

УДК 539.171

ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ОТКЛИКА ЯДЕР ^2H И ^4He СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ

А.Ю. Буки, И.А. Ненько, Н.Г. Шевченко, И.С. Тимченко

ННЦ «Харьковский физико-технический институт», 61108, Украина, г. Харьков, ул. Академическая 1

E-mail: abuki@ukr.net

Поступила в редакцию 10 июня 2005 г.

Для решения задачи экспериментального определения моментов функций отклика ядер необходимо экстраполировать функцию отклика в область больших переданных энергий, где невозможно проведение измерений. Настоящая работа посвящена исследованию вопроса экстраполяции функции отклика посредством степенной функции. Для этого использованы данные измерений на ядрах ^2H и ^4He при переданных импульсах $0,9 \div 1,5 \text{ фм}^{-1}$. Найденные значения показателя степени экстраполяционной функции сравниваются с результатами теоретических расчётов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: атомные ядра, рассеяние электронов, функции отклика, экстраполяция, степенная функция.

Важным направлением ядерно-физических исследований является изучение моментов функций отклика (см. например обзор [1]), которые имеют вид

$$S_{\text{T/L}}^{(k)}(q) = \int_0^{\infty} R_{\text{T/L}}(q, \omega) \omega^k d\omega, \quad (1)$$

где k – номер момента, q и ω – переданные ядру 3-импульс и энергия в системе центра инерции, соответственно, $R_{\text{T/L}}(q, \omega)$ – поперечная (Т) или продольная (L) функция отклика (здесь R -функции в представлении работы [1]). В случае $q = \text{const}$, функции отклика по переменной ω имеют вид как на рис. 1а – асимметричного пика с монотонно убывающим в сторону больших переданных энергий “хвостом” (далее без кавычек).

Экспериментальные значения поперечной и продольной функций отклика обычно охватывают (80 ÷ 90)% площади под этими функциями, а верхняя граница их измерений по переданной энергии около $\omega = 0,5q$. Из этого следует, что для экспериментальной проверки расчётов $S_{\text{T/L}}^{(k)}(q)$ требуются экстраполяции функций $R_{\text{T/L}}(q, \omega)$ в область больших переданных энергий, где невозможны непосредственные измерения. От этой экстраполяции зависит как точность получаемых из эксперимента моментов $S_{\text{T/L}}^{(k)}(q)$, так и значение максимального номера момента k_{max} , при котором интеграл (1) имеет конечное значение. Значимость решения задачи экстраполяции определена в работе [1] (стр. 275) как вопрос, без ответа на который правила сумм рискуют остаться представляющими только академический интерес.

В экспериментальных работах по исследованию моментов $S_{\text{T/L}}^{(k)}(q)$ (см. [2, 3, 4]), как правило, используются функции экстраполяции вида

$$R^{\text{t},\beta}(q, \omega) = C^{\beta}(q) e^{-\beta\omega}, \quad (2)$$

$$R^{\text{t},\alpha}(q, \omega) = C^{\alpha}(q) \omega^{-\alpha}. \quad (3)$$

В случае $q = \text{const}$, что является условием при определении моментов $S_{\text{T/L}}^{(k)}(q)$, величины $C^{\beta}(q)$, $C^{\alpha}(q)$, α и β могут рассматриваться как параметры подгонки R^{t} -функции к экспериментальным данным.

Функция (2), насколько нам известно, является эмпирической. Функция (3), которая будет рассматриваться в настоящей работе, предложена в теоретических работах [1, 5]. Её расчёт выполнен на основе потенциала Рейда с мягким кором для ^2H ($\alpha = 3 \div 4$) [1] и для более тяжелых ядер ($\alpha = 2,5$) [5]. Согласно этим работам значение параметра α не зависит от величины переданного импульса.

В экспериментальных работах по функциям отклика проблема R^{t} -функций освещена мало. Так, из опубликованных данных известно только два значения параметра α , которые получены из эксперимента: найденное В.Д. Эфросом [6] по измерениям работы [7] для ядра ^3He при $q = 1,5 \text{ фм}^{-1}$ ($\alpha_{\text{L}} = 3,9 \div 4,1$) и в работе [8] для ядра ^2H при $q = 1,05 \text{ фм}^{-1}$ ($\alpha_{\text{T/L}} = 2,9$).

В настоящей работе мы исследуем проблему адекватности степенной функции экспериментальным данным в районе хвоста R -функций ядер ^2H и ^4He , находим значения параметра α , рассматриваем применение полученных результатов к проблеме экспериментальных моментов функций отклика ядер.

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ

Задача определения адекватности R^{t} -функции экспериментальным значениям $R_{\text{T/L}}(q, \omega)$ основывается на подгонке её к этим данным в том диапазоне ω , который относится к измеренной части хвоста функции отклика

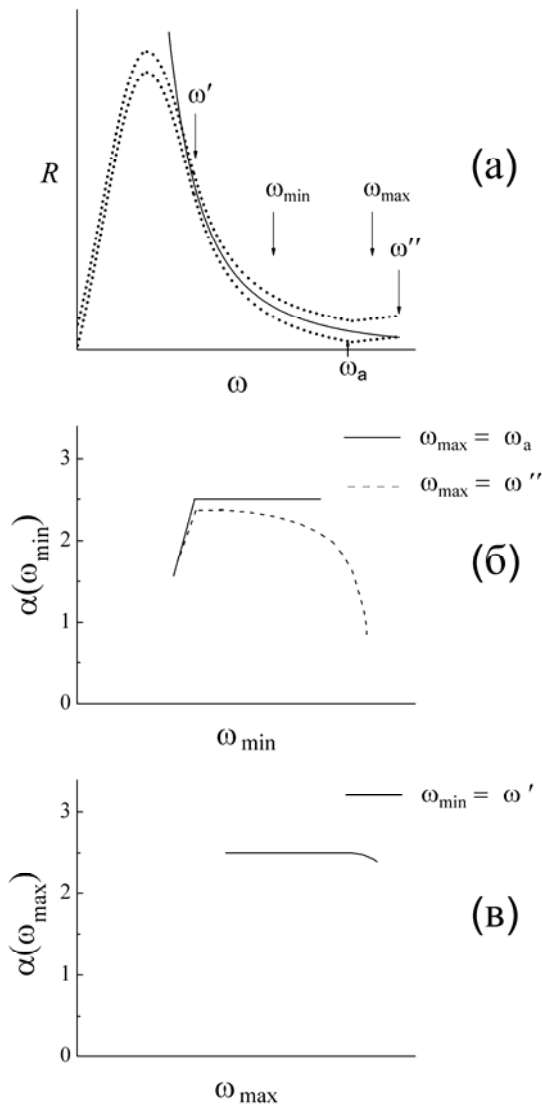


Рис. 1. Методика определения адекватности R^t -функции экспериментальным данным.

(а) схематическое изображение функции отклика. Пунктирными линиями показан коридор экспериментальных данных, сплошной линией – R^t -функция; ω' - граница хвоста, ω'' - верхняя граница измеренных данных, $\omega' \div \omega_a$ - диапазон адекватности R^t -функции экспериментальным данным, $\omega_{min} \div \omega_{max}$ - область подгонки R^t -функции.

(б) зависимость $\alpha(\omega_{min})$ при различных фиксированных значениях ω_{max} .

(в) зависимость $\alpha(\omega_{max})$ при фиксированном значении ω_{min} .

(на рис. 1а данные при $\omega > \omega'$, где ω' – граница области хвоста). При этом ориентация на величину значения минимального χ^2 является необходимым, но недостаточным условием. Так как R^t -функция должна аппроксимировать весь хвост функции отклика, то можно потребовать, чтобы получаемые из подгонки значения варьируемых параметров не зависели от выбора диапазона ω , данные из которого участвуют в подгонке (данные из области $\omega > \omega'$). Будем рассматривать это требование как критерий адекватности аналитической функции экспериментальным данным.

Для того чтобы подгонка R^t -функции дала не слишком большую ошибку варьируемого параметра, диапазон переданных энергий, в котором находятся участвующие в подгонке данные, и их количество должны быть достаточно велики. Таким образом, возникает задача определения необходимых для каждой из подгонок количества данных, диапазона этих данных по ω , а так же вопрос о границе области, откуда эти данные выбираются, то есть о значении ω' .

Одним из удобных для дальнейшего анализа решений является следующий подход. Пусть ω_{min} – нижняя граница диапазона данных используемых в подгонке и ω_{max} – его верхняя граница, а вся область измеренного хвоста функции отклика $\omega' \div \omega''$, где ω'' – максимальная переданная энергия, при которой получены данные (см. рис. 1а). Возьмем в качестве ω_{max} значение близкое к ω'' и зафиксируем его. Далее проведём ряд подгонок в диапазонах ограниченных этим ω_{max} и различными ω_{min} . Таким образом, найдём значения варьируемого параметра α , соответствующих минимальным χ^2 , и получим зависимость $\alpha(\omega_{min})$ (сплошная линия на рис. 1б). Теперь предложенный критерий адекватности R^t -функции экспериментальным данным можно представить как требование постоянства в пределах $\pm \Delta \alpha_i(\omega_{min})$ значений $\alpha_i(\omega_{min})$ при $\omega_{min} > \omega'$. Отметим, что если плато в функции $\alpha_i(\omega_{min})$ наблюдается, то его край со стороны малых ω определяет значение величины ω' .

При исследовании R^t -зависимости следует учитывать возможность присутствия в экспериментальных значениях $R_{T/L}$ неучтённых систематических ошибок. Наиболее существенной из возможных систематических ошибок может быть та, что связана с вычитанием фона из спектра рассеянных электронов. Эта ошибка проявляется в области хвостов функций отклика как величина постоянная или как нарастающая со значением ω .

Оценим влияние этой ошибки на величину параметра α . Для этого рассмотрим два экспериментальных значения функции отклика: $R(\omega_1)$ и $R(\omega_2)$ при $q = const$. Согласно выпр.(3) $R(\omega_1) = C^\alpha(q) \omega_1^{-\alpha}$ и $R(\omega_2) = C^\alpha(q) \omega_2^{-\alpha}$. Разделив первое равенство на второе и прологарифмировав отношения, найдём

$$\alpha = \frac{1}{\ln \omega_2 - \ln \omega_1} \ln \frac{R(\omega_1)}{R(\omega_2)}. \tag{4}$$

Пусть в обоих значениях функции отклика имеется одинаковая ошибка Δ . Подставив в уравнение (4) вместо $R(\omega_1)$ и $R(\omega_2)$ величины $R(\omega_1) + \Delta$ и $R(\omega_2) + \Delta$, соответственно, не трудно получить

$$\alpha + d\alpha = \frac{1}{\ln \omega_2 - \ln \omega_1} \left[\ln \frac{R(\omega_1)}{R(\omega_2)} + \ln \frac{1 + \Delta/R(\omega_1)}{1 + \Delta/R(\omega_2)} \right]. \tag{5}$$

Примем $\omega_1 = \omega'$ и $\omega_2 = \omega''$. Так как в реальных данных $R(\omega') \gg R(\omega'')$, то из уравнений (4) и (5) следует

$$d\alpha \approx \frac{1}{\ln \omega'' - \ln \omega'} \text{Chn} \frac{1}{1 + \Delta/R(\omega'')} \quad (6)$$

Уравнение (6) показывает, что возможная ошибка параметра, связанная с вычитанием фона, определяется значениями $R(\omega)$ из окрестности ω'' . Роль этой ошибки меньше при подгонке к данным из широкого диапазона ω , где среднее значение $\Delta/R(\omega)$ не велико, однако в этом случае плато $\alpha_i(\omega_{\min})$ может быть выражено хуже (штриховая линия на рис.1б). Заметим, что если есть рассмотренные выше ошибки измерений, то наш подход позволяет, по крайней мере, определить границу области хвоста – значение ω' .

Если предложенный подход не показывает плато, то следующим этапом анализа является построение зависимости $\alpha_i(\omega_{\max})$ при фиксированном $\omega_{\min} = \omega'$, где значение ω' уже найдено (рис.1в). В этом случае на большей части области подгонки не проявляется влияние величины $\Delta/R(\omega)$ (на рис.1в интервал $\omega' \div \omega_a$). Когда же $\omega_{\max} > \omega_a$, то вклад данных из области $\omega > \omega_a$ относительно не велик по сравнению с вкладом из $\omega' \div \omega_a$ и отклонение значений параметра $\alpha(\omega_{\max})$ от плато менее значительно, чем в зависимости $\alpha(\omega_{\min})$.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРА α

В настоящей работе для исследования R^1 -функции используются поперечная и продольная функции отклика ядер ^2H и ^4He , которые были получены из измерений на ускорителе электронов ЛУЭ-300 ХФТИ (описание

эксперимента и обработки данных приведены в [4]), и экспериментальные $R_{\text{T/L}}$ -функции ^4He работ [2,3]. Следуя изложенной выше методике, найдены зависимости $\alpha_{\text{T/L}}(\omega_{\min})$ и $\alpha_{\text{T/L}}(\omega_{\max})$ для функций отклика при $q = 0,88 \div 1,52 \text{ фм}^{-1}$ (данные при $q = 1,52 \text{ фм}^{-1}$ получены в Bates [2] и Saclay [3]).

На рис.2 показана R_{L} -функция ядра ^2H при $q = 1,05 \text{ фм}^{-1}$ и соответствующая ей зависимость $\alpha(\omega_{\min})$. Это случай, когда, ввиду хорошо наблюдаемого плато в значениях $\alpha_i(\omega_{\min})$, рассмотрение зависимости $\alpha(\omega_{\max})$ излишне. На рис.3 и 4 такого же рода данные и зависимость $\alpha(\omega_{\max})$ для R_{T} -функции ядра ^4He при $q = 1,125 \text{ фм}^{-1}$ и $q = 1,52 \text{ фм}^{-1}$, соответственно. Рис. 2, 3, 4 демонстрируют адекватность степенной функции данным измерений. Подобная адекватность наблюдалась на 10 из 14 использованных в настоящей работе экспериментальных функций отклика. В частности, эта адекватность имела место во всех пяти R_{T} -функциях ядра ^4He . Этот факт, а также то, что в случае каждого из ядер близкие по переданному импульсу $R_{\text{T/L}}$ -функции имеют не подобное друг другу поведение (адекватное степенной функции и неадекватное), могло бы казаться удивительным. Однако исследуемая адекватность не наблюдалась именно в тех случаях, когда экспериментальные функции отклика имели большой разброс значений, в отличие от поведения данных, где адекватность наблюдалась.

Было замечено, что в тех случаях, когда наблюдалась адекватность степенной функции к данным, граница хвоста (ω') приходится на полувысоту пика функции отклика или несколько выше ($R(\omega') \geq \frac{1}{2} \max(R)$). Исходя из этого, для случаев данных с большим разбросом значений были применены подгонки в широком диапазоне переданных энергий, где этот разброс должен в значительной мере нивелироваться. А именно, от значения ω , соответствующего полувысоте пика $R(\omega)$, до верхней границы измерений по переданной энергии (ω''). Найденные таким образом значения параметра α оказались близки к значениям, полученным

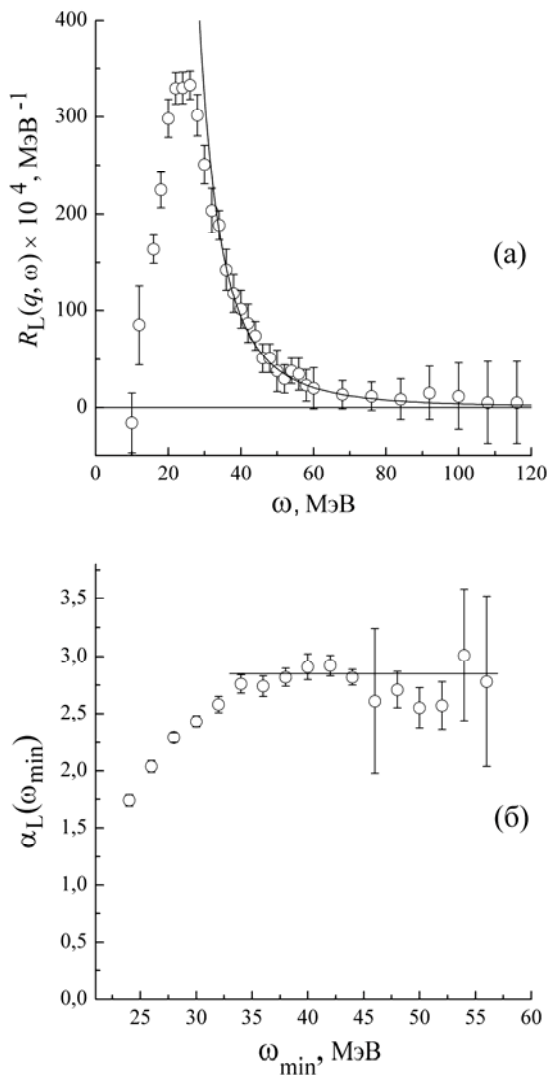
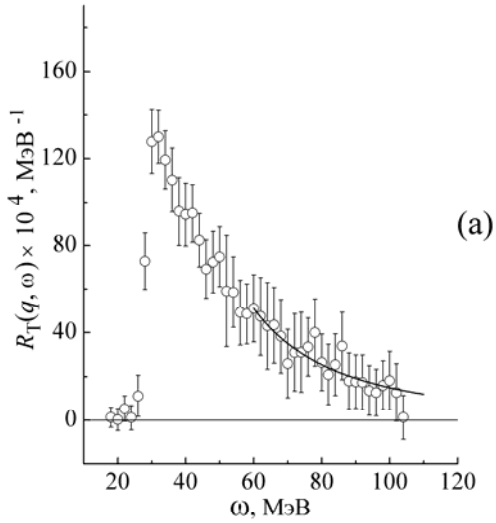


Рис.2. Определение значения α_{L} для ядра ^2H при $q = 1,05 \text{ фм}^{-1}$.

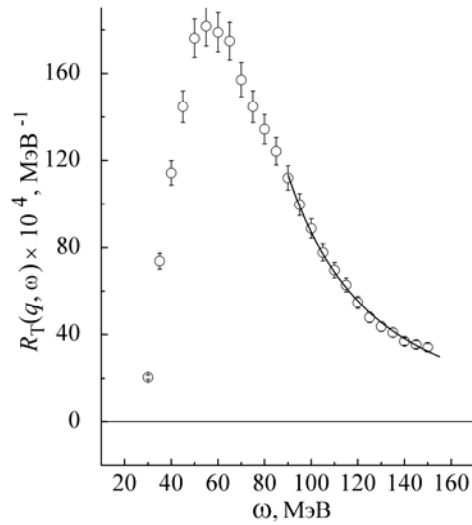
(а) R_{L} -данные, кривая – степенная функция.

(б) параметр α_{L} как функция ω_{\min} , прямая – плато функции.

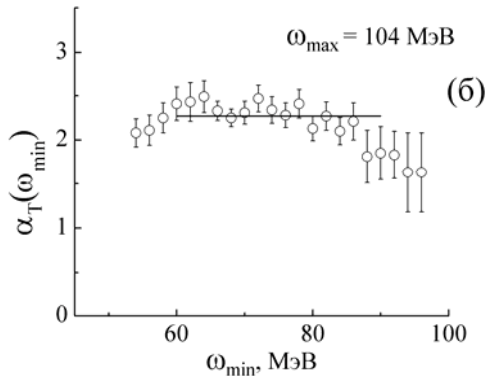
в случаях адекватности степенной функции экспериментальным R -функциям. Этот результат можно считать подтверждением правильности методики, использованной в анализе менее качественных данных.



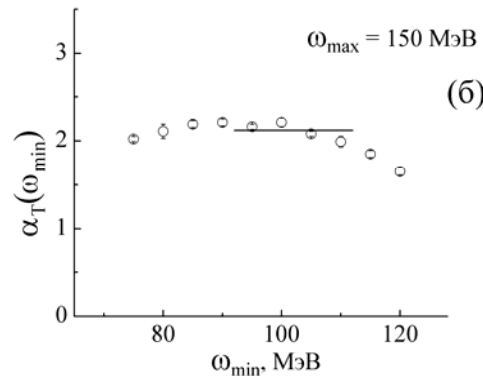
(а)



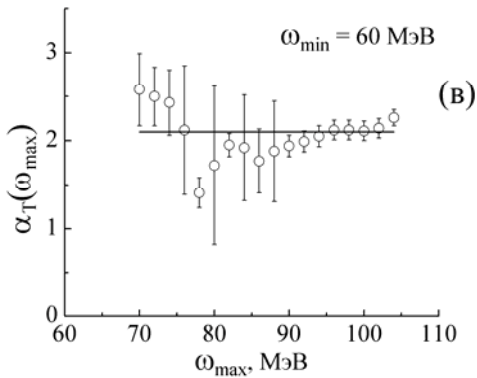
(а)



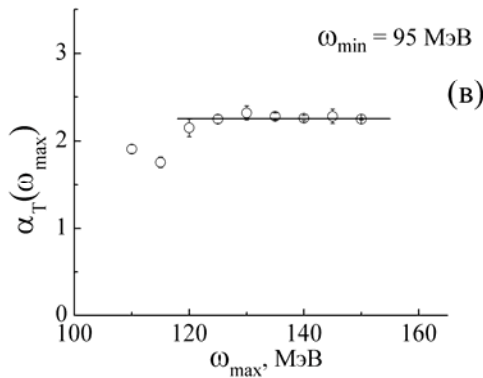
(б)



(б)



(в)



(в)

Рис. 3. Определение значения α_T для ядра ${}^4\text{He}$ при $q = 1,125 \text{ фм}^{-1}$.

- (а) R_T -данные, кривая – степенная функция.
- (б) параметр α_T как функция ω_{\min} , прямая – плато функции.
- (в) параметр α_T как функция ω_{\max} , прямая – плато функции.

Рис. 4. Определение значения α_T для ядра ${}^4\text{He}$ при $q = 1,52 \text{ фм}^{-1}$.

- (а) R_T -данные из работы [3], кривая – степенная функция.
- (б) параметр α_T как функция ω_{\min} , прямая – плато функции.
- (в) параметр α_T как функция ω_{\max} , прямая – плато функции.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученные значения параметров $\alpha_{T/L}$ представлены на рис.5: (а) – значения из $R_{T/L}$ -функций, которым степенная функция адекватна; (б) – значения из всех использованных $R_{T/L}$ -функций. На этом рисунке значения параметров $\alpha_{T/L}$, полученные по данным лаборатории Bates, приведены в виде $\alpha = (\alpha_T + \alpha_L)/2$. Это связано со следующим. Как в случае ${}^2\text{H}$, так и ${}^4\text{He}$ при одинаковых переданных импульсах значения α_T и α_L близки. Такая же

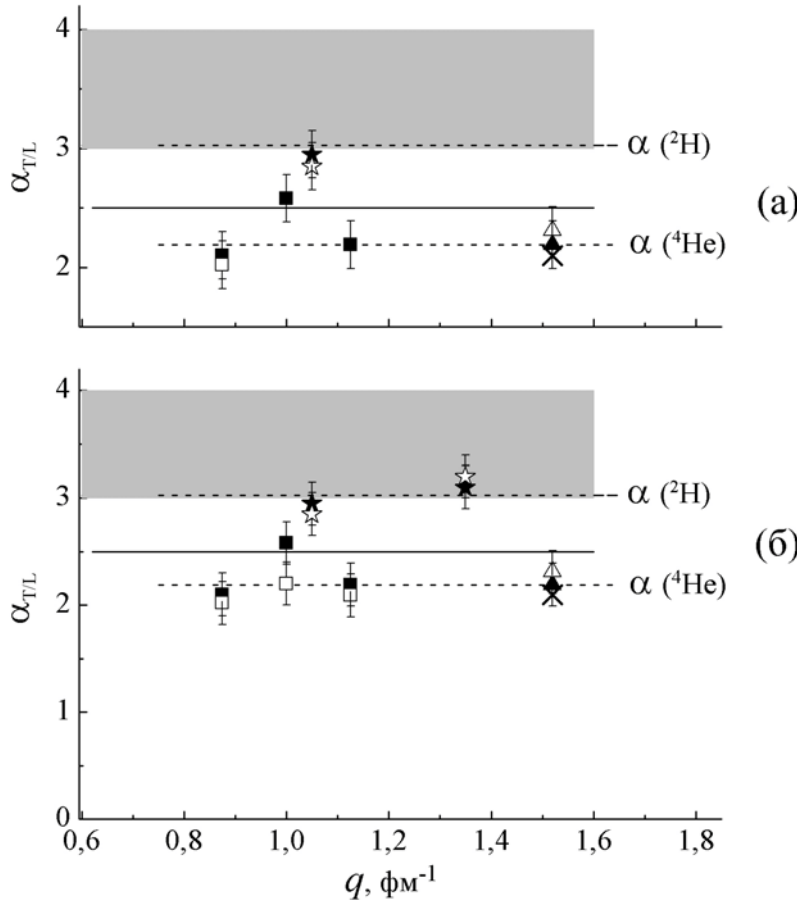


Рис. 5. Параметры α для продольных (открытые символы) и поперечных (закрытые символы) функций отклика.

(а) – значения α из $R_{T/L}$ -функций, которым степенная функция адекватна.

(б) – значения α из всех использованных $R_{T/L}$ -функций.

☆ и □ – α для ядер ^2H и ^4He , соответственно, полученные из наших данных;

△ – α для ядра ^4He из обработки данных Saclay [3];

× – $\alpha = (\alpha_T + \alpha_L)/2$ для ядра ^4He из обработки данных Bates [2];

..... – средние значения $\alpha_{T/L}$ для ^2H и для ^4He ;

— – расчет α работы [5];

■ – расчет α (случай ^2H) работы [1].

ситуация имеет место для α_T и α_L из данных Saclay, которые дублируют измерения Bates. Из этой систематики выпадают *только* значения α , полученные из данных Bates: $\alpha_T = 1,46$ и $\alpha_L = 2,70$. Возможно, сечения измеренные в Bates несколько искажены в области хвоста, а так как в процедуре разделения R -функций, значения R_T и R_L компонентов не независимы друг от друга, то занижение одной из них вызывает завышение другой. Поэтому мы рассматриваем результаты обработки данных Bates как вспомогательный материал, а значение α из этих данных берем как среднее α_T и α_L .

Из рис.5 видно, что значения α , с точностью до статистического разброса, одинаковы для каждого из рассмотренных ядер. Проведенное усреднение параметров α (не включающее α из данных Bates) показывает:

$$\alpha = 3,03 \pm 0,15 \text{ для } ^2\text{H};$$

$$\alpha = 2,19 \pm 0,10 \text{ для } ^4\text{He}.$$

Рассмотрим, как найденные значения и погрешности параметра α проявляются в проблеме экспериментального момента функции отклика: погрешность $S^{(k)}$ и значение k_{\max} .

Погрешности значений α отражаются на точности значения той части интеграла (обозначим её $S^{t,(k)}$), где подынтегральной функцией является функция экстраполяции. Относительную погрешность величины $S^{t,(k)}$ не трудно представить функцией от $\delta\alpha$ – относительной погрешности параметра α

$$\delta S^{t,(k)} = \frac{-\delta\alpha}{1 - \frac{k+1}{\alpha} + \delta\alpha}. \quad (7)$$

В качестве примера, используя формулу (7) для случая ^4He и $k = 0$ находим, что $\delta S^{t,(0)} = 0,07$. Так как обычно точность нормировочного коэффициента $C^\alpha(q)$ из выр.(3) около 10%, то полное значение $\delta S^{t,(0)} \leq 0,13$. Как отмечалось во введении, $\delta S^{t,(0)}$ составляет (10 ÷ 20)% от $S^{(0)}$. Отсюда связанная с экстраполяцией погрешность в значении нулевого момента около 2%. Заметим, что такая погрешность не значительна по сравнению с погрешностью в непосредственно измеряемой части нулевого момента, величина которой (6 ÷ 15)%.

Как не трудно видеть, использование для экстраполяции R -функции *степенной функции* ограничивает номер момента, который имеет конечное значение [8]

$$k_{\max} = \begin{cases} \text{ent}(\alpha) - 1 & \text{если } \alpha \neq \text{ent}(\alpha) \\ \alpha - 2 & \text{если } \alpha = \text{ent}(\alpha) \end{cases}, \quad (8)$$

где $\text{ent}(\alpha)$ – целая часть значения α . Полученным α , согласно выр.(8), соответствует $k_{\max} = 1$. Это весьма интересный результат, так как в ряде теоретических работ (см. например [1, 9, 10]) моменты функций отклика рас-

считываются для k равного 2 и 3. Отметим, что указанное противоречие следует не только из найденных в настоящей работе экспериментальных значений α , но и из расчётов этого параметра в работах [1, 5], где $\alpha \leq 3$.

ВЫВОДЫ

Эксперимент показывает, что:

1. $\alpha_T \approx \alpha_L$ для рассмотренных ядер;
2. α_{TL} каждого из ядер в исследуемом диапазоне переданных импульсов постоянны;
3. значения α_{TL} ядер ${}^2\text{H}$ и ${}^4\text{He}$ различны.

Экспериментальные результаты (1) и (2) не противоречат выводам теоретических работ [1,5]. Рассчитанное в работе [1] значение параметра α для ${}^2\text{H}$, согласуется с экспериментальным, а найденное значение α для ${}^4\text{He}$ довольно близко к рассчитанному в [5].

В заключение надо сказать, что, согласно работе [5], величина α мало изменяется вплоть до среднетяжёлых ядер, поэтому найденное для ${}^4\text{He}$ значение этого параметра могло бы быть использовано в определении экспериментальных значений $S_{TL}^{(k)}(q)$ всех этих ядер. Однако нам представляется, что проблема экстраполяции функций отклика требует дальнейшего исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Orlandini G. and Traini M. Sum rules for electron-nucleus scattering // Rep. Prog. Phys. – 1991. – V.54. – P.257-338.
2. von Reden K.F., Alcorn C., Dytman S.A. et. al. Quasielastic electron scattering and Coulomb sum rule in ${}^4\text{He}$ // Phys. Rev. – 1990. – V.C41. – №3. – P.1084-1094.
3. Zghiche A., Danelet J.F., Bernheim M. et al. Longitudinal and transverse responses in quasi-elastic electron scattering from ${}^{208}\text{Pb}$ and ${}^4\text{He}$ // Nucl. Phys. – 1994. – V.A572. – P.513-559.
4. Буки А.Ю., Шевченко Н.Г., Ненько И.А. и др. Моменты функций отклика ядра ${}^2\text{H}$ при $q = 1,05 \text{ Фм}^{-1}$ // Ядерная физика. – 2002. – Т.65. – №5. – С.787-796.
5. Tornow V., Orlandini G., Traini M. et. al. A study of electronuclear sum rules in light and medium-weight nuclei // Nucl. Phys. – 1980. – V.A348. – №2. – P.157-178.
6. Buki A.Yu., Efros V.D., Shevchenko N.G. et al. Electronuclear transversal sum rule in ${}^4\text{He}$ at moderate transfer momenta and high- ω extrapolation of response functions. – Moscow, 1991. – 17p. – (Preprint / I.V. Kurchatov Institute of Atomic Energy.: IAE-5397/2).
7. Marschand C., Barreau P., Bernheim M. et. al. Transverse and longitudinal response functions in deep inelastic electron scattering from ${}^3\text{He}$ // Phys. Lett. – 1985. – V.B153. – P.29-32.
8. Buki A.Yu., Nenko I.A. Response Functions Extrapolation of ${}^2\text{H}$ Nucleus in the Region of High Transfer Energy // Вop. атом. науки и тех. Сер.: яд.-физ. исслед. Харьков. – 2000. – Т.2(36). – С.13-15.
9. Эфрос В.Д. Правила сумм в рассеянии электронов на ядрах // Ядерная физика. – 1973. – Т.18. – С.1184-1203.
10. Shiavilla R., Pandharipande V.R., Fabrocini A. Coulomb sum rule of $A = 2, 3$, and 4 nuclei // Phys. Rev. – 1989. – V.C40. – №3. – P.1484-1490.

POWER EXTRAPOLATION OF EXPERIMENTAL RESPONSE FUNCTIONS OF ${}^2\text{H}$ AND ${}^4\text{He}$ NUCLEI

A.Yu. Buki, I.A. Nenko, N.G. Shevchenko, I.S. Timchenko
National Science Center “Kharkov Institute of Physics and Technology”,
1 Akademicheskaya St., 61108 Kharkov, Ukraine
E-mail: abuki@ukr.net

To solve the problem of determining experimentally the moments of nuclear response functions, it is essential to extrapolate these functions to the region of high energy transfers, where the measurements are impossible. The present paper is concerned with the extrapolation of the response function through the use of the power function. For the purpose, the measured data on the ${}^2\text{H}$ and ${}^4\text{He}$ nuclei at momentum transfers between 0.9 and 1.5 fm^{-1} were used. The derived exponent values of the extrapolation function are compared with the results of theoretical calculations.

KEY WORDS: atomic nuclei, electron scattering, response functions, extrapolation, power function.