

УДК 532.5, 533.951

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ

Л.С. Розуменко, В.И. Ткаченко

Национальный научный центр "Харьковский физико-технический институт", 61108 г. Харьков, ул. Академическая, 1,
Украина.

Поступила в редакцию 21 июля 2005 г.

В работе рассмотрены условия возникновения и развития сдвиговой неустойчивости Кельвина-Гельмгольца на границе раздела двух вязких потоков с разными плотностями и разными скоростями движения. Показано, что учет вязкости уменьшает значение критической скорости, превышение которой вызывает развитие неустойчивости. Показано, что учет вязкости приводит к возникновению диссипативной неустойчивости. Исследована зависимость инкремента такой неустойчивости от параметров. Проанализировано также влияние нелинейных эффектов на малые возмущения в среде в условиях трехволнового взаимодействия. Установлено, что неустойчивость носит взрывной характер, в широком диапазоне изменения параметра неустойчивости.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: вязкая среда, диссипативная неустойчивость, взрывная неустойчивость, критическая скорость, граничный слой.

Источником волнения на поверхности воды, как правило, является ветер. Образование ветровых волн при взаимодействии ветра со спокойной гладкой поверхностью воды, связано с неустойчивостью границы раздела двух сред за счет разности их скоростей.

Начало теоретического исследования вопроса о генерации волн, положили В. Кельвин и Г. Гельмгольц. В. Кельвин [1] первым теоретически исследовал устойчивость относительного движения двух жидкостей, которые имели разную плотность и двигались параллельно друг другу с малой амплитудой первоначального возмущения границы раздела. Он рассматривал двумерную задачу, считая движение потенциальным, и установил, что неустойчивость носит пороговый характер. Согласно его расчетам, возмущение на границе появляется, когда разность скоростей потоков превышает некоторое критическое значение. Это значение зависит от природы соприкасающихся жидкостей и длины возбуждаемой волны.

Позже Г. Гельмгольц [2] повторил подобные вычисления для границы раздела вода-воздух, рассматривая задачу о возбуждении волн ветром, как задачу устойчивости тангенциального разрыва, стабилизируемого силой тяжести и силой поверхностного натяжения. Им получено пороговое значение скорости ветра $\sim 6,5$ м/с, при превышении которого появляется неустойчивость. Однако это значение скорости существенно отличалось от полученного при наблюдении. Поначалу предпринимались попытки объяснения элементарных свойств поверхностных волн исходя из гидродинамики идеальной жидкости (Лагранж, Эйри, Стокс, Релей). Сам В.Кельвин считал, что в этих исследованиях важен вопрос учета вязкости сред. Однако точный учет сил на границе касания двух движущихся жидкостей, вызываемых вязкостью, без дополнительных математических упрощений, представляет серьезные математические трудности.

В дальнейшем было предпринято множество попыток учесть приграничные эффекты, связанные с вязкостными силами, с целью понизить пороговое значение скорости. Г. Джеффрис [3] рассматривал вязкие жидкости, учитывая возникновение вихреобразования на задних склонах волн в результате вязкости воздуха и, как результат, возникновение разности давлений. Он предложил «теорию экранирования» для описания генерации волн на поверхности воды. Однако проведенные расчеты не дали уменьшения критической скорости. Подробный обзор подхода к исследованию этой проблемы приведен в монографии Г.Е. Кононковой и К.В. Показеева [4].

В последнее время общепризнанными являются теоретические модели О.М. Филлипса и Дж Майлса, описывающие начальную стадию генерации волн ветром. Каждый из этих авторов развил свою теорию генерации волн.

Дж. Майлс [5] считал основным эффектом, вызывающим развитие неустойчивости – возникновение обратной связи между атмосферными пульсациями и волнами на воде. О.М. Филлипс [6] рассматривал образование ряби, как результат резонанса поверхностных волн с турбулентными флуктуациями атмосферного давления. Позже обе эти теории были объединены О.М. Филлипсом в одну.

Б.Б. Кадомцев и В.М.Конторович [7], воспользовавшись критерием сверхтекучести Л.Д.Ландау, пришли к выводу, что для развития неустойчивости скорость ветра должна быть больше, чем минимальная фазовая скорость волн на поверхности жидкости. Для воды и воздуха эта скорость оказывается порядка $2,3 \cdot 10^{-1}$ м/с, при длине волны $1,7 \cdot 10^{-2}$ м.

Целью данной работы является исследование условий возникновения неустойчивости границы раздела двух вязких сред, движущихся с разными скоростями и изучение характера трехволнового взаимодействия на этой границе.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ТРАКТОВКА ВОЗНИКНОВЕНИЯ ВЕТРОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Для исследования причин возникновения неустойчивости тангенциального разрыва на границе двух движущихся потоков (плотностью ρ_1, ρ_2 и вязкостью μ_1, μ_2 воздуха и воды соответственно) из энергетических соображений, воспользуемся представлением возникновения неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, приведенным в работе [7]. Для этого учтем все силы, действующие на возмущение, характерные размеры которого: высота ζ , ширина λ . Это подъемные и возвращающие силы. Для вычисления критического значения скорости ветра, сравним работу этих сил. Рост возмущения будет происходить только в случае выполнения условия:

$$\bar{\lambda} \rho_2 g + \sigma / \bar{\lambda}^2 < \rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_\mu^2, \quad (1)$$

где $\bar{\lambda} = \lambda / 2\pi$; $\sigma \geq 0$ — коэффициент поверхностного натяжения; U_μ — средняя скорость движения переходного слоя; U_1 — скорость воздуха.

В левой части неравенства расположены слагаемые, описывающие работу возвращающих сил. Первый член описывает работу силы тяжести, которая действует на возмущение, второй — работу сил поверхностного натяжения.

Первое слагаемое в правой части описывает работу подъемной силы воздуха. Появление второго слагаемого в правой части неравенства можно объяснить следующим образом. На границе раздела двух вязких потоков существует некоторый переходный слой толщиной 2Δ . Поскольку в переходном слое среды перемешиваются, то его плотность и вязкость можно определить суммой плотностей и вязкостей двух сред. Скорость этого слоя U_μ будет зависеть от скоростей и вязкостей прилегающих сред. Ее величину определим из условия баланса сил трения. Результирующую силу трения, действующую на элемент среды переходного слоя, представим в виде $F_\mu = \alpha_1(\mu_1 + \mu_2)U_\mu$. Эта сила трения приложена к центру элемента объема переходного слоя и складывается из сил трения действующих на его боковые и верхнюю и нижнюю стенки (рис.1):

$F_\mu = 2 \cdot F_{\text{б.с.}} - F_1 - F_2$, где $F_{\text{б.с.}} = \alpha_2(\mu_1 + \mu_2) \left(\frac{U_1 + U_2}{2} \right)$ — сила трения, действующая на боковые стенки элемента жидкости со стороны среды переходного слоя; $F_i = \alpha_{2+i} \mu_i U_i$, $i=1,2$ — силы трения со стороны i -й среды; 1,2 — верхняя и нижняя стенки. Из баланса этих сил, используя предельные переходы ($\mu_1 \rightarrow \mu_2$, $V_1 \rightarrow V_2$, $V_1, V_2 = 0$), позволяющие исключить коэффициенты α_i , получаем, что средняя скорость движения переходного слоя равна: $U_\mu = (\mu_1 U_2 + \mu_2 U_1) / (\mu_1 + \mu_2)$

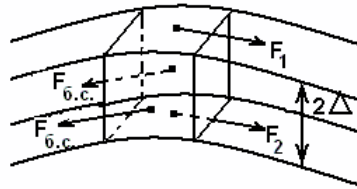


Рис. 1. Силы, действующие на элемент объема в переходном слое

Из выражения (1) следует, что неустойчивость возникает только в случае, когда подъемная сила больше возвращающих сил, т.е. когда правая часть неравенства превышает максимальное значение левой части, в которой согласно закону Бернулли, можно выполнить замену $\bar{\lambda} \rho g + \sigma / \bar{\lambda}^2 = \rho V_{\min}^2$, где V_{\min} — минимальная фазовая скорость поверхностных волн. Для воды и воздуха ее экспериментальное значение определяется величиной [7]: $V_{\min} \sim 2,3 \cdot 10^{-1}$ м/с. Учитывая выше изложенное, неравенство (1) перепишем в следующем виде:

$$V_{\min}^2 < \frac{\rho_1}{\rho_2} U_1^2 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} U_2 + U_1 \right)^2. \quad (2)$$

Для воды и воздуха пренебрегая малыми величинами: $\frac{\mu_1}{\mu_2} \ll 1$ и $\frac{\rho_1}{\rho_2} \ll 1$, получим условие развития неустойчивости:

$$U_1 > V_{\min}. \quad (3)$$

Таким образом, критическая скорость, полученная при помощи приведенной модели составляет $(U_1)_{\text{кр}} \sim 2,3 \cdot 10^{-1}$ м/с, что соответствует оценке, приведенной в работе [7].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Следуя предположению Кельвина о существенном влиянии вязких сил, учтем вязкости воды и воздуха в традиционной постановке задачи Кельвина – Гельмгольца (КГ). Неустойчивость КГ представляет собой экспоненциальное увеличение амплитуды начального возмущения границы раздела двух полубесконечных слоев вязкой несжимаемой жидкости, на которую действуют поверхностное натяжение и сила тяжести, направленная перпендикулярно границе раздела (в рассматриваемом случае – против оси z).

Колебания границы раздела двух сред с плотностью (ρ_1, ρ_2) и динамической вязкостью (μ_1, μ_2) , которые движутся со скоростями $\vec{U}_{1,2}$ в трехмерной системе координат хуз (оси x, y направлены по границе раздела, а ось z вертикально вверх), можно описать с помощью трех функций — потенциалов скоростей $\varphi_{1,2}(x, y, z, t)$ и величины смещения границы раздела жидкостей от положения равновесия $z = \eta(x, y, t)$.

Уравнения для этих функций хорошо известны [8 с.73]. Это уравнение несжимаемости жидкости и уравнение, описывающее кинематическое граничное условие:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \vec{\nabla}_{\perp} \eta \vec{\nabla}_{\perp} \varphi_{1,2} = \frac{\partial \varphi_{1,2}}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\Delta \varphi \equiv \Delta_{\perp} \varphi + \frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{\partial z^2} = 0. \quad (5)$$

Уравнения (4,5) должны быть дополнены динамическим граничным условием, которое может быть получено из уравнения Навье – Стокса интегрированием по тонкому граничному слою. Поскольку рассматриваются вязкие среды, то уравнение Навье – Стокса выписываем с учетом вязкости [8 с.73]:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} \right) = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} - \rho \vec{g} - \nabla \bar{p}, \quad (6)$$

где $\sigma_{ik} = \mu(z) \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right)$ — вязкий тензор упругости для несжимаемой среды, где $\mu(z)$ — динамическая вязкость среды.

Для упрощения процедуры интегрирования по тонкому переходному слою, представим коэффициент вязкости $\mu(z)$ в следующем модельном виде:

$$\mu(z) = \mu_1 \theta(z + \Delta) + \mu_2 \theta(-z + \Delta), \quad (7)$$

где $\theta(z) = \begin{cases} 1 & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$, асимметричная единичная функция. Представление вязкости в таком виде, позволяет учесть взаимодействие между движущимися слоями. Интегрируя уравнение (6) по тонкому переходному слою $(-\Delta, \Delta)$ вдоль оси z и затем, устремляя $\Delta \rightarrow 0$, получим следующее динамическое граничное условие:

$$\begin{aligned} & \rho_1 \left\{ g \eta + \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}_{\perp} \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} \Big|_{z=\eta} + 2(\mu_1 \Delta_{\perp} \varphi_2 - \mu_2 \Delta_{\perp} \varphi_1) = \\ & = \rho_2 \left\{ g \eta + \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}_{\perp} \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} \Big|_{z=\eta} + \sigma \vec{\nabla}_{\perp} \frac{\vec{\nabla}_{\perp} \eta}{\sqrt{1 + (\vec{\nabla}_{\perp} \eta)^2}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\nabla_{\perp} \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y}$, $\Delta_{\perp} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Уравнение (8) отличается от использованного ранее [4], наличием

вязкостного слагаемого. “Перекрестное” расположение коэффициентов динамической вязкости и возмущений потенциалов скоростей соответствует эффекту “проницаемости” границы. Как будет показано ниже, только при учете этого эффекта достигается количественное соответствие теоретических результатов экспериментальным данным [9].

Таким образом, уравнения (4, 5, 8) составляют систему уравнений, которая описывает поведение границы разрыва вязких сред с учетом поверхностного натяжения в общем трехмерном случае.

ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ

Исследуем устойчивость малых возмущений параметров системы уравнений (4,5,8). Рассмотрим устойчивость границы стратифицированного в направлении оси z сдвигового течения. Считаем, что скорости V_1 и V_2 , а также волновое возмущение распространяется вдоль оси x . Линеаризация системы уравнений (4, 5, 8) и представление зависимостей потенциала скорости φ и границы раздела η заданными в виде

$\varphi \sim f(z)\exp(\mp k z)\exp(ik_x x - i\omega t)$, $\eta \sim p(z)\exp(ik_x x - i\omega t)$, где ω и k - частота и волновое число волны, $k = 2\pi/\lambda$, λ - длина волны возмущения:

$$D(\omega, k) = \rho_1(V_1 k - \omega)^2 + \rho_2(V_2 k - \omega)^2 - kg(\rho_2 - \rho_1) - \sigma k^3 + 2ik^2\omega(\mu_1 + \mu_2) - 2ik^2(\mu_1 V_2 k + \mu_2 V_1 k) = 0. \quad (9)$$

В отличие от дисперсионного уравнения, полученного в работе [10], в уравнении (9) появляются два слагаемых которые, учитывают влияние вязкости на дисперсию. Предпоследнее слагаемое (9) ответственно за затухание возмущения в среде, а последнее - описывает явление "промокаемости" границы раздела. В безразмерных переменных в системе Ламба ($\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 = 0$) уравнение (9) принимает вид:

$$\Omega^2 + 2i\Omega q^2 \mu_1^* + q^2 w^2 - q - 2iq^3 \mu_2^* - q^3 = 0. \quad (10)$$

Здесь использованы следующие обозначения для безразмерных переменных: $\Omega = \omega t_0$ - частота, $q = k l_0$ - волновое число, $\mu_1^* = \frac{(\mu_1 + \mu_2)t_0}{(\rho_2 + \rho_1)l_0^2}$, $\mu_2^* = \frac{(\mu_1 V_2 + \mu_2 V_1)t_0^2}{(\rho_2 + \rho_1)l_0^3}$, $w^2 = \frac{(\rho_1 V_1^2 + \rho_2 V_2^2)t_0^2}{(\rho_2 + \rho_1)l_0^2}$ - параметр устойчивости. Для обезразмеривания использованы характерные масштабы длины $l_0 = \sqrt{\sigma/g(\rho_2 - \rho_1)}$ и времени $t_0 = \sqrt{l_0(\rho_1 + \rho_2)/g(\rho_2 - \rho_1)}$.

Решение дисперсионного уравнения (10) относительно Ω имеет вид:

$$\Omega_{1,2} = -iq^2 \mu_1^* \pm \sqrt{q + q^3 - q^2 w^2 - q^4 \mu_1^{*2} + 2iq^3 \mu_2^*}. \quad (11)$$

Неустойчивость возникает только в случае, когда $\Omega_{1,2}$ имеет положительную мнимую часть. Это требование приводит к следующему условию развития неустойчивости:

$$w^2 + \left(\frac{\mu_2^*}{\mu_1^*}\right)^2 > 2. \quad (12)$$

Неравенство (12) отличается от полученного ранее [10] наличием дополнительного слагаемого в левой части выражения, которое зависит от вязкости сред. Таким образом, учет вязкости изменяет критерий возникновения неустойчивости. Поскольку вязкость характеризует диссипативные свойства среды, то развивающуюся в этом случае неустойчивость будем называть диссипативной.

Рассмотрим случай, наиболее часто встречающийся на практике. Определим условия возникновения ветрового волнения на поверхности воды. Поскольку в этом случае $V_1 \gg V_2$, а $\mu_1 \ll \mu_2$, то первым слагаемым в неравенстве (12) можно пренебречь по сравнению со вторым. Отсюда следует, что пороговое значение скорости, превышение которой приводит к развитию неустойчивости границы раздела, определяется выражением $V_{кр} \sim \frac{l_0}{t_0} \sqrt{2}$. Для воздуха и воды оно равно $2,32 \cdot 10^{-1}$ м/с.

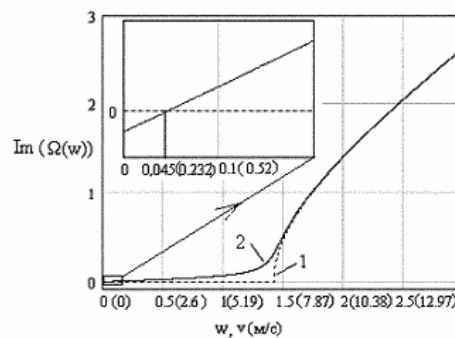


Рис. 2. Зависимость мнимой части частоты $\text{Im}\Omega$ от параметра неустойчивости w для значения безразмерного волнового числа $q=1$. Кривая 1 соответствует $\mu_1, \mu_2=0$. При этом критическое значение $w_{кр} = \sqrt{2}$ ($V_{кр}=6,46$ м/с); кривая 2 - $\mu_1 \ll \mu_2, \rho_1 \ll \rho_2$ критическое значение $w_{кр} = 0,045$ ($V_{кр}=2,32 \cdot 10^{-1}$ м/с)

На рис. 2 приведена зависимость инкремента неустойчивости от параметра неустойчивости w для вязких сред (сплошная кривая), и для сред в отсутствие вязкости (пунктирная кривая), построенные для одного значения безразмерного волнового вектора, рассмотренного в [9].

Из графика следует, что учет вязкости, существенно изменяет характер поведения инкремента при малых значениях параметра неустойчивости w , в отсутствие вязкости и приводит к развитию диссипативной неустойчивости. Инкремент этой неустойчивости при больших значениях w приближается к величине

инкремента неустойчивости КГ в отсутствии вязкости. В области малых w инкремент монотонно уменьшается до нуля. При $V < V_{кр}$ – возмущения границы раздела сред являются затухающими (устойчивыми).

Необходимо отметить, что данное рассмотрение справедливо для возмущений, длины волн которых велики по сравнению с суммарной толщиной переходных слоев воды и воздуха, величина которой определяется выражением $\delta = \sum_{i=1}^2 \frac{2 \mu_i}{\rho_i \omega}$ [4]. Для границы воздух-вода эта величина не превышает значения $5 \cdot 7 \cdot 10^{-3}$ м.

Таким образом критерий применимости нашего рассмотрения заключается в выполнении неравенства $\lambda > 2\pi l_0 \sim 1,7 \cdot 10^{-2}$ м.

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД (ТРЕХВОЛНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

В работах [10, 11] было установлено, что неустойчивость, возникающая на границе раздела двух потоков носит взрывной характер (реализуется взрывная неустойчивость (ВН)). Этот процесс вблизи момента взрыва характеризуется более быстрым ростом всех взаимодействующих амплитуд, чем экспоненциальный. Такой тип неустойчивости в идеальной жидкости реализуется и для симметричного [10] и для несимметричного [11] распадов. В отсутствие вязкости к ВН с наибольшим темпом нарастания возмущения приводит взаимодействие волн нулевой энергии (ВНЭ). При этом величина энергии возмущений определяется по аналогии с плазмой [12], $W = \frac{1}{4} \frac{\partial D(\omega, k)}{\partial \omega} |A|^2$, где A – амплитуда волны, $D(\omega, k) = 0$ – дисперсионное уравнение, описывающее возмущение в среде.

Рассмотрим уравнение, описывающее изменение энергии колебаний поверхности раздела вязких жидкостей, которое может быть получено из уравнения (10):

$$(\Omega_0^2 + q^2 w^2 - q - q^3) |\eta|^2 + 2\Omega_0 \left| i \frac{\partial |\eta|^2}{\partial t} \right| = (-2i\Omega_0 q^2 \mu_1^* + 2iq^3 \mu_2^*) |\eta|^2. \quad (13)$$

Проанализируем его в окрестности решения $\Omega_0^2 + q^2 w^2 - q - q^3 = 0$. Тогда имеем:

$$\frac{\partial |\eta|^2}{\partial t} = -q^2 \mu_1^* |\eta|^2 + q^3 \frac{\mu_2^*}{\Omega_0} |\eta|^2. \quad (14)$$

В отсутствие движения жидкостей ($V_1 = V_2 = 0$), возмущения границы раздела устойчивы. Когда среды движутся ($V_1 \neq 0, V_2 \neq 0$), неустойчивость для волн положительной энергии $W = \frac{1}{4} \frac{\partial \text{Re}(D(\Omega_0, q))}{\partial \omega} |A|^2 = \frac{1}{2} \Omega_0 > 0$ возникает при условии

$$-q^2 \mu_1^* + q^3 \frac{\mu_2^*}{\Omega_0} > 0. \quad (15)$$

Из этого неравенства следует критерий развития неустойчивости (12).

Исследуем возможность развития нелинейной неустойчивости в вязкой жидкости, которая слабо неустойчива в линейном приближении. Для этого в системе уравнений (4,5,8) учтем нелинейности, что можно сделать, разложив потенциал φ в ряд по степеням $k\eta \ll 1$ вблизи $z=0$ [10]:

$$\varphi(x, y, z, t) \Big|_{z=\eta(x, y, t)} \cong \varphi(x, y, 0, t) + \eta \frac{\partial \varphi(x, y, 0, t)}{\partial z} + \dots, \quad (16)$$

где $\varphi \sim f(z) \exp(\mp k z) \exp(ik_x x + ik_y y - i\omega t)$, $\eta \sim p(z) \exp(ik_x x + ik_y y - i\omega t)$, где k_x, k_y – волновые числа возмущений в направлениях x и y соответственно.

В расчетах ограничимся квадратичной нелинейностью (предполагаем возможность трехволнового взаимодействия). Допуская возможность трехволнового взаимодействия, т.к. возмущения оказываются слабонарастающими, необходимо учитывать особенности распада в вязкой среде. Требование выполнения условия распада для частот должно быть преобразовано к виду: $\text{Re } \omega_0(\vec{k}_0) = \text{Re } \omega_1(\vec{k}_1) + \text{Re } \omega_2(\vec{k}_2)$, условие для волновых векторов: $\vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ не изменяется [10].

Систему координат выбираем таким образом, чтобы направление скорости ветра V_1 совпадало с направлением Ox , направление V_2 произвольно, и волновые вектора $\vec{k}_0, \vec{k}_1, \vec{k}_2$ составляли с осью x углы $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ соответственно, т.е. имеем:

$$\begin{aligned}\bar{U}_1 &= \{V_{1x}; 0\}, \\ \bar{U}_2 &= \{V_{2x}, V_{2y}\} = \{U_2 \cos \theta_V; U_2 \sin \theta_V\}, \\ \bar{k}_i &= \{k_{xi}; k_{yi}\} = \{k_i \cos \theta_{ki}; k_i \sin \theta_{ki}\},\end{aligned}\quad (17)$$

где $i=1,2,3$.

Будем считать, что возмущение границы раздела двух потоков является суперпозицией трех колебаний, поэтому представим потенциал возмущений скоростей потоков Φ и функцию, описывающую изменение границы η , в следующем виде:

$$\Phi_{1,2} = \sum_{i=0}^2 C_{1,2}^i e^{\mp k_i z + i(k_{ix}x + k_{iy}y - \omega_i t)} + \text{к.с.}, \quad \eta = \sum_{i=0}^2 a_i e^{i(k_{ix}x + k_{iy}y - \omega_i t)} + \text{к.с.} \quad (18)$$

Подставив (18) в уравнения (4,5,8) получим систему уравнений, которые описывают нелинейную связь волновых возмущений границы раздела сред:

$$\begin{aligned}D(\omega_0, k_0) a_0 &= X_0 a_1 a_2, \\ D(\omega_1, k_1) a_1 &= X_1 a_0 a_2^*, \\ D(\omega_2, k_2) a_2 &= X_2 a_0 a_1^*,\end{aligned}\quad (19)$$

где $D(\omega_i, k_i) = \rho_1 (\bar{v}_1 \bar{k}_i - \omega_i)^2 + \rho_2 (\bar{v}_2 \bar{k}_i - \omega_i)^2 - k_i g (\rho_2 - \rho_1) - \sigma k_i^3 + 2i k_i^2 \omega_i (\mu_1 + \mu_2) - 2i k_i^2 (\mu_1 \bar{v}_2 \bar{k}_i + \mu_2 \bar{v}_1 \bar{k}_i)$ — дисперсионное уравнение, решение которого имеет вид:

$$\begin{aligned}\omega_i &= -i k_i^2 \frac{\mu_2 + \mu_1}{\rho_2 + \rho_1} \pm \\ &\pm \sqrt{-k_i^4 \frac{\mu_2 + \mu_1}{\rho_2 + \rho_1} - k_i^2 \frac{\rho_2 V_2^2 + \rho_1 V_1^2}{\rho_2 + \rho_1} \cos^2 \theta_i + k_i \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2 + \rho_1} + k_i^3 \frac{\sigma}{\rho_2 + \rho_1} + 2i k_i^3 \frac{\mu_2 V_2 + \mu_1 V_1}{\rho_2 + \rho_1} \cos \theta_i}.\end{aligned}\quad (20)$$

X_0, X_1, X_2 — матричные элементы трехволнового взаимодействия для нулевой и первой и второй волн:

$$\begin{aligned}X_0 &= k_0 \left[\begin{aligned} & -\rho_1 (\bar{v}_1 \bar{k}_0 - \omega_0) (\bar{v}_1 \bar{k}_2 - \omega_2) \cos(\theta_2 - \theta_0) - \rho_1 (\bar{v}_1 \bar{k}_1 - \omega_1) (\bar{v}_1 \bar{k}_0 - \omega_0) \cos(\theta_1 - \theta_0) + \\ & + \rho_2 (\bar{v}_2 \bar{k}_0 - \omega_0) (\bar{v}_2 \bar{k}_2 - \omega_2) \cos(\theta_2 - \theta_0) + \rho_2 (\bar{v}_2 \bar{k}_1 - \omega_1) (\bar{v}_2 \bar{k}_0 - \omega_0) \cos(\theta_1 - \theta_0) - \\ & - \rho_2 (\bar{v}_2 \bar{k}_2 - \omega_2)^2 - \rho_2 (\bar{v}_2 \bar{k}_1 - \omega_1)^2 - \rho_2 (\bar{v}_2 \bar{k}_2 - \omega_2) (\bar{v}_2 \bar{k}_1 - \omega_1) (1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)) + \\ & + \rho_1 (\bar{v}_1 \bar{k}_2 - \omega_2)^2 + \rho_1 (\bar{v}_1 \bar{k}_1 - \omega_1)^2 + \rho_1 (\bar{v}_1 \bar{k}_2 - \omega_2) (\bar{v}_1 \bar{k}_1 - \omega_1) (1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)) + \\ & - 2i \mu_1 k_0^2 (\bar{v}_2 \bar{k}_2 - \omega_2) \cos(\theta_2 - \theta_0) - 2i \mu_1 k_0^2 (\bar{v}_2 \bar{k}_1 - \omega_1) \cos(\theta_1 - \theta_0) + \\ & + 2i \mu_2 k_0^2 (\bar{v}_1 \bar{k}_2 - \omega_2) \cos(\theta_2 - \theta_0) + 2i \mu_2 k_0^2 (\bar{v}_1 \bar{k}_1 - \omega_1) \cos(\theta_1 - \theta_0) \end{aligned} \right], \\ X_i &= k_i \left[\begin{aligned} & -\rho_1 (\bar{v}_1 \bar{k}_i - \omega_i) (\bar{v}_1 \bar{k}_j - \omega_j^*) \cos(\theta_j - \theta_i) - \rho_1 (\bar{v}_1 \bar{k}_i - \omega_i) (\bar{v}_1 \bar{k}_0 - \omega_0) \cos(\theta_0 - \theta_i) + \\ & + \rho_2 (\bar{v}_2 \bar{k}_i - \omega_i) (\bar{v}_2 \bar{k}_j - \omega_j^*) \cos(\theta_j - \theta_i) + \rho_2 (\bar{v}_2 \bar{k}_i - \omega_i) (\bar{v}_2 \bar{k}_0 - \omega_0) \cos(\theta_0 - \theta_i) - \\ & - \rho_2 (\bar{v}_2 \bar{k}_j - \omega_j^*)^2 - \rho_2 (\bar{v}_2 \bar{k}_0 - \omega_0)^2 + \rho_2 (\bar{v}_2 \bar{k}_j - \omega_j^*) (\bar{v}_2 \bar{k}_0 - \omega_0) (1 + \cos(\theta_j - \theta_0)) + \\ & + \rho_1 (\bar{v}_1 \bar{k}_j - \omega_j^*)^2 + \rho_1 (\bar{v}_1 \bar{k}_0 - \omega_0)^2 - \rho_1 (\bar{v}_1 \bar{k}_j - \omega_j^*) (\bar{v}_1 \bar{k}_0 - \omega_0) (1 + \cos(\theta_j - \theta_0)) + \\ & + 2i \mu_1 k_i^2 (\bar{v}_2 \bar{k}_j - \omega_j^*) \cos(\theta_j - \theta_i) - 2i \mu_1 k_i^2 (\bar{v}_2 \bar{k}_0 - \omega_0) \cos(\theta_0 - \theta_i) - \\ & - 2i \mu_2 k_i^2 (\bar{v}_1 \bar{k}_j - \omega_j^*) \cos(\theta_j - \theta_i) + 2i \mu_2 k_i^2 (\bar{v}_1 \bar{k}_0 - \omega_0) \cos(\theta_0 - \theta_i) \end{aligned} \right],\end{aligned}\quad (21)$$

где $i, j = 1, 2, i \neq j$. При симметричном распаде, система уравнений (19) и матричные элементы 1 и 2 симметричны относительно замены $\omega_1, k_1, a_1, \theta_1 \rightarrow \omega_2, k_2, a_2, \theta_2$. В матричных элементах для вязкой жидкости, как и в дисперсионном уравнении появляются дополнительные слагаемые, учитывающие влияние вязкости на процесс распада, возникают комплексные слагаемые, и комплексное сопряжение в матричных элементах с индексами 1 и 2.

Из уравнений (19), следуя [13], легко получить систему динамических уравнений:

$$\begin{aligned}2i B_0 \frac{\partial}{\partial t} a_0 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} a_0 &= X_0 a_1 a_2, \\ 2i B_1 \frac{\partial}{\partial t} a_1 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} a_1 &= X_1 a_0 a_2^*, \\ 2i B_2 \frac{\partial}{\partial t} a_2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} a_2 &= X_2 a_0 a_1^*,\end{aligned}\quad (22)$$

где $B_i = \omega_i + ik_i^2 \frac{\mu_1 + \mu_2}{\rho_2 + \rho_1}$, $i=0,1,2$. В дальнейшем исследуем дисперсионное уравнение в системе отсчета Ламба.

ВЗРЫВНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

По аналогии с работой [10], введем характерные волновые числа и частоту:

$$k_* \equiv \frac{g}{V_1^2} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \chi_* \equiv \frac{V_1^2}{\sigma} \frac{\rho_1}{\rho_2} (\rho_2 + \rho_1), \quad \Omega_*^2 \equiv \frac{\rho_1}{\rho_2} k_*^2 V_1^2, \quad (23)$$

что обусловлено наличием двух участков на дисперсионной кривой гравитационной и капиллярной.

Обезразмерим систему (22) путем замены $F_i \leftarrow -\frac{V_i}{\Omega_*^2 (\rho_1 + \rho_2) \chi_*}$, $T \leftarrow \Omega_* t$, $b_i \leftarrow \frac{B_i}{\Omega_*}$, $\tilde{a}_i \leftarrow a_i \chi_*$

$$\begin{aligned} 2i b_0 \frac{\partial}{\partial T} \tilde{a}_0 + \frac{\partial^2}{\partial T^2} \tilde{a}_0 &= F_0 \tilde{a}_1 \tilde{a}_2, \\ 2i b_1 \frac{\partial}{\partial T} \tilde{a}_1 + \frac{\partial^2}{\partial T^2} \tilde{a}_1 &= F_1 \tilde{a}_0 \tilde{a}_2^*, \\ 2i b_2 \frac{\partial}{\partial T} \tilde{a}_2 + \frac{\partial^2}{\partial T^2} \tilde{a}_2 &= F_2 \tilde{a}_0 \tilde{a}_1^*. \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотрим симметричный распад, которому удовлетворяют условия: $\text{Re } \omega_1 = \text{Re } \omega_2$, $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2|$, $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = -\theta_2$. Решение симметричной задачи приводит к существенному упрощению матричных элементов и всей системы (24) в целом: количество уравнений, описывающих процесс, уменьшается до двух. Решение (24) ищем в виде комбинации действительной и мнимой части: $\tilde{a}_i = A_i(T) e^{i\Phi_i(T)}$, где $A_i(T)$ - амплитуда возмущения, $\Phi_i(T)$ - фаза. Такое представление искомой функции позволяет разделить действительные и мнимые части уравнений. Численное решение системы (24) проводилось при следующих значениях параметров: $g=9,8$ м/с, $\sigma=0,073$ Н/м, $\mu_1=1,8 \cdot 10^{-6}$ Н·сек/м², $\mu_2=8,9 \cdot 10^{-4}$ Н·сек/м², $\rho_1=1,3$ кг/м³, $\rho_2=1000$ кг/м³ при помощи программы Mathcad 2001i. Типичные зависимости амплитуд волновых возмущений приведены на рис.2.

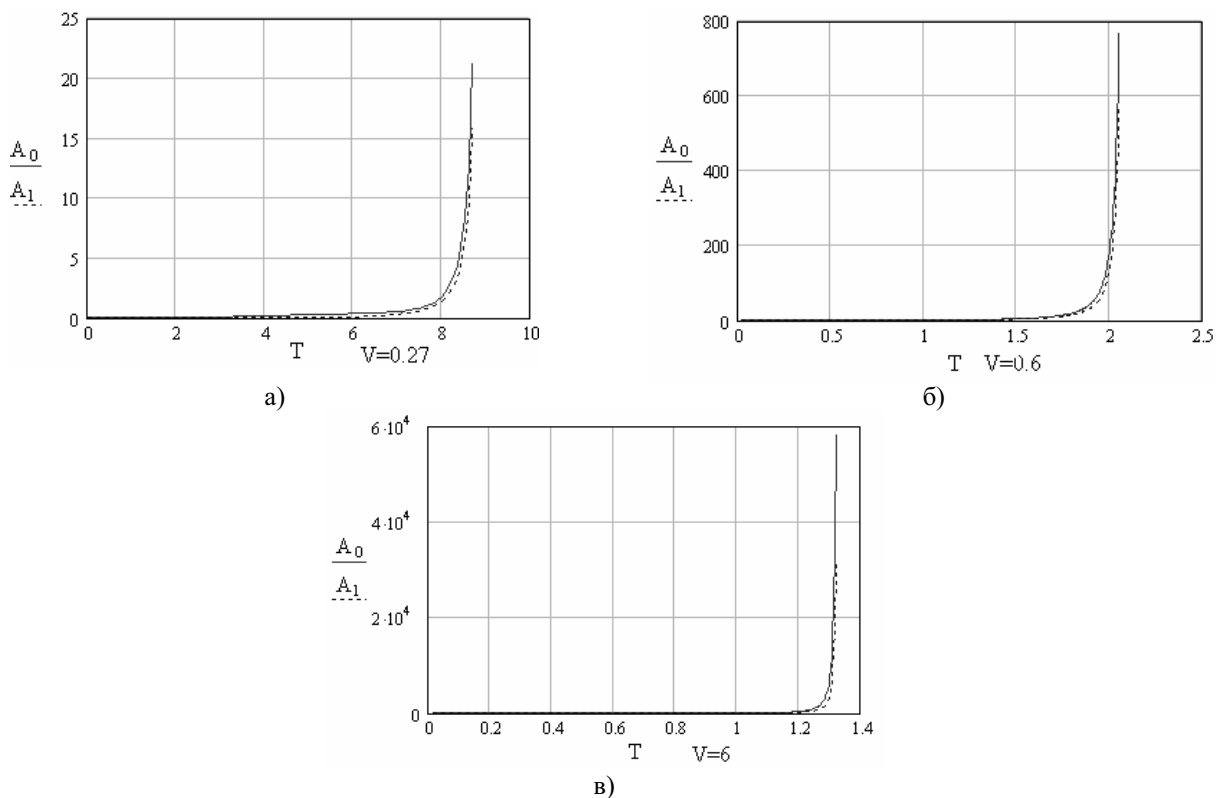


Рис. 3. Зависимость амплитуд возмущений A_i от времени T и скорости ветра V . A_0 – амплитуда нулевой волны, A_1 – амплитуда симметричных волн после распада. а) – скорость ветра $2,7 \cdot 10^{-1}$ м/с, б) – скорость ветра 0,6 м/с, в) – скорость ветра 6 м/с.

Здесь представлена зависимость от времени амплитуд трех взаимодействующих волн в вязкой среде для разных значений скорости ветра. Амплитуда нулевой волны, на графике изображена сплошной кривой, амплитуды симметричных первой и второй волн – пунктирной. Из графиков видно, что решение системы (24) для вязкой жидкости в выбранном нами приближении, как и решение подобной системы в идеальной жидкости [10], носит взрывной характер для всех волн.

Амплитуда волны и время взрыва T_0 , когда амплитуда имеет неограниченный рост, зависят от скорости ветра. Сравнивая рис.3 а, б, в, увидим, что чем больше скорость ветра, тем меньше время развития неустойчивости T_0 . В действительности, амплитуды волн ограничены явлением обрушения волны.

В области медленного изменения, характер поведения амплитуды подчиняется автомодельному закону $(T_0 - T)^{-\alpha}$. В идеальной жидкости $\alpha = 2$ [10], для ВНЭ и скорости ветра $V \sim 6$ м/с. В вязкой среде, вследствие смещения критического значения скорости, волны минимальной энергии находятся в области $V_{кр}$, и показатель степени зависит от скорости ветра. При малой скорости ветра $V \sim V_{кр}$ (рис.3 а), значение показателя степени $\alpha = 1,5$, При скоростях ветра существенно больших $V_{кр}$ (рис.3 в), показатель принимает значение $\alpha = 2$.

В результате проведения численных расчетов установлено, что в вязкой, как и в невязкой жидкости трехволновое взаимодействие возможно в углах $0 \leq \theta \leq 38^\circ$ для всех значений скорости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учет вязкости в предложенном модельном виде, позволил открыть новый тип неустойчивости границы раздела двух сдвиговых течений – диссипативную неустойчивость Кельвина–Гельмгольца и понизить пороговое значение скорости до экспериментального значения. В условиях открытой неустойчивости, характер поведения инкремента меняется. При больших скоростях, инкремент равен инкременту неустойчивости в идеальной жидкости, в области малых скоростей, монотонно уменьшается.

Численные расчеты в условиях трехволнового взаимодействия показали, что неустойчивость в вязкой жидкости, как и в идеальной, носит взрывной характер, при этом ВНЭ из области $V \sim 6$ м/с смещаются в область $V_{кр} \sim 2,3 \cdot 10^{-1}$ м/с. В области медленного изменения, характер поведения амплитуды подчиняется автомодельному закону $(T_0 - T)^{-\alpha}$. Время взрыва и показатель степени зависят от скорости ветра. Чем больше скорость ветра, тем меньше время развития неустойчивости. При малых скоростях ветра $V \sim V_{кр}$ показатель степени равен $\alpha = 1,5$, при больших скоростях, его значение совпадает со значением для идеальной жидкости $\alpha = 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. W. Kelwin On stationary waves in flowing water // Phil. Mag.–1871.–Ser.4.–V.42.–P.362-378.
2. G. Helmholtz Die Energie der Wogen und des Windes // Will. Abhandl.–Leipzig.–1895.–V.3.–P.332-355.
3. H. Jeffreys On the formation the waves on water by wind // Proc. Roy. Soc. – 1925. – A107. – P.189-195.
4. Г.Е. Кононкова, К.В. Показеев Динамика морских волн. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – 298 с.
5. J.W. Miles On the generation of surface waves by shear flows // J. Fluid Mech. – 1957. – V.3. – P.185-204.
6. О.М. Филиппс Динамика верхнего слоя океана. – М.: Изд-во Мир, 1969. – 319 с.
7. Б.Б. Кадомцев, В.М. Конторович Теория турбулентности в гидродинамике и плазме // Изв. ВУЗов. Радиофизика. – 1974. – Т.XVII. – №4. – С.511-540.
8. Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. – 733 с.
9. Г. Ламб Гидродинамика. – М.: ОГИЗ Гостехиздат, 1947. – 928 с.
10. В.В. Гушин, С.С. Моисеев, В.Г. Пунгин, В.И. Ткаченко Неоднородные и автомодельные свойства взрывных процессов в стратифицированных сдвиговых течениях // ДАН СССР. – 1985. – Т.285. – №1. – С.65-71.
11. В.И. Ткаченко, Д.А. Андронов Взаимодействие волн нулевой энергии, неколлинеарных скорости течения Кельвина–Гельмгольца // Вестник ХГТУ, спецвыпуск. – 1999. – С.162-164.
12. М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков Теория волн. – М.: Наука, 1979. – 383 с.
13. Х. Вильгельмссон, Я. Вейланд Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. – М.: Энергоиздат. – 1981. – 223 с.

BOUNDARY LAYER INSTABILITY OF SHEAR VISCOUS STREAMS

L.S. Rozumenko, V.I. Tkachenko

National science center "Kharkiv Institute of Physics and Technology", 61108 Kharkov, Akademicheskaya street, 1, Ukraine

In this work the conditions of appearance and development of shift Kelvin - Helmholtz instability on a boundary of two viscous streams with different properties and different rates of movement are investigated. It's shown, that the account of viscosity influences on a value of a critical velocity (exceeding what causes the development of instability) and results in appearance of dissipative instability. The character of open instability in conditions of three-waves interaction has been investigated and it has been established, that the instability is of an explosive character.

KEY WORDS: viscous stream, dissipative instability, explosive instability, boundary, critical velocity.