

УДК 533.95

**ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ РЕЗОНАТОРА С СИНУСОИДАЛЬНО
ГОФРИРОВАННЫМИ МЕТАЛЛИЧЕСКИМИ СТЕНКАМИ, НАПОЛНЕННОГО
ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМОЙ****В.И. Лапшин, А.Ф. Стоянов, И.В. Ткаченко***Национальный научный центр "Харьковский физико-технический институт", г. Харьков, ул. Академическая, 1, Украина
Поступила в редакцию 20 июня 2005 г.*

В работе описаны собственные электромагнитные волны, распространяющиеся в ограниченном периодическом резонаторе, заполненном холодной плазмой. Найдены решения уравнений Максвелла для плазменного резонатора, учитывающие граничные условия на вертикальных и гофрированных идеально проводящих стенках. Показано, что решение уравнений Максвелла и дисперсионные соотношения аналогичны результатам, полученным для бесконечного периодического волновода с той лишь разницей, что для продольных волновых чисел спектр собственных значений дискретен. Количество разрешенных значений соответствует количеству длин периодов гофра, укладываемых по длине резонатора.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: плазма, волновод, резонатор, металл, период

Исследование распространения электромагнитных волн в периодических плазмонаполненных волноводных структурах представляет значительный интерес в связи с чисто практическим применением: созданием новых ускорителей частиц, генераторов СВЧ-излучения [1]. Одновременно указанная область исследований представляет теоретический интерес, в частности, с точки зрения изучения дисперсионных свойств волноводов с периодически изменяющимися характеристиками.

В идеализированной постановке периодические волноводы считаются неограниченными в продольном направлении. В этом случае для исследования его дисперсионных свойств приходится проводить вычисление бесконечного определителя. Это затрудняет получение окончательного результата, т.к. в замкнутом виде невозможно аналитическое исследование определителя типа Хилла [2] или Коха, поэтому в ряде работ производилось «усечение» бесконечных определителей и исследование на их основе дисперсионных свойств. Однако такое упрощение задачи связано с пренебрежением бесконечным количеством членов, которые могут оказаться существенными при определенных значениях параметров задачи. В работе [3] предложен более корректный подход к решению задачи по исследованию дисперсионных свойств гофрированных плазменных волноводов. В работах [4-7] предложен метод исследования бесконечных в продольном направлении синусоидально гофрированных волноводов с идеально проводящими стенками, учитывающий абсолютно все элементы бесконечного определителя. Альтернативным подходом к решению указанной задачи, учитывающим все элементы бесконечного определителя, является применение интегральных преобразований [8].

Полученные ранее результаты [4-7] естественно обобщить на случай ограниченного волновода-плазменного резонатора. В данной работе исследованы собственные колебания плоского гофрированного волновода, ограниченного идеально проводящими вертикальными металлическими стенками, наполненного холодной плазмой и помещенного в сильное продольное магнитное поле. На поверхности идеально проводящего металлического волновода (боковой- гофрированной и на вертикальных стенках) ставится условие равенства нулю тангенциальной компоненты электрического поля.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим ограниченный волновод (плазменный резонатор) с вертикальными боковыми стенками (рис.1). Для простоты сначала будем полагать, что длина резонатора L равна одному периоду гофра:

$$L = \frac{2\pi}{k_0}.$$

Поверхность стенок волновода описывается уравнением:

$$X_{\beta}(z) = \begin{cases} H + \alpha \sin(k_0 z); & x > 0 \\ -\alpha \sin(k_0 z) - H; & x < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где H - полуширина волновода при нулевой глубине гофра, α - глубина гофра, $\beta=1,2$ соответствует верхней и нижней границе волновода.

В сильном продольном магнитном поле ($H_z \rightarrow \infty$) наличие плазмы в резонаторе приводит к анизотропным диэлектрическим свойствам резонатора, вследствие чего поле внутри резонатора описывается уравнениями Максвелла (рассматриваем E-волну):

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i \frac{\omega}{c} H_y; \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = i \frac{\omega}{c} E_x; \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = -i \varepsilon_{\parallel} \frac{\omega}{c} E_z. \quad (2)$$

На боковой поверхности резонатора и на вертикальных металлических стенках ставятся граничные условия равенства нулю тангенциальной компоненты электрического поля: $x=X_1(z)$, $x=X_2(z)$, $z=0$, $z=L$: $E_{\tau}=0$,

где $\varepsilon_{\parallel} = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$; ω - частота колебаний, $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_p}{m}}$ - плазменная частота, n_p - равновесная плотность плазмы.

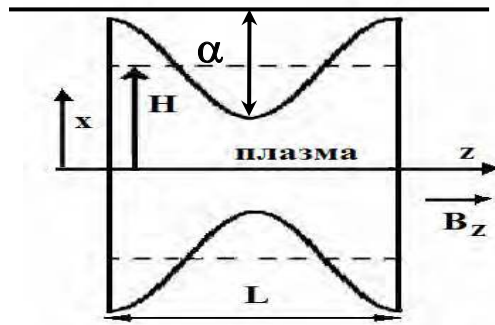


Рис. 1. Плазменный резонатор с синусоидально гофрированными металлическими стенками (содержит 1 период гофра)

Целью настоящей работы является исследование собственных электромагнитных колебаний гофрированного плазменного резонатора, вычисление собственных частот и волновых чисел.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Систему уравнений (2) преобразуем к удобному для решения виду [1]. Выполним тождественные преобразования:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} &= i \frac{\omega}{c} \frac{\partial H_y}{\partial z}; & \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} &= i \frac{\omega}{c} \frac{\partial H_y}{\partial x}; \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} &= i \frac{\omega}{c} E_x; & \frac{\partial H_y}{\partial x} &= -i \varepsilon_{\parallel} \frac{\omega}{c} E_z. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E_x; \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \varepsilon_{\parallel} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E_z \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^3 E_x}{\partial z^2 \partial x} - \frac{\partial^3 E_z}{\partial x^2 \partial z} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\partial E_x}{\partial x}; \quad \frac{\partial^3 E_x}{\partial z^2 \partial x} - \frac{\partial^3 E_z}{\partial x^2 \partial z} = \varepsilon_{\parallel} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\partial E_z}{\partial z} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \varepsilon_{\parallel} \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E_x; \quad -\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \varepsilon_{\parallel} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \varepsilon_{\parallel} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E_z \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \varepsilon_{\parallel} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon_{\parallel} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E_x; \quad -\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \varepsilon_{\parallel} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \varepsilon_{\parallel} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E_z.$$

Следуя [1], будем искать решение для компонент электрического поля в виде:

$$F_i(x, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_{in} F_{in}(x) e^{ik_n z - i\omega t}; \quad k_n = h + nk_0, \quad (4)$$

где h - волновое число, $i=1,2$ соответствует координатам x и z , $k_n=h+nk_0$, h - продольное волновое число, ω - частота колебаний. Решение уравнения (3) для продольного компонента электрического поля имеет вид:

$$E_z = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} [a_n e^{-i\chi_n x} + b_n e^{i\chi_n x}] e^{ih_n z}, \quad (5)$$

где $\chi_n = \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \left(\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k_n^2 \right)}$. Полагаем, что $\chi_n^2 = \varepsilon_{\parallel} \left(\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - k_n^2 \right) > 0$. Это обстоятельство необходимо

учесть в качестве ограничения на область определения и множество значений функции $\omega(h)$, соотношение заведомо справедливо в потенциальном пределе, при условии $\frac{\omega_p}{\omega} < 1; \frac{\omega}{c} \rightarrow 0$. Значение E_x получим

непосредственным интегрированием уравнения $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \varepsilon_{\parallel} \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{\varepsilon_{\parallel} h_n}{\chi_n} [a_n e^{-i\chi_n x} - b_n e^{i\chi_n x}] e^{ih_n z}. \quad (6)$$

Очевидно, справедливо условие симметрии решения относительно оси X , т.е. если, например, $E_z(z)$ есть решение системы уравнений (3), то $E_z(-z)$ также является его решением. Тогда при выполнении условий симметрии [7] $h_{-n} = -h_n; \chi_n = \chi_{-n}; a_n = a_{-n}$ для поперечного компонента электрического поля имеем:

$$\begin{aligned} E_x(-z) &= 2i \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_{\parallel} h_n}{\chi_n} a_n \sin(\chi_n x) e^{-ih_n z} = 2i \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_{\parallel} (-h_{-n})}{\chi_n} a_n \sin(\chi_n x) e^{-ih_{-n} z} = \\ &= 2i \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_{\parallel} (-h_{-n})}{\chi_{-n}} a_{-n} \sin(\chi_{-n} x) e^{ih_{-n} z} = -2i \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_{\parallel} (h_n)}{\chi_n} a_n \sin(\chi_n x) e^{ih_n z}. \end{aligned} \quad (7)$$

Анализ (7) показывает, что в решении E_x происходит удвоение матричного элемента по сравнению со случаем бесконечного волновода [4].

Аналогичный результат получается для компонента E_z . Далее, следуя [1], получим решение дисперсионного уравнения, которое получается приравниванием определителя бесконечной размерности нулю.

Анализ бесконечного определителя, задающего дисперсионное соотношение, выполним следующим образом. Очевидно, определитель в любой точке спектра должен быть сходящимся. Потребуем, чтобы выполнялось достаточное условие сходимости бесконечного определителя- чтобы мажоранта [2] была органиченной. В нашем случае мажорантой является бесконечное произведение, составленное из просуммированных по немому индексу элементов всех строк бесконечного определителя, взятых по модулю.

Предположим, что мажоранта бесконечного определителя ограничена, по крайней мере, в окрестности особой точки бесконечной кратности [4-5] (в точке бесконечной кратности все сомножители $\prod_{-\infty}^{\infty} \cos(\chi_n H)$ - дисперсионного соотношения для гладкого волновода- равны нулю).

Этот факт подтверждается следующим неравенством:

$$\left| \prod_{-\infty}^{\infty} \cos(\chi_n H) \times \prod_{-\infty}^{\infty} \left[1 + 4 \times 2 \left(1 - \frac{J_0(\alpha \chi_n)}{2} \right) + 8 \times 2 \operatorname{itg}(\chi_n H) \frac{\varepsilon_{\parallel} k_n k_0 \alpha}{\chi_n} \left(1 - \frac{J_0(\alpha \chi_n)}{2} \right) \right] \right| \leq \text{const.}$$

Следовательно:

$$\prod_{-\infty}^{\infty} \left[1 + 2 \left(1 - \frac{J_0(\alpha \chi_n)}{2} \right) + 2 \operatorname{itg}(\chi_n H) \frac{\varepsilon_{\parallel} k_n k_0 \alpha}{\chi_n} \left(1 - \frac{J_0(\alpha \chi_n)}{2} \right) \right] \quad (8)$$

- ограничено, поэтому

$$\begin{aligned}
& \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{-\infty}^{\infty} \left[1 + 4 \times 2 \left(1 - \frac{J_0(\alpha \chi_n)}{2} \right) + 8 \times 2i \operatorname{tg}(\chi_n H) \frac{\varepsilon_{\parallel} k_n k_0 \alpha}{\chi_n} \left(1 - \frac{J_0(\alpha \chi_n)}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2N}} = 1 = \\
& = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{J_0(\alpha \chi_n)}{2} \right)^{\frac{1}{2N}} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{J_0(\alpha \chi_n)}{2} \right)} + 2 + 2i \operatorname{tg}(\chi_n H) \frac{\varepsilon_{\parallel} k_n k_0 \alpha}{\chi_n} \right]^{\frac{1}{2N}} = \\
& = 2 \sqrt{-\varepsilon_{\parallel}} \alpha k_0 \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{-\infty}^{\infty} \left| \operatorname{tg}(\chi_n H) \right|^{\frac{1}{2N}}.
\end{aligned} \tag{9}$$

По сути, сделанное предположение об ограниченности выражения (8) аналогично приему, использованному в [2] при вычислении определителя Хилла.

Полученные в нулевом приближении по глубине гофра решения образуют на плоскости (ω, h) , так называемый, плотный спектр [9]. Если рассматривать на этой плоскости прямоугольник $0 \leq \omega \leq \omega_p$; $0 \leq h \leq k_0$, (поскольку волновод имеет период k_0 , то мы можем ограничиться рассмотрением одного периода), плотный спектр будет соответствовать бесконечному множеству точек, заполняющих всю плоскость прямоугольника. Причем точки на этой плоскости будут характеризоваться определенной кратностью. Бесконечная кратность: все $\cos(\chi_n H)$ равны нулю; половинная кратность - $\cos(\chi_{2n+1} H)$ равны нулю; 1/3 кратность - $\cos(\chi_{2n+2} H)$ равны нулю и т.д. Поэтому если изобразить эти точки черным цветом (чем выше кратность, тем темнее цвет), этот прямоугольник будет иметь неоднотонную расцветку.

Проанализируем последствия учета малой величины гофра. Для этого полагаем $\omega = \omega_0 - i\Delta\omega$, $\Delta\omega \ll \omega_0$. Такой вид частоты с малой отрицательной мнимой добавкой выбран для того, чтобы определить ширину зоны непропускания $\Omega = 2\Delta\omega$ в окрестности точки бесконечной или иной кратности (9).

В окрестности точки бесконечной кратности решение уравнения (8) имеет вид:

$$\begin{aligned}
2 \sqrt{-\varepsilon_{\parallel}} \alpha k_0 \left| \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + Hh \sqrt{|\varepsilon_{\parallel}|}\right)} \right| = 1 & \Rightarrow 2 \sqrt{-\varepsilon_{\parallel}} \alpha k_0 \frac{1}{\operatorname{Hh}_0(|\varepsilon_{\parallel}|)^{-1/2} \left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}} = 1 \Rightarrow \\
\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 2 \sqrt{|\varepsilon_{\parallel}|} \alpha k_0 \frac{1}{\operatorname{Hh}_0\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^2}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, в точке бесконечной кратности существует интервал частот $2\Delta\omega$, в котором волны не распространяются.

Нетрудно показать, что малое смещение Δh по волновому числу от точки бесконечной кратности, например $k_0/2$, не изменяет кратности точки, а следовательно, и ширину зоны непропускания (при любом малом $\Delta h/k_0$ можно добиться сколь угодно точного выполнения равенства $\frac{1}{n + \frac{\Delta h}{k_0}} = 1$, где l и n – целые

числа). Такие же рассуждения справедливы и для точек пересечения дробной кратности. Таким образом, зона непропускания характеризуется шириной по частоте Ω и не зависит от волновых чисел в диапазоне $0 \leq h \leq k_0$.

В точке дробной кратности $1/M$, $M=2,3,4,\dots$ ширина зоны непрозрачности определяется из уравнения (10) аналогичным способом и равна

$$\Delta\omega_M \sim (\Delta\omega)^M. \tag{11}$$

Схематически изменение структуры спектра приведено на рис.2.

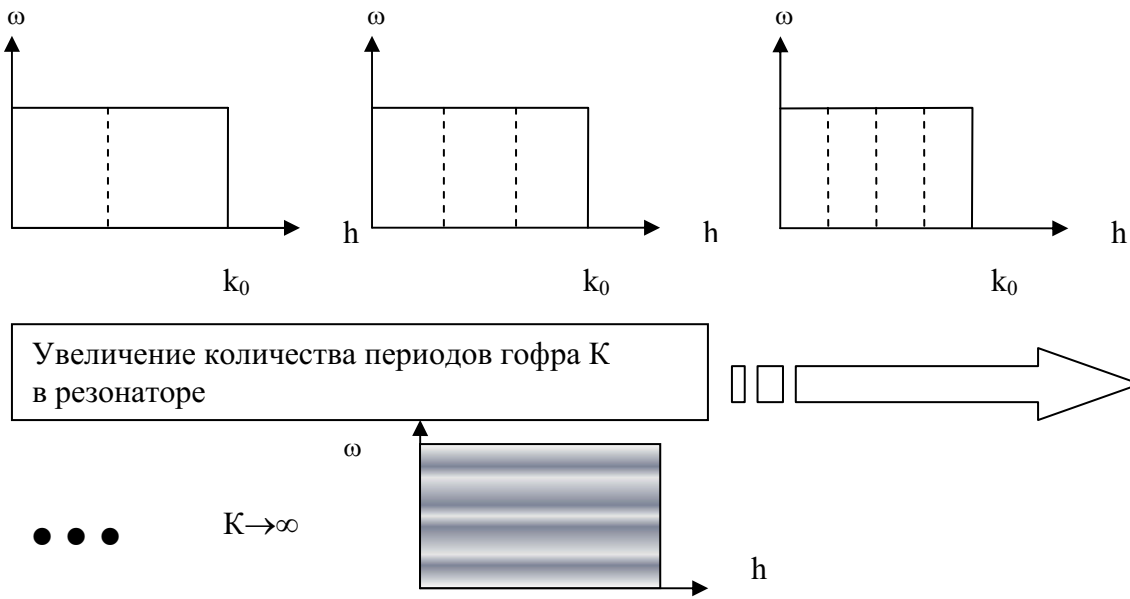


Рис. 2. Схематическая иллюстрация изменения спектральных характеристик резонатора при увеличении K

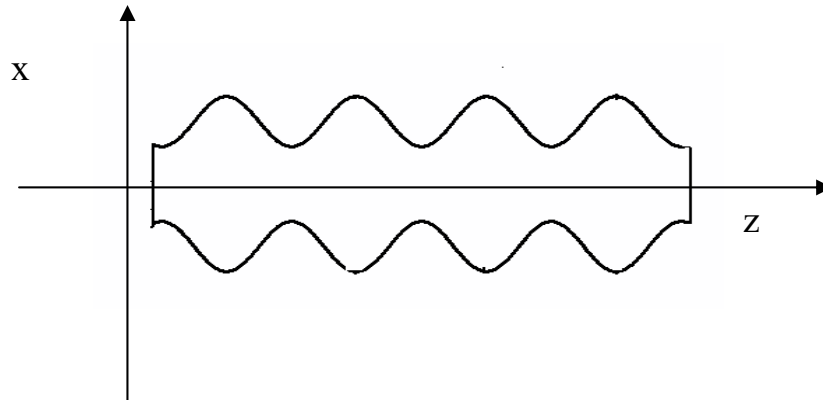


Рис. 3. Плазменный резонатор с синусоидально гофрированными металлическими стенками (содержит 4 периода гофра)

Переход к более общему случаю, когда резонатор содержит $K > 1$ периодов гофра волновода (рис.3.) не нарушает приведенных выше результатов.

Аналогично (4) будем искать решение в виде:

$$F(x, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n F_n(x) e^{ik_n z - i\omega t}; k_n = h + nk_0; \tag{12}$$

$$k_0 = \frac{2\pi K}{L}.$$

Здесь K- количество периодов гофра, содержащихся в конечном волноводе. Особенность проявления ограниченности волновода в поперечном направлении заключается в требовании равенства нулю E_x в точках $z=0, L$ и, как следствие, дискретности продольных волновых чисел. Количество разрешенных значений волновых чисел в интервале $0 \leq h \leq k_0$ определяется выражением $h_k = \frac{1}{2K} k_0$. Так например, при $K=1$ имеем ряд разрешенных волновых чисел $0, k_0/2, k_0$. При $K=2$ $h_z=0, 1/4 k_0, 1/2 k_0, 3/4 k_0, k_0$.

Легко видеть, что при $K \rightarrow \infty$ значения разрешенных волновых чисел стремятся к непрерывному спектру, исследованному ранее [4-7].

ВЫВОДЫ

На основании выполненного анализа можно сделать вывод о том, что в ограниченном плазмонаполненном волноводе (резонаторе) вид и решение дисперсионного уравнения совпадает с результатами, полученными для бесконечного периодического волновода. Отличие состоит в том, что значения компонент напряженности электрического поля удваиваются. Поэтому анализ (вычисление мажоранты бесконечного определителя) можно проводить на основе подхода, разработанного для бесконечного волновода. Наличие гофра в плазменном волноводе приводит к появлению полос непрозрачности. Ширина полос непрозрачности пропорциональна глубине гофра, возведенной в степень, обратную показателю кратности точки пересечения. Количество таких полос непрозрачности бесконечно, а суммарная ширина запрещенной зоны равна (под запрещенной зоной понимаем такие значения волнового числа и частоты, при которых невозможно прохождение волн в волноводе)
$$\frac{\Omega_s}{\omega_0} = \frac{2\omega/\omega_0}{1 - 2\Delta\omega/\omega_0}.$$

Спектр собственных волновых чисел в резонаторе является дискретным. Разрешенные длины волн кратны длине резонатора. В пределе (бесконечный волновод) спектр становится непрерывным, т.е. любая конечная окрестность произвольной точки на плоскости (h, ω) содержит точки спектра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балакирев В.А., Карбушев Н.И., Островский А.О., Ткач Ю.В. Теория черенковских усилителей и генераторов на релятивистских пучках. -К: Наук. Думка, 1993.- 207 с.
2. Кузнецов Н.Г. Специальные функции.- М.: Наука, 1966.- 324 с.
3. Марков П.И., Онищенко И.Н., Сотников Г.В., Файнберг Я.Б. Электродинамика гофрированного плазменного волновода // Физика плазмы.- 1993.- Т.19.- №1.- С. 14- 26.
4. Lapshyn V.I., Stoyanov A.F., Tkachenko V.I., Tkachenko I.V. Fractal properties of dispersion characteristics of sinusoidally rippled plasma waveguides // Problems of Atomic science and technology. Series: Plasma Physics (10).- 2005.- №1.- P. 137- 140.
5. Lapshyn V.I., Stoyanov A.F., Tkachenko V.I., Tkachenko I.V. Calculation of dispersion characteristics of planar rippled plasma-filled waveguide // Eureka-2004, Proc. of International Young Scientist Conference on Theoretical and Experimental Physics, 19–21 May 2004.- Lvov.-P. 62.
6. Lapshyn V.I., Stoyanov A.F., Tkachenko V.I., Tkachenko I.V. Fractal properties of dispersion characteristics of sinusoidally rippled plasma waveguide, 10 Міжнародна конференція- школа по фізиці плазми і керуваному термоядерному синтезу, Алушта (Крим), Україна.- 2004, – P. 149.
7. Lapshyn V.I., Tkachenko I.V., Tkachenko V.I. Peculiarities of E-waves Propagation in Rippled Plasma Waveguides, Problems of Atomic Science and Technology. Ser. Plasma Physics (9).-2003.-№1.- P. 89-91.
8. Zaginailov G.I., Grudiev Alexeu, Shunemann Klaus Hydrodynamic eigenmodes of periodic magnetized plasma waveguides// Transworld Research Network 37/661 (2), Fort P.O., Trivandrum- 695 023, Kerala, India.
9. Lou W.R., Carmel Y., Antonsen T.M. Jr., Destler W.W., Grandstein V.L. New modes in plasma with periodic boundaries: The origin of the dense spectrum // Phys. Rev. Lett. – 1991.- V.67.- №18.- P. 2481-2484.

DISPERSIVE RATIO FOR THE RESONATOR WITH SINUSOIDALLY RIPPLED METAL WALLS, FILLED WITH COLD PLASMA

V.I. Lapshyn, A.F. Stoyanov, I.V. Tkachenko

National science center "Kharkiv Institute of Physics and Technology", Kharkov, Akademicheskaya street, 1, Ukraine

Electromagnetic waves extending in the limited periodic resonator, filled are described by cold plasma are described. Decisions of Maxwell's equations a for the plasma resonator, taking into account boundary conditions on vertical and goffered ideally conducting walls are found. It is shown, that the decision of Maxwell's equations and dispersive ratio are similar to the results received for an infinite periodic wave guide with one difference, that for longitudinal wave numbers the spectrum of own values is discrete. The amount of allowed values corresponds to amount of lengths of the periods, stacked on length of the resonator.

KEY WORDS: plasma, a wave guide, the resonator, metal, the period