{\omega}{\varepsilon} \sim \frac{\varepsilon\theta}{m^2 R}\,. \tag{35}$$

В частности, для электронов и позитронов с энергией 1 Гэв при $\theta \sim 10^{-3}$ радиана этот параметр может достигать величины порядка 10^{-1}.

ВЫВОДЫ

Для описания излучения ультрарелятивистских электронов в интенсивном внешнем поле часто используется формула для спектральной плотности излучения, полученная на основе операторного квазиклассического метода для описания излучения релятивистских электронов неоднородном внешнем поле. Эта формула позволяет учесть как эффект отдачи при излучении так и эффект недипольности излучения. Условия ее применимости не противоречат возможности проведения в ней разложения по потенциалу. Такое разложение проведено с учетом вклада в сечение слагаемых, пропорциональных U^2 и U^3. Сопоставление полученного результата с соответствующим результатом, полученным на основе диаграммной техники Фейнмана, показывает, что слагаемые, пропорциональные U^2, совпадают во всей области частот излученных фотонов, тогда как слагаемые, пропорциональные U^3, совпадают только в области малых частот излученных фотонов. В области же больших частот излученных фотонов поправка к результату первого борновского приближения содержит дополнительные слагаемые, пропорциональные $\hbar\omega/\varepsilon$ и $(\hbar\omega/\varepsilon)^2$, по сравнению с соответствующим результатом операторного квазиклассического метода. Показано, что при движении электрона в кристалле под малым углом к одной из кристаллических плоскостей величина этого различия в области больших частот быстро растет с уменьшением угла падения частиц на кристаллическую плоскость. Максимальное различие достигается при значениях этого угла, сравнимых с кристаллическим углом плоскостного каналирования.

Полученные результаты указывают на необходимость более детального анализа условий применимости результатов, полученных на основе операторного квазиклассического метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ferretti B. Sulla bremsstrahlung nei cristalli // Nuovo Cimento.-1950.-V.7.-P.118-134.
2. Тер-Микаелян М.Л. Интерференционное излучение сверхбыстрых электронов //ЖЭТФ.-1953.-Т.25.-С.296-306.
3. Überall H. High-energy interference effect of bremssrahlung and pair production in crystals //Phys.Rev.-1956.-V.103.-P.1055-1067.
4. Ахиезер А.И., Фомин С.П., Шульга Н.Ф. Когерентное тормозное излучение электронов и позитронов ультравысокой энергии в кристаллах // Письма в ЖЭТФ.-1971.-Т.13.-С.713-715.
5. Ахиезер А.И., Болдышев В.Ф., Шульга Н.Ф. Теория упругого рассеяния и тормозного излучения быстрых заряженных частиц в кристаллах //ЭЧАЯ.-1979.-Т.10.-С.51-89.
6. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф. Электродинамика высоких энергий в веществе. -М.:Наука.-1993.-344 с.
7. Байер В.Н., Катков В.М., Фадин В.С. Излучение релятивистских электронов. -М.:Атомиздат.-1973.-373 с.
8. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. Электромагнитные процессы при высокой энергии в ориентированных монокристаллах. -Новосибирск: Наука, Сибирское отделение.-1989.-400 с.
9. Shul'ga N.F., Syshchenko V.V. On the coherent radiation of relativistic electrons and positrons in crystal in the range of high energies of gamma-quanta // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res.-2002.-V.B193.-P.192-197.
10. Mc-Kinley W.A., Feshbach G. The Coulomb scattering of relativistic electrons by nuclei //Phys.Rev.-V.74.-P.1759-1763.

ON BORN CORRECTION TO THE CROSS-SECTION OF RADIATION BY RELATIVISTIC ELECTRON IN EXTERNAL FIELD

N.F. Shul`ga, V.V. Boyko
Akhiezer Institute for Theoretical Physics, National Science Center ''Kharkov Institute of Physics and Technology''
Akademicheskaya st.1 Kharkov, 61108, Ukraine
E-mail: shulga@kipt.kharcov.ua

Semiclassical formula for spectral-angular distribution of radiation by relativistic electron in external nongomogenuous field, which was obtained on the basis of operator semiclassical method with taking into account of recoil effect at radiation, is investigated. The decomposition of this formula on external field potential is fulfilled. The comparison of obtained result with the correspondingresultof Born calculation on the basis of Feynman diagrams method is fulfilled. The nonaccordance of semiclassical and second Born approximation results for the region of high energy photon is shown.

KEY WORDS: semiclassical approximation, Born approximation, probability of radiation, cross-action of radiation, cross-section of scattering.