УДК 517.968

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ТМ ВОЛН КОАКСИАЛЬНОГО ГИРОТРОНА С ГОФРИРОВАННОЙ ВСТАВКОЙ

А.С. Кононенко
Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл.Свободы, 4, 61077, Харьков, Украина
e-mail: alex@univer.kharkov.ua
Поступила в редакцию 18 октября 2005г.

Рассматривается коаксиальный гиротрон с гофрированной внутренней вставкой. Построена строгая математическая модель для такого волновода в случае ТМ волн. На ее базе с помощью метода дискретных особенностей строится соответствующая дискретная математическая модель. Разработан программный комплекс, позволяющий выполнять спектральный анализ коаксиального гиротрона в случае ТМ мод. Приводятся результаты численных исследований и анализируется их достоверность.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: коаксиальный гиротрон, метод дискретных особенностей, ТМ волны в гиротроне.

Разработка высокомощных источников миллиметровых волн является важной частью сегодняшних исследований в области термоядерного синтеза. В частности, коаксиальные гиротроны с гофрированной вставкой [1] широко используются в качестве генераторов для высокочастотного нагрева плазмы. Разработка и производство гиротронов высокой мощности требует наличия математической модели и численных расчетов для волн ТМ типа.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается коаксиальный гиротрон с гофрами, поперечное сечение которого изображено на рис.1.

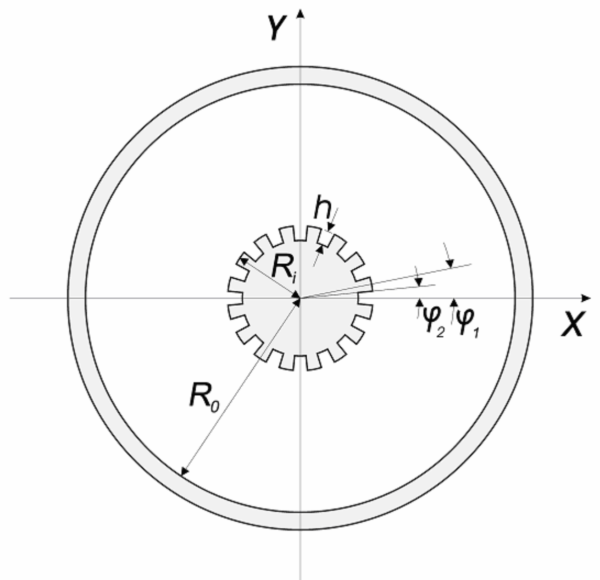

Рис. 1. Поперечное сечение коаксиального гиротрона с гофрированной вставкой.

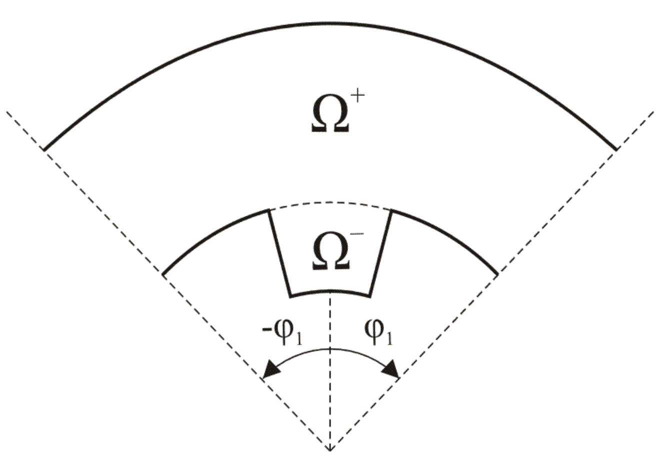

Рис. 2. Зубец коаксиального гиротрона с гофрированной вставкой.

Строгая математическая модель коаксиального гиротрона для случая ТЕ волн была построена на базе сингулярных интегральных уравнений в работе [2]. В настоящий момент разрабатываются более мощные релятивистские гиротроны, что приводит к необходимости изучить и ТМ волны в такой структуре, т.к. собственные волны релятивистских электронных потоков представляются в виде суперпозиции ТЕ и ТМ волн (см., например, [3 с. 120]). Рассматривается случай, когда в рабочей зоне и гофрах резонатора - вакуум.

Изучение электромагнитного поля в поперечном сечении гиротрона сводится к изучению поля в одном зубце гофрированной вставки, который изображен на рис.2.

Для волн ТМ типа электрическое и магнитное поля представляются в виде: $\vec{E}=(E_x,E_y,E_z)$, $\vec{H}=(H_x,H_y,0)$. Зависимость от времени и координаты вдоль оси волновода задается множителем $e^{i(\Gamma z-\omega t)}$, где Γ-постоянная распространения, а ω - круговая частота. В дальнейшем условимся опускать этот множитель.

Известно (см., например, [4]), что в этом случае все компоненты электромагнитного поля выражаются через компоненту E_z вектора напряженности электрического поля, которая в свою очередь удовлетворяет однородным уравнениям Гельмгольца в соответствующих областях Ω^+ и Ω^-:

$$\Delta E_z^{\pm}(x,y)+(\varepsilon\,\mu\,\omega^2-\Gamma^2)\,E_z^{\pm}(x,y)=0\ , \tag{1}$$

а также условию Дирихле

$$E_z^{\pm}(x,y)=0 \tag{2}$$

на идеально проводящих стенках гиротрона, т.е. граничному условию на металле. Введя полярные координаты в поперечном сечении волновода, представим функции $E_z^{\pm}(r,\varphi)$ в виде суммы мод:

$$E_z^{\pm}(r,\varphi)=\sum_{m=0}^{N-1}u_m^{\pm}(r,\varphi), \tag{3}$$

где N – число гофров гиротрона, а функции $u_m^{\pm}(r,\varphi)$ удовлетворяют следующему условию квазипериодичности:

$$u_m^{\pm}\left(r,\varphi+2\pi/N\right)=e^{im\frac{2\pi}{N}\varphi}u_m^{\pm}\left(r,\varphi\right), \tag{4}$$

которое определяет фазовый сдвиг между периодами гофрировки. При этом, из (1-2) следует, что функции $u_m^{\pm}\left(r,\varphi\right)$ должны удовлетворять двумерным уравнениям Гельмгольца в соответствующих областях Ω^+ и Ω^-:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_m^{\pm}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_m^{\pm}}{\partial\varphi^2}+\left(\frac{\chi_m}{R_0}\right)^2u_m^{\pm}=0, \tag{5}$$

а также следующим граничным условиям:

$$u_m^{+}(R_0,\varphi)=0,\ \varphi\in[-\varphi_1,\varphi_1], \tag{6}$$

$$u_m^{+}(R_i,\varphi)=0,\ \varphi\in[-\varphi_1,\varphi_2]\cup[-\varphi_2,\varphi_1], \tag{7}$$

$$u_m^{-}(R_i-h,\varphi)=0,\ \varphi\in[-\varphi_2,\varphi_2]\ , \tag{8}$$

$$u_m^{-}(r,-\varphi_2)=u_m^{-}(r,\varphi_2)=0,\ r\in[R_i-h,R_i]\ , \tag{9}$$

здесь $\chi_m=R_O\sqrt{\omega^2\varepsilon\ \mu-\Gamma_m^2}$ - безразмерное поперечное волновое число. Граница внутренней области гиротрона содержит ребра, поэтому необходимо потребовать выполнения условия Майкснера, конечности энергии в этой области, которое запишем в интегральной форме:

$$\iint_{\Omega}\left[\left|u_m\right|^2+\left\langle grad\,u_m,grad\,\bar{u}_m\right\rangle\right]ds<\infty, \tag{10}$$

где

$$u_m(r,\varphi)=\begin{cases}u_m^{+}(r,\varphi),\ (r,\varphi)\in\Omega^+\\ u_m^{-}(r,\varphi),\ (r,\varphi)\in\Omega^-.\end{cases} \tag{11}$$

Таким образом, спектральную задачу для коаксиального гиротрона с гофрированным внутренним проводником в случае ТМ волн и при заданных параметрах волноводной структуры, можно сформулировать следующим образом: для каждого $m=0,...,N-1$ найти значения χ_m, для которых существует нетривиальное решение $u_m(r,\varphi)$ вида (11) задачи (5-10), а также сами эти нетривиальные решения, т.е. нахождение поперечных волновых чисел собственных ТМ мод.

ВЫВОД ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ

Функции $u_m^{\pm}(r,\varphi)$ могут быть представлены следующим образом в соответствующих областях Ω^+ и Ω^-:

$$u_m^{+}(r,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_{mn}\Phi_{m+nN}(\chi_m,\chi_m\frac{R_i}{R_0},\chi_m\frac{r}{R_0})e^{i(m+nN)\varphi},\ (r,\varphi)\in\Omega^+, \tag{12}$$

$$u_m^{-}(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\Phi_{\xi_n}(\chi_m\frac{(R_i-h)}{R_0},\chi_m\frac{R_i}{R_0},\chi_m\frac{r}{R_0})\sin\xi_n(\varphi+\varphi_2),\ \ (r,\varphi)\in\Omega^-, \tag{13}$$

где $\xi_n=\dfrac{n\pi}{2\varphi_2}$, A_{mn},B_{mn} - неизвестные коэффициенты, а $\Phi_\nu(a,b,c)=\dfrac{J_\nu(a)Y_\nu(c)-Y_\nu(a)J_\nu(c)}{J_\nu(a)Y_\nu(b)-Y_\nu(a)J_\nu(b)}$.

Эти представления удовлетворяют уравнению Гельмгольца (5) и граничным условиям (6), (8) и (9). Введем новую неизвестную функцию, через которую выражаются все неизвестные коэффициенты, а, следовательно, и поля:

$$F_m(\varphi):=u_m^{\pm}(R_i,\varphi). \tag{14}$$

Корректность данного определения обеспечивают условия непрерывности тангенциальной составляющей векторов напряженности электрического и магнитного полей на Σ - общей границе областей Ω^+ и Ω^-. Из этих же условий следует, что производные по r представлений (12) и (13) на Σ равны:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{mn} W_{m+nN}\left(\chi_m, \chi_m \frac{R_i}{R_0}\right) e^{i(m+nN)\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} W_{\xi_n}\left(\chi_m \frac{(R_i-h)}{R_0}, \chi_m \frac{R_i}{R_0}\right) \sin \xi_n(\varphi+\varphi_2),\ \ \varphi\in(-\varphi_2,\varphi_2), \tag{15}$$

где $W_\nu(a,b) = \frac{1}{b}\frac{\partial \Phi_\nu(a,b,c)}{\partial c}\bigg|_{c=b}$. Показано, что имеет место следующая асимптотическая формула при $\nu \to \infty$:

$$W_\nu(a,b) = \operatorname{sgn}(a-b)\left(-\frac{1}{b^2}|\nu| + \frac{1}{2|\nu|} + O\left(\frac{1}{\nu^3}\right)\right), a \neq b. \tag{16}$$

Используя эту асимптотику, а также параметрические представления для сингулярного и гиперсингулярного интегральных операторов, интегрального оператора с логарифмическим ядром [5], соотношение (12) сводится к гиперсингулярному интегральному уравнению для неизвестной функции $F_m(\varphi)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\varphi_2}^{\varphi_2} \frac{F_m(\theta)}{(\varphi-\theta)^2}d\theta + \alpha_1 \int_{-\varphi_2}^{\varphi_2} \frac{F_m(\theta)}{\varphi-\theta}d\theta + \alpha_2 \int_{-\varphi_2}^{\varphi_2} F_m(\theta)\ln|\varphi-\theta|\,d\theta + \alpha_3 \int_{-\varphi_2}^{\varphi_2} K(\varphi,\theta)F_m(\theta)d\theta = 0, \tag{17}$$

где первый интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару, второй в смысле главного значения по Коши, а третий в несобственном смысле. При этом $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ известные коэффициенты, а $K(\varphi,\theta)$ известная гладкая функция, зависящие от поперечного волнового числа.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Дискретная математическая модель строится на базе метода дискретных особенностей [6] следующим образом. С помощью линейной замены перейдем к стандартному интервалу $(-1,1)$. Неизвестную функцию F_m ищем в виде:

$$F_m(\varphi_2 t) = V_m(t)\sqrt{1-t^2},\ t\in(-1,1), \tag{18}$$

что обеспечивает выполнение условия на ребре (10), здесь $V_m(t)$ искомый интерполяционный полином степени n-1 с чебышевскими узлами 2-го рода.

Используя специальные квадратурные формулы интерполяционного типа [5], с узлами, являющимися нулями полиномов Чебышева второго рода, для гиперсингулярного интеграла, интеграла с логарифмическим ядром, а также интеграла с гладким ядром и квадратурную формулу интерполяционного типа для сингулярного интеграла с теми же узлами, получаем систему однородных линейных алгебраических уравнений:

$$A_n(\chi_m)v_n = 0, \tag{19}$$

где v_n - неизвестный вектор столбец. Для того чтобы данная система имела нетривиальные решения необходимо, чтобы $|A_n(\chi_m)| = 0$. Для этого предлагается, используя сингулярное разложение матрицы $A_n(\chi_m)$, искать минимум минимального сингулярного числа $\sigma(\chi_m)$, а затем проверять перемену знака детерминанта матрицы в соответствующей окрестности поперечного волнового числа.

На базе этой дискретной математической модели был разработан программный комплекс для спектрального анализа резонатора коаксиального гиротрона в случае ТМ волн. Он позволяет находить безразмерное поперечное волновое число и рассчитывать компоненты поля, используя в качестве входных данных параметры гофрировки гиротрона, номер моды – m, а также интервал для поиска χ_m.

В частности, был проведен численный спектральный анализ коаксиального гиротрона с гофрированной вставкой работающего на моде $TE_{31,17}$, экспериментально реализованного в Карлсруэ, Германия [7], в случае моды $TM_{31,17}$. Геометрия резонатора данного гиротрона качественно не отличается от изображенной на рис.1. Внутренний проводник имеет 72 гофра, радиус R_i=7,34мм, глубину и ширину канавок h=0,45мм и l=0,45мм, соответственно. Внешний радиус R_O=27,28мм.

Поиск χ_m осуществлялся на интервале [92,5;93,5], что связано с выбором конкретной моды $TM_{31,17}$. На рис.3 показывается зависимость χ_m от количества точек дискретизации.

Как видно из рис.3, предложенный метод дает достаточно быструю сходимость, при этом, не возникает вычислительных трудностей с ростом количества точек дискретизации.

Полученные поперечные волновые числа для других ТМ мод при фиксированном m перемежаются с волновыми числами, посчитанными для случая ТЕ волн в [2]. При этом, расстояние между соседними точками спектра для случая ТМ волн близко к π, также как и для случая без гофрированной вставки, см. рис.4. Данные факты косвенно подтверждают достоверность полученных результатов.

Зная χ_m, находится нетривиальный вектор столбец v_n из уравнения (19). Затем, используя (18), определяется неизвестная функция $F_m(\varphi)$ через которую выражаются все неизвестные коэффициенты A_{mn} и B_{mn}, а, следовательно, по формулам (12) и (13) рассчитываются и собственные поля.

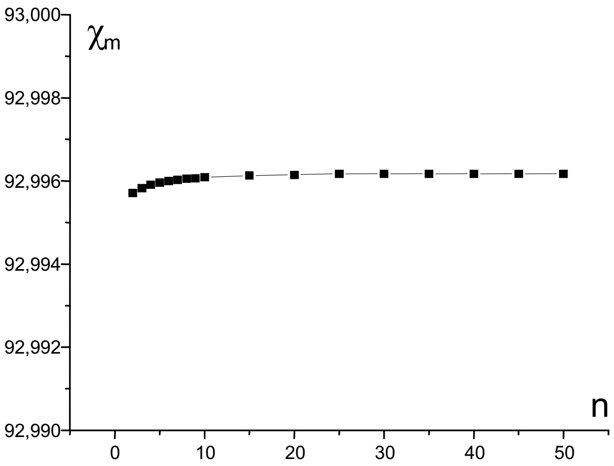

Рис. 3. График зависимости безразмерного поперечного волнового числа χ_m от количества точек дискретизации.

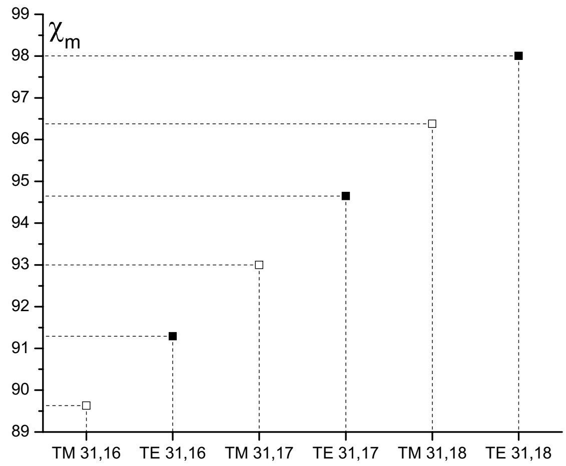

Рис. 4. Безразмерные поперечные волновые числа для ТЕ и ТМ мод при m=31 на интервале [89;99]

На рис.5 изображен $|E_z|$ в области Ω^+ для собственной моды $TM_{31,17}$. Шкала амплитуд проградуирована в относительных единицах, т.к. поля определяются с точностью до умножения на константу.

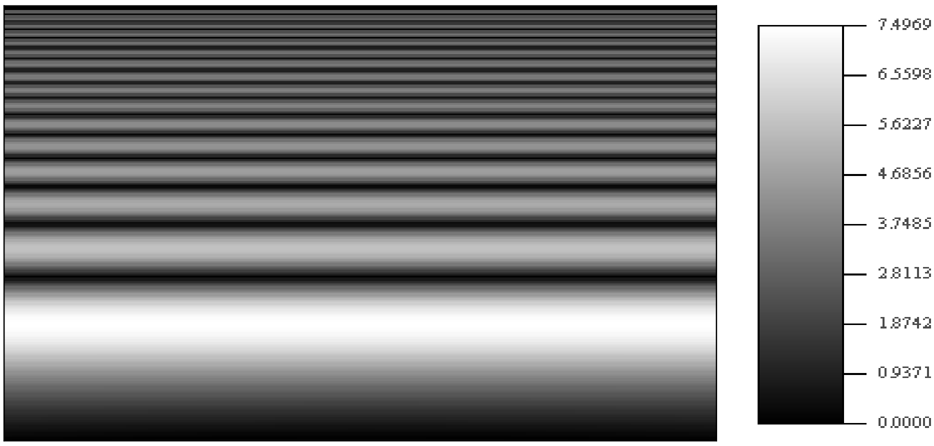

Рис. 5. $|E_z|$ в области Ω^+ для собственной моды $TM_{31,17}$

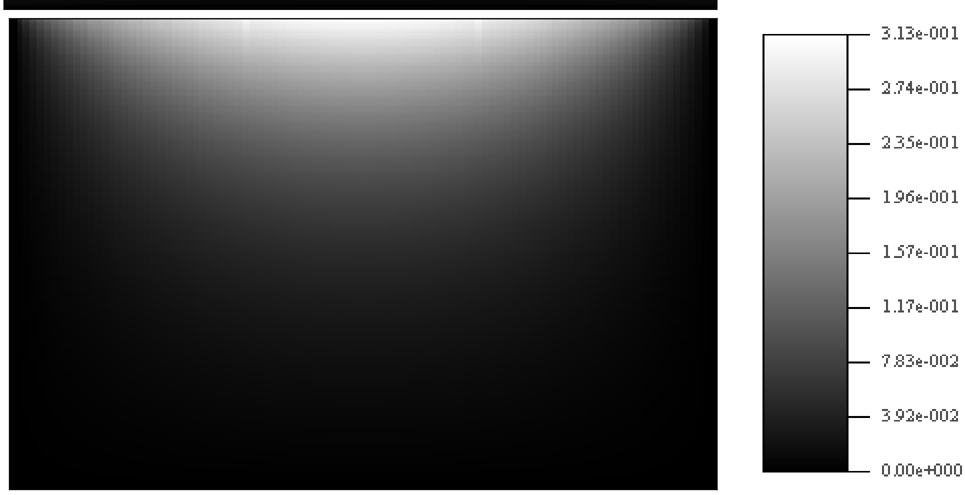

Рис. 6. $|E_z|$ в области Ω^- для собственной моды $TM_{31,17}$

На рис.6 изображен $|E_z|$ в области Ω^- для собственной моды $TM_{31,17}$. Как видно на рис.5 и рис.6, выполняется граничное условие (2), что является косвенным подтверждением достоверности полученных результатов. Отметим также, что модуль компоненты поля E_z в рабочей зоне Ω^+ значительно выше, чем в области Ω^-.

ВЫВОДЫ

Предложенная математическая модель позволяет выполнять спектральный анализ резонатора коаксиального гиротрона с гофрированной вставкой в случае ТМ волн и может быть использована при любых параметрах гофрировки внутреннего проводника.

Разработанная дискретная математическая модель позволяет эффективно использовать машинное время при численных расчетах благодаря использованию метода дискретных особенностей [6] и дает достаточно хорошую сходимость с увеличением количества точек дискретизации. К сожалению, скорость сходимости приближенных решений гиперсингулярного интегрального уравнения вида (17) к точным на настоящий день не изучена, что не позволяет сделать вывод о скорости сходимости поперечных волновых чисел к точным. Данный вопрос является предметом дальнейших исследований.

В заключении, автор статьи выражает благодарность проф. Ю.В. Ганделю за поставленную задачу и постоянный интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dumbrajs O., Nusinovich G.S. Coaxial Gyrotrons: Past, Present and Future (Review) // IEEE Transaction on Plasma Science. - 2004.-T.32.- N3.- C.934-946.
2. Гандель Ю.В., Загинайлов Г.И., Стешенко С.А. Строгий электродинамический анализ резонаторных систем коаксиальных гиротронов // Журнал технической физики.- 2004.-Т.74.- N7.- С.81-89.
3. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме.– М.: Наука, 1967.– 550с.
4. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики.– М.: Высшая школа, 1991.– 224с.
5. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Учебное пособие.- Харьков: Изд-во ХНУ, 2001.-92с.
6. Гандель Ю.В. Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики // Вопросы кибернетики.- М.: Изд. АН СССР, 1986.- С.166-183.
7. Piosczyk, B. et al.: 2.2 MW, 165 GHz Coaxial Cavity Gyrotron // Proc. Conf. Dig. 25th Int. Conf. Infrared and Millimeter Waves, Beijing, China, 2000.- P.19-20.

MATHEMATICAL MODEL FOR NUMERICAL ANALYSIS OF EIGEN TM WAVES IN COAXIAL GYROTRON WITH THE CORRUGATED INSERT

Alexey S. Kononenko
V.N.Karazin Kharkov National University, Svobody sq, 4, 61077, Kharkov, Ukraine

Coaxial gyrotron with a corrugated insert is considered. Rigorous mathematical model has been built for such a wave-guide in the case of TM. Discrete mathematical model is built on its basis by means of the method of discrete singularities. Simulation software which allows to perform full-wave spectral analysis for the cavity gyrotrons in the case of TM modes has been developed. Results of the numerical investigations are presented and their reliability is analyzed.
KEY WORDS: coaxial cavity gyrotron, method of discrete singularities, TM waves in the gyrotron.