

PACS: 67.40.Pm

АНИЗОТРОПНЫЕ ФОНОННЫЕ СИСТЕМЫ В СВЕРХТЕКУЧЕМ ГЕЛИИ

И.Н. Адаменко¹, Ю.А. Киценко², К.Э. Немченко¹, В.А. Слипка¹, А.Ф.Г. Wyatt³¹Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы 4, Харьков 61077, Украина²Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»,
ул. Академическая 1, Харьков 61108, Украина³School of Physics, University of Exeter, Exeter EX4 4QL, United Kingdom

Поступила в редакцию 2 октября 2006 г.

В работе рассмотрен ряд примечательных явлений, открытых недавно в анизотропных квазичастичных системах сверхтекучего ⁴He: процесс рождения высокоэнергетических фононов пучком низкоэнергетических фононов, супратермальное распределение высокоэнергетических фононов в длинных фононных пучках, образование горячей линии, возникающей при пересечении фононных пучков. Исследованы трехфононные процессы в изотропных и анизотропных фононных системах сверхтекучего гелия при различных давлениях. Найдена частота трехфононной релаксации в зависимости от угла, температуры, степени анизотропии фононного пучка и давления, что позволило проанализировать картину взаимодействия двух фононных пучков при различных углах пересечения и давлениях. Вычислена частота четырехфононного взаимодействия в анизотропных фононных системах для произвольных углов, определяющая частоту рождения и поглощения h-фононов l-фононным пучком. Это дало возможность объяснить экспериментально наблюдаемые явления.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: фонон, анизотропная система, функция распределения, фонон-фононное взаимодействие, частота релаксации

Сверхтекучесть квантовых жидкостей – одно из наиболее необычных физических явлений, демонстрирующих законы квантовой физики в макроскопическом масштабе. С момента открытия сверхтекучесть интенсивно исследуется как экспериментаторами, открывающими все новые особенности этого состояния вещества, так и теоретиками, развивающими теорию наблюдаемых процессов, которая поясняет результаты экспериментов и предсказывает новые явления.

Одной из особенностей сверхтекучих жидкостей является возможность существования в них сильно анизотропных систем тепловых возбуждений, каковыми, в частности, являются фононные и ротонные пучки в сверхтекучем ⁴He. Впервые такие пучки наблюдались в 70-х годах прошлого столетия [1]. С того времени и по сегодняшний день они являются предметом интенсивных экспериментальных исследований.

Стимулом для проведения исследований было полное отсутствие теории анизотропных квазичастичных систем, которая была бы в состоянии исходя из основных физических принципов пояснить уникальные явления, наблюдаемые экспериментально. Основным результатом проведенных исследований стало создание нового научного направления, на основе которого стало возможным не только пояснить целую область необыкновенных явлений, но и предсказать новые эффекты.

Анизотропные квазичастичные системы могут быть легко созданы в сверхтекучем гелии. Например, фононы, инжектированные нагревателем в сверхтекучий гелий, представляют собой анизотропную фононную систему, обнаруживающую весьма необычные свойства. На рис. 1 приведена принципиальная схема экспериментальной установки (см., например, [2-4]) для создания и изучения свойств сильно анизотропных фононных систем. Она содержит нагреватель и детектор, погруженные в жидкий ⁴He с температурой порядка 0,05 К. Нагревателем является металлическая пленка, напыленная на стекло. Когда короткий импульс тока проходит через металлическую пленку в сверхтекучий гелий, практически не имеющий при столь низких температурах своих собственных тепловых возбуждений, инжектируется фононный импульс, движущийся к детектору. Из-за малого импеданса границы твердое тело – гелий инжектированные фононы занимают в импульсном пространстве малый телесный угол Ω порядка 0,1 ср. Размеры такой сильно анизотропной фононной системы на начальном этапе эволюции определяются площадью нагревателя (порядка 1 мм × 1 мм) и длительностью теплового импульса. Продолжительность тепловых импульсов t_p составляет в типичных экспериментах порядка $10^{-5} - 10^{-7}$ с при выделяемой на нагревателе мощности порядка 10 мВт/мм².

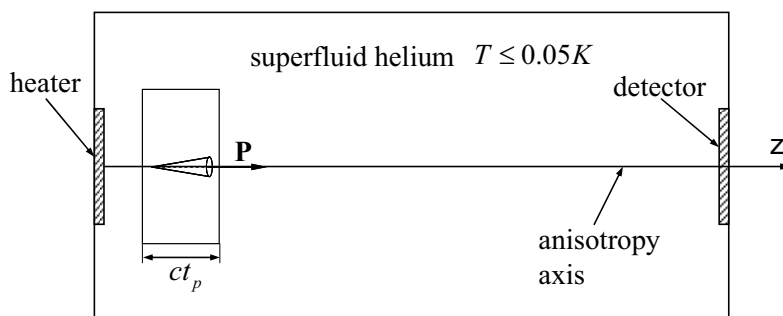


Рис. 1. Схема экспериментов по изучению анизотропных фононных систем.

Одним из необычных явлений является рождение фононов с высокой энергией в гелии низкоэнергетическими фононами, открытое экспериментально. Ключевую роль в объяснении этого эффекта играет явление аномальной дисперсии в сверхтекучем гелии. Оказывается, что при импульсах фононов $p < p_c$ вид спектра квазичастиц таков, что законы сохранения энергии и импульса разрешают процессы с несохранением числа фононов. Самым быстрым из них является трехфононный процесс (3рр), когда один фонон распадается на два или в результате взаимодействия двух фононов получается один. При $p > p_c$ дисперсия является нормальной и распадные процессы запрещены законами сохранения энергии и импульса, а самыми быстрыми являются четырехфононные процессы (4рр) рассеяния одного фонона другим.

Сильное неравенство между частотами трехфононных и четырехфононных процессов

$$v_{3pp} \gg v_{4pp} \quad (1)$$

приводит к тому, что фононы сверхтекучего гелия распадаются на две подсистемы: подсистему высокоэнергетических фононов (h-фононов) с $p > p_c$, в которой равновесие устанавливается относительно медленно и подсистему низкоэнергетических фононов (l-фононов) с $p < p_c$, в которой равновесие наступает быстро. В масштабах времен рассматриваемой задачи можно считать, что равновесие в подсистеме l-фононов наступает мгновенно и их распределение дается функцией Бозе-Эйнштейна с дрейфовой скоростью [5, 6].

Наличие двух фононных подсистем с разными временами релаксаций приводит к уникальным явлениям в анизотропных фононных системах He II. В экспериментах [2] впервые наблюдались удивительные явления: когда на нагреватель подавался один короткий импульс тока, то на детектор приходило два четко разделенных во времени фононных импульса (см. рис. 2). Первый из пришедших импульсов был образован l-фононами, а второй образован h-фононами. Из последующих экспериментов (см. [3, 4]) однозначно следовало, что h-фононный импульс был создан не на нагревателе, а был рожден l-фононным импульсом при его движении в He II от нагревателя к детектору. Теория этого уникального явления, когда относительно холодный l-фононный пучок, содержащий фононы с энергией $\varepsilon \sim 1$ К, рождает горячие фононы с энергией $\varepsilon_c \geq 10$ К была впервые построена в работах [7-9].

Согласно результатам полученным в статьях [7-9] в l-фононном пучке, сформированном быстрыми 3рр-процессами, за счет медленных 4рр процессов с частотой v_{4pp} рождаются h-фононы, групповая скорость которых $1,89 \cdot 10^4$ см/сек меньше скорости движения l-фононного импульса $2,38 \cdot 10^4$ см/сек.

Разница в групповых скоростях и относительно слабая связь h-фононов с l-фононами ($v_{3pp} \gg v_{4pp}$) приводит к тому, что h-фононы уходят через заднюю стенку l-фононного пучка и формируют второй (h-фононный) импульс, который приходит на детектор вслед за l-фононным импульсом.

В данной работе мы получим основные результаты теории рождения высокоэнергетических фононов. В частности, обсудим локально-квазиравновесную функцию распределения квазичастиц в пучке, а также связанные с ней энергетические и угловые распределения для различных квазичастичных подсистем. Рассмотрим основные характеристики трехфононных процессов. Вычислим частоту трехфононной релаксации в анизотропной фононной системе и проанализируем наблюдаемое в экспериментах взаимодействие пересекающихся фононных пучков в зависимости от угла между пучками и давления в гелии. Определив частоту четырехфононных процессов в анизотропной фононной системе, мы сможем объяснить основные факты, наблюдаемые в процессах рождения высокоэнергетических фононов.

РАВНОВЕСНАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ КВАЗИЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ

Для изотропных квазичастичных систем выделенное направление отсутствует – все направления в пространстве эквивалентны. В этом случае одночастичная функция распределения квазичастиц зависит от модуля импульса, поэтому плотность импульса квазичастиц равна нулю.

Анизотропные квазичастичные системы имеют выделенное направление в импульсном пространстве, функция распределения n зависит от вектора импульса и плотность импульса \mathbf{P} ,

$$\mathbf{P} = \int_{\Gamma_p} \mathbf{p} n(\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (2)$$

не равна нулю (здесь Γ_p - область интегрирования в импульсном пространстве).

Равновесная функция распределения анизотропной квазичастичной системы должна обращать в нуль

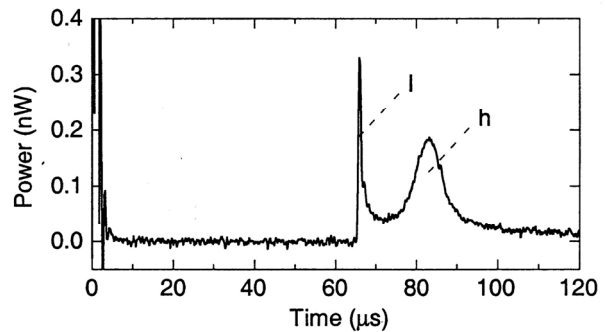


Рис. 2. Измеренный на болометре фононный сигнал из работы [3].

интеграл столкновений. Кроме того, плотность импульса не должна равняться нулю. Этим условиям удовлетворяет функция распределения Бозе-Эйнштейна, зависящая от энергии $\varepsilon = \varepsilon(p)$ квазичастиц, температуры T и дрейфовой скорости \mathbf{u} :

$$n(\mathbf{p}) = \left[\exp\left(\frac{\varepsilon(p) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}}{k_B T}\right) - 1 \right]^{-1}. \quad (3)$$

Функция распределения n должна быть положительна. Поэтому дрейфовая скорость u может меняться вплоть до минимальной величины фазовой скорости квазичастиц, образующих систему:

$$0 \leq u \leq u_{\max}, \quad \text{где } u_{\max} = \left(\frac{\varepsilon(p)}{p}\right)_{\min}. \quad (4)$$

Дисперсионное соотношение для сверхтекучего гелия хорошо известно [10]. Его фоновую часть, $\varepsilon_{ph}(p)$, имеющую почти линейную зависимость, представим в виде:

$$\varepsilon_{ph}(p) = cp(1 + \psi(p)), \quad (5)$$

где $\varepsilon_{ph}(p)$ – энергия фонона, p – его импульс, c – скорость звука в He II.

Функция $\psi(p)$, описывающая отклонение от линейности в зависимости энергии фонона от импульса, мала, $|\psi(p)| \ll 1$ (см. рис. 3). Тем не менее эта величина определяет тип и силу фоновых взаимодействий. Согласно имеющимся экспериментальным данным [11, 12], при не очень высоком давлении, функция $\psi(p)$ положительна для фононов с импульсами $0 < p < p_c$ (см. рис. 3). Это область импульсов низкоэнергетических фононов (l-фононов), когда самый быстрый процесс это трех фононный процесс (3рр) распада одного фонона на два и обратный ему процесс слияния двух фононов в один. Для высокоэнергетических фононов с импульсами $p > p_c$ (h-фононов), функция $\psi(p)$ отрицательна, поэтому 3рр запрещены законами сохранения. Самыми быстрыми процессами для h-фононов являются процессы рассеяния фонона фононом (4рр). Отметим, что при давлении насыщенного пара $\tilde{p}_c = cp_c / k_B = 10 \text{ K}$ [13].

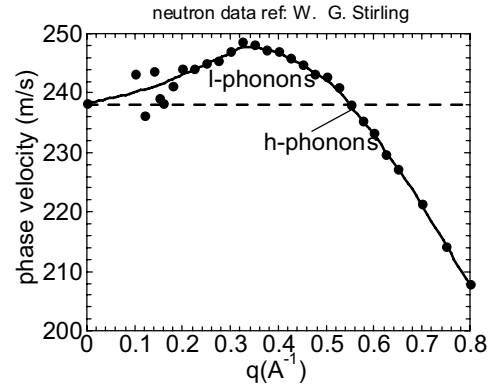


Рис. 3. Фазовая скорость фононов из работы [12] при давлении насыщенного пара.

Расчеты в данной работе проведены с помощью простой аналитической аппроксимации функции $\psi(p)$:

$$\psi(p) = \alpha \frac{c - v_c}{2c} \frac{p^2}{p_c^2} \left(1 - \frac{p^2}{p_c^2}\right), \quad (6)$$

где $\alpha = 1,76$ – численный коэффициент, p_c – критическое значение импульса, $v_c = \partial\varepsilon/\partial p|_{p=p_c}$ – групповая скорость фононов, имеющих импульс $p = p_c$. Для давления насыщенного пара имеем $c = 2,38 \cdot 10^4 \text{ см/с}$, $v_c = 1,89 \cdot 10^4 \text{ см/с}$.

Ротонная часть спектра $\varepsilon_r(p)$ может быть описана параболой:

$$\varepsilon_r(p) = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2\mu}, \quad (7)$$

где параметры ротонного спектра при давлении насыщенного пара равны $\Delta/k_B = 8,71 \text{ K}$, $p_0/\hbar = 1,91 \text{ Å}^{-1}$, $\mu = 0,161 m_4$, а m_4 – атомная масса ${}^4\text{He}$ [14].

Как следует из соотношений (4)-(7), для фоновых систем минимальная фазовая скорость u_{ph} близка к скорости звука c . Для фоновых систем минимальная фазовая скорость $u_r \approx \Delta/p_0$ определяется ротонным минимумом.

Кроме условий (4), дрейфовая скорость должна принадлежать области термодинамической устойчивости сверхтекучего гелия, имеющей простой физический смысл. В этой области любая совместимая с законами сохранения флуктуация термодинамических переменных сверхтекучего гелия должна сопровождаться уменьшением полной энтропии системы, что соответствует устойчивому состоянию. Общие термодинамические неравенства [15, 16], примененные к сверхтекучему гелию, определяют линию термодинамической устойчивости $u = u_{st}(T)$ для анизотропных фоновых и фоновых систем [17, 18]. Результаты расчетов представлены на

рис. 4. При $T = 0$, как видно из рис. 4, соответствующая максимальная дрейфовая скорость совпадает с критической скоростью Ландау для данной квазичастичной системы. С увеличением температуры максимальная

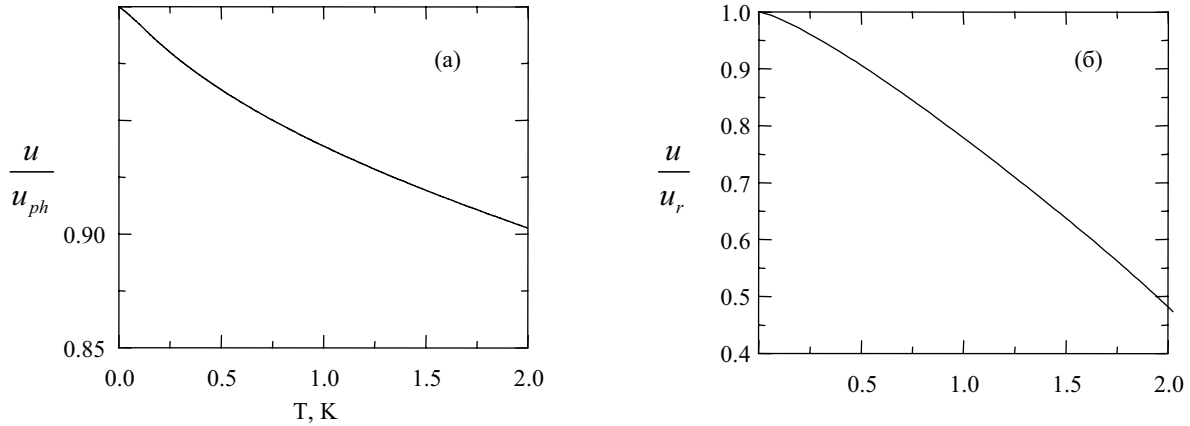


Рис. 4. Максимальная термодинамически устойчивая дрейфовая скорость u , отнесенная к u_{\max} . (а) – анизотропная фононная, (б) – фонон-ротонная система.

дрейфовая скорость монотонно уменьшается, оставаясь, впрочем, близкой к u_{\max} для температур вплоть до $T \sim 1$ K. Таким образом, сильно анизотропные фононные (см. рис. 4а) и фонон-ротонные системы (см. рис. 4б) термодинамически стабильны вплоть до высоких температур.

Квазиравновесное состояние реализуется в пучке фононов, если время релаксации $\tau_{ph}(\varepsilon)$ меньше, чем продолжительность импульса t_p . Вычисления частот релаксации $\tau_{ph}(\varepsilon)$ фонона с энергией ε в анизотропной фононной системе показывает, что в достаточно длинных пучках ($t_p > 10^{-7}$ с), имеются фононы с энергией вплоть до 11 K в квазиравновесном состоянии (см. раздел посвященный частоте релаксации h-фонона в анизотропной фононной системе). Поэтому квазиравновесная фононная система может быть описана распределением Бозе-Эйнштейна для фононов с импульсом $\tilde{p}_f < 11$ K.

Для выяснения физического смысла дрейфовой скорости \mathbf{u} рассмотрим среднюю скорость квазичастиц в системе с $p < p_f$, характеризуемой функцией распределения (3):

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\int_{p < p_f} d^3 p \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} n}{\int_{p < p_f} d^3 p n} = \mathbf{u} + k_B T \frac{\int_{p < p_f} d^3 p \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{\varepsilon - \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}}{k_B T} \right) \right]}{\int_{p < p_f} d^3 p n}. \quad (8)$$

Преобразуя интеграл в правой части соотношения (8) в интеграл по сфере $p = p_f$ и выполняя интегрирование по углам в числителе и знаменателе, получим

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}}{u} k_B T p_f \frac{L_2 \left(\frac{\varepsilon_f - p_f u}{k_B T} \right) + L_2 \left(\frac{\varepsilon_f + p_f u}{k_B T} \right) - \frac{k_B T}{p_f u} \left[L_3 \left(\frac{\varepsilon_f - p_f u}{k_B T} \right) - L_3 \left(\frac{\varepsilon_f + p_f u}{k_B T} \right) \right]}{\int_0^{p_f} dp p \left\{ \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{\varepsilon - pu}{k_B T} \right) \right] - \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{\varepsilon + pu}{k_B T} \right) \right] \right\}}, \quad (9)$$

где мы ввели специальную функцию порядка α

$$L_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\exp(-nx)}{n^\alpha}. \quad (10)$$

Для фонон-ротонной системы вкладом второго слагаемого в соотношении (9) можно пренебречь даже для $u \sim u_{\max}$ и мы получаем, что в этом случае дрейфовая скорость \mathbf{u} равна средней скорости квазичастиц $\langle \mathbf{v} \rangle$. Аналогичная ситуация для слабо анизотропных фононных систем. Для сильно анизотропной фононной системы, когда $u \sim u_{\max}$, вкладом второго слагаемого в формуле (9) в общем случае пренебрегать нельзя. Таким образом, для сильно анизотропных фононных систем дрейфовая скорость \mathbf{u} не совпадает со средней скоростью квазичастиц.

Пусть $\zeta = 1 - \cos \theta$, где θ - угол между фононным импульсом \mathbf{p} и осью анизотропии z фононной системы, направленной вдоль вектора дрейфовой скорости \mathbf{u} . Кроме того, удобно ввести параметр анизотропии $\chi = 1 - u/c$. Тогда квазиравновесную фононную функцию распределения n_u можно переписать следующим образом:

$$n_c(p, \zeta) = \left[\exp \left(\frac{cp}{k_B T} \{ \chi + \psi(p) + \zeta(1 - \chi) \} \right) - 1 \right]^{-1}. \quad (11)$$

Для изотропных фононных систем параметр анизотропии χ равен единице, поэтому выражение в фигурных скобках в экспоненте формулы (11) близко к единице. Для сильно анизотропных фононных систем параметр анизотропии $\chi \ll 1$. Функция $\psi(p)$ также мала, поэтому выражение в фигурных скобках в экспоненте формулы (11) сильно меняется при изменении ζ от нулевого значения до двух. В результате, когда угол θ мал мы получаем большое число фононов, а когда велик – малое. Таким образом, функция распределения (11) соответствует сильно анизотропной фононной системе. Эта ситуация в импульсном пространстве показана на схематическом рис. 5а для типичных экспериментальных значений $\chi = 0,04$, $T = 0,05$ К и $\tilde{p}_f = 11$ К.

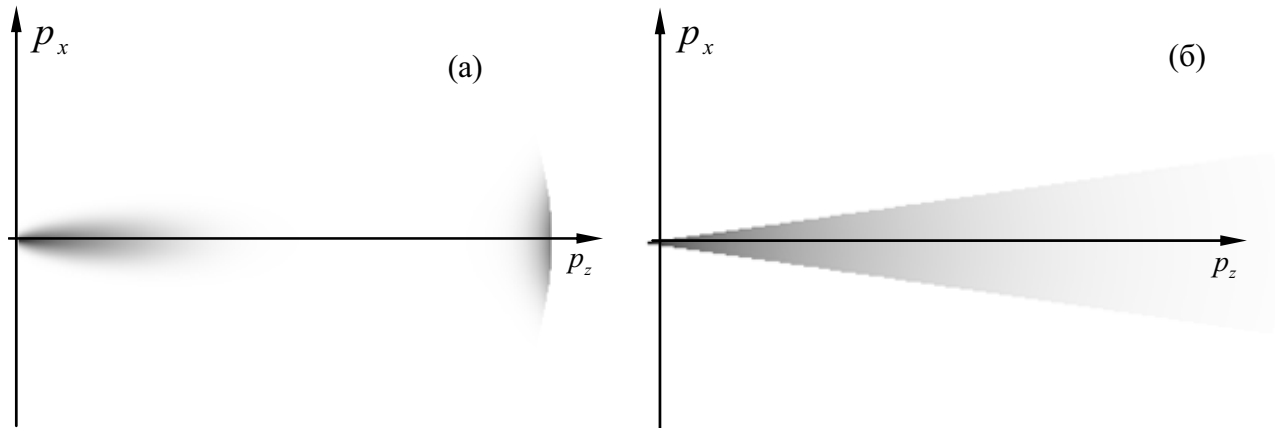


Рис. 5. Функция распределения анизотропной фононной системы. (а) – распределение Бозе-Эйнштейна с типичными экспериментальными значениями $\chi = 0,04$, $T = 0,05$ К и $\tilde{p}_f = 11$ К. (б) – Бозе-конусное распределения с параметрами $\theta_c = 12^\circ$ и $T_p = 1$.

В направлении близком к оси анизотропии имеется большое число высокоэнергетических фононов с энергией превышающей 10 К, поскольку для этих фононов функция $\psi(p)$, убывая с ростом p , становится отрицательной и вычитается из χ в функции распределения (11). В результате, выражение в фигурных скобках в экспоненте формулы (11) принимает наименьшее значение для h-фононов. Большое число высокоэнергетических фононов, реализующееся в длинных фононных пучках, мы называем супратермальным распределением.

В направлении перпендикулярном оси z такое же самое число фононов, как и случае изотропного распределения при $T = 0,05$ К, поскольку в перпендикулярном направлении $\zeta = 1$ и выражение в фигурных скобках в экспоненте формулы (11) близко к единице. При этой температуре число фононов очень мало. Таким образом, получается необычная ситуация для сильно анизотропной фононной системы: температура пучка может быть ниже, чем температура сверхтекучего гелия в который фононы инжектируются и в тоже время в пучке гораздо больше фононов чем в самом гелии.

Мы можем определить конус в импульсном пространстве, вырезанный из изотропного распределения Бозе-Эйнштейна для фононов (см. рис. 5б):

$$n_c(p, \theta) = \frac{\eta(\theta_c - \theta)}{\exp \left\{ \frac{cp}{k_B T_p} \right\} - 1}. \quad (12)$$

Если этот конус имеет угол $\theta_c = 12^\circ$ при вершине и температура T_p изотропного распределения равна 1 К, тогда плотность энергии и плотность импульса такая же, как и для анизотропной фононной системы с типичными параметрами $\chi = 0,04$ и $T = 0,05$ К (см. рис. 5а). Функцию распределения $n_c(p, \theta)$, включающую ступенчатую функцию η , можно назвать приближением Бозе-конуса. Конусное приближение, использованное впервые в работе [7], имеет более простую угловую и импульсную зависимость, и в тоже время содержит необходимое число параметров – температуру и угловую ширину, определяющие анизотропную систему, поэтому это приближение использовалось в основном в ранних теоретических работах посвященных описанию анизотропных фононных систем. Однако, существует целый ряд явлений, например, эффект рождения “горячей линии”, возникающей при пересечении под малыми углами двух фононных пучков, для правильного понимания которых необходимо использовать точное дрейфовое распределение. Заметим также, что в конусном приближении супратермальное распределение отсутствует.

УГЛОВЫЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ КВАЗИЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ

Используя выражение (3) можно получить энергетическое распределение $\frac{dE}{dp}$, справедливое для любой квазиравновесной квазичастичной системы с любой степенью анизотропии [17]:

$$\frac{dE}{dp} = \frac{\varepsilon p^2}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^2 n(p, \zeta) d\zeta = -\frac{k_B T p \varepsilon}{4\pi^2 \hbar^3 u} \left\{ \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{\varepsilon(p) - pu}{k_B T} \right) \right] - \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{\varepsilon(p) + pu}{k_B T} \right) \right] \right\}. \quad (13)$$

На рис. 6а представлено энергетическое распределение для анизотропной фононной системы с типичными

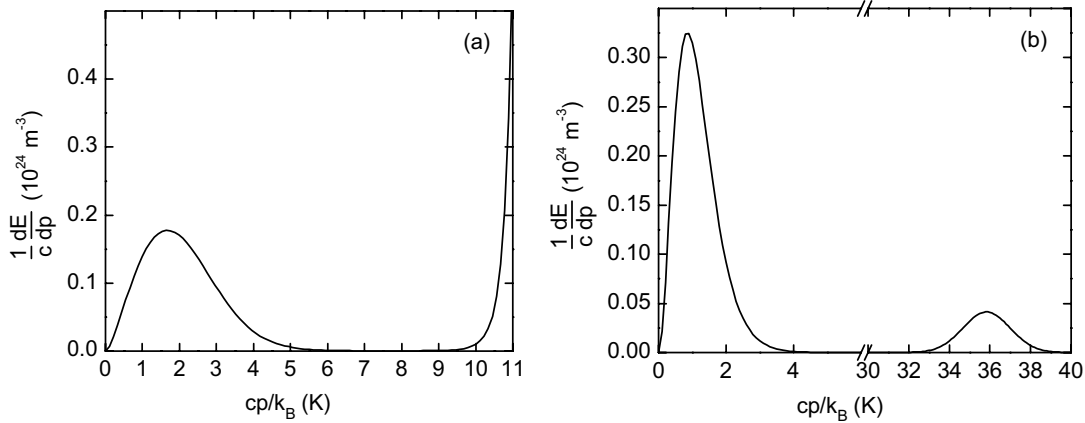


Рис. 6. Импульсная зависимость распределения энергии. (а) - для сильно анизотропной фононной системы для типичных экспериментальных значений $\chi = 0,04$, $T = 0,05$ К. (б) - для сильно анизотропной фонон-ротонной системы с параметрами $T = 0,3$ К и $u/u_r = 0,63$, что соответствует той же самой плотности энергии и импульса, что и для фононной системы на рис. 6а.

параметрами $\chi = 0,04$ и $T = 0,05$ К. Как хорошо известно, энергетическое распределение, соответствующее изотропной Бозе-функции, имеет один максимум. Для сильно анизотропной фононной системы с типичными величинами χ и T , мы имеем две практически разделенных системы: подсистема низкоэнергетических фононов, образующих первый максимум и подсистема высокоэнергетических фононов, формирующих второй максимум. Подчеркнем, что второй максимум обусловлен убыванием функции $\psi(p)$ для h-фононов и малостью величины χ , что соответствует сильной анизотропии фононной системы. Энергетическое распределение для анизотропной фонон-ротонной системы с $T = 0,3$ К и $u/u_r = 0,63$, что соответствует той же самой плотности энергии и импульса, что и для фононной системы на рис. 6а, представлено на рис. 6б. Несмотря на малость температуры,

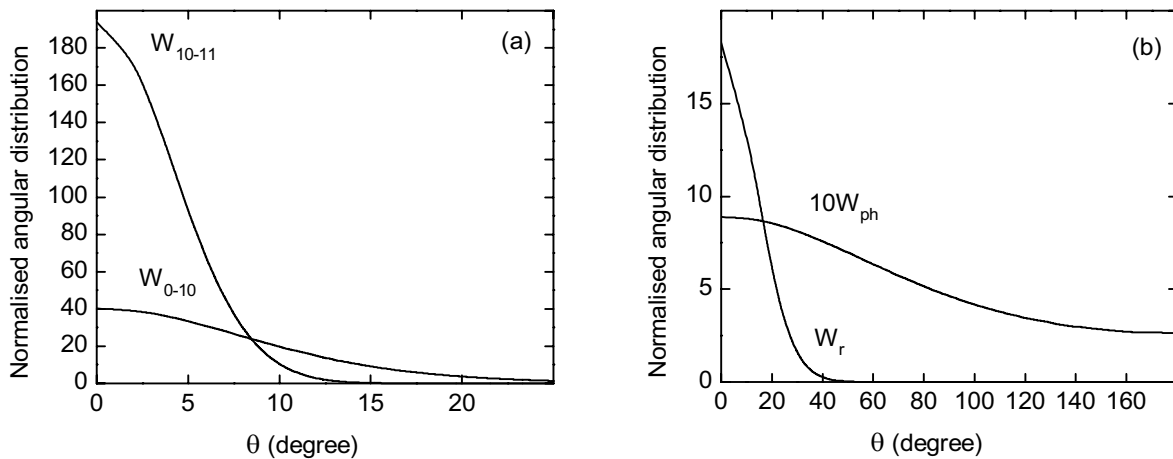


Рис. 7. Нормированное угловое распределение. (а) - для l- и h-фононной подсистем, формирующих первый и второй максимумы на рис. 6а. (б) - для фононной и ротонной подсистем, соответствующим первому и второму максимумам на рис. 6б.

плотность энергии ротонов оказывается очень высокой по сравнению с плотность энергии ротонов для изотропного

случая с $u = 0$ и $T = 0,3$ К. Анизотропные фонон-ротонные системы должны формироваться в достаточно длинных пучках в сверхтекучем гелии и реализуются в узких каналах, заполненных протекающим с большой скоростью сверхтекучим гелием (см., например, [19]).

Нормированное угловое распределение, характеризующее анизотропию квазичастичной системы, естественно определить следующим образом:

$$W_{p_1-p_2}(\zeta) = \frac{\int_{p_2}^{P_2} \varepsilon n(p, \zeta) p^2 dp}{\int d\zeta \int_{p_1}^{P_2} \varepsilon n(p, \zeta) p^2 dp}. \quad (14)$$

На рис. 7 приведены угловые распределения $W_{p_1-p_2}(\zeta)$ для для l- и h-фононов (рис. 7а), формирующих первый и второй максимумы на рис. 6а, а также для фононной и ротонной подсистем (рис. 7б), соответствующих первому и второму максимумам на рис. 6б. Отметим, что h-фононы концентрируются вблизи оси анизотропии, то есть имеют более узкое угловое распределение чем l-фононы. Подобное поведение было впервые обнаружено в экспериментах [20]. Из рис. 7б видно, что в равновесной анизотропной фонон-ротонной системе фононы формируют слабо анизотропный фон, в то время как ротонная система сильно анизотропна. Интересно отметить, что в приведенном случае энергия системы сосредоточена в основном в фононной системе, а импульс главным образом в ротонной.

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРЕХФОНОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Определяющую роль при изучении трехфононных процессов играет дисперсионное соотношение (5). Так как в экспериментах [21, 22] реализуются различные давления, то необходимо учесть зависимость от давления величин входящих в выражение (6).

Заметим, что выражение (6) справедливо в области $p < p_c$ для любых давлений, вплоть до давления $P = 19$ бар – давления, при котором дисперсия становится нормальной. Для того чтобы пользоваться выражением (6) при различных давлениях, необходимо иметь зависимости $c(P)$, $v_c(P)$ и $\tilde{p}_c(P)$, которые можно записать в виде

$$c(P) = 10^2 (238,3 + 7,33146P - 0,09141P^2), \quad (15)$$

$$v_c(P) = 10^2 (189 + 12,29927P - 0,22279P^2), \quad (16)$$

$$\tilde{p}_c(P) = 10 - 0,20915P - 0,01669P^2. \quad (17)$$

Выражение (15) было получено нами в работе [6] из анализа экспериментальных данных [23], (16) из [24], а (17) из [11, 13, 25-27]. В приведенных здесь и ниже зависимостях все величины берутся в системе СГС, а \tilde{p}_c измеряется в кельвинах.

Приведем также зависимости плотности гелия $\rho(P)$ и постоянной Грюнайзена $u = (\rho/c)(\partial c/\partial \rho)$ от давления, так как они понадобятся нам при дальнейших расчетах:

$$\rho(P) = 0,14513 + 0,00171P - 3,7661 \cdot 10^{-5} P^2 + 5,29924 \cdot 10^{-7} P^3, \quad (18)$$

$$u(P) = 2,84 - 0,05537P + 0,00201P^2 - 3,24998 \cdot 10^{-5} P^3. \quad (19)$$

Эти зависимости были найдены в [6] из экспериментальных данных работы [23].

Заметим, что трехфононные процессы протекают не до самой точки раздела p_c . Действительно, из законов сохранения импульса и энергии, которые должны выполняться при таких процессах,

$$\mathbf{p}' + \mathbf{p}'' = \mathbf{p}, \quad (20)$$

$$\varepsilon(p') + \varepsilon(p'') = \varepsilon(p), \quad (21)$$

а также выражения (5) получим ограничения на импульсы взаимодействующих фононов. Для этого, исходя из (5), (20) и (21), вычислим углы между фононами с импульсами \mathbf{p}' , \mathbf{p}'' и \mathbf{p} , \mathbf{p}' . Имеем:

$$\zeta_{p'p''} = \frac{p' + p''}{p'p''} ((p' + p'')\psi(p' + p'') - p'\psi(p') - p''\psi(p'')), \quad (22)$$

$$\zeta_{pp'} = \frac{p - p'}{pp'} (p\psi(p) - p'\psi(p') - (p - p')\psi(p - p')), \quad (23)$$

где $\zeta_{p'p''} = 1 - \cos \theta_{p'p''}$, $\zeta_{pp'} = 1 - \cos \theta_{pp'}$, а $\theta_{p'p''}$, $\theta_{pp'}$ – углы между \mathbf{p}' , \mathbf{p}'' и \mathbf{p} , \mathbf{p}' соответственно.

Заметим, что величины $\zeta_{p'p''}$ и $\zeta_{pp'}$ должны быть неотрицательными, для того чтоб трехфононные процессы были разрешены законами сохранения (20) и (21). Положив величины $\zeta_{p'p''}$ и $\zeta_{pp'}$ равными нулю, получим границы областей, в которых могут протекать трехфононные процессы.

Подставляя (6) в (23) и приравнявая полученное выражение нулю, получим уравнение четвертой степени относительно $p'(p)$. Его решения:

$$p'_{\pm}(p) = \frac{1}{2} \left(p \pm \sqrt{3} \sqrt{p_{\max}^2 - p^2} \right), \quad p'(p) = p, \quad (24)$$

где

$$p_{\max} = \sqrt{\frac{4}{5}} p_c. \quad (25)$$

Заметим, что выписано только три решения полученного нами уравнения четвертой степени. Это связано с тем, что решение $p'(p) = p$ является корнем второго порядка.

Приравняв теперь нулю выражение (22), после подстановки в него соотношения (6), получим уравнение четвертой степени относительно $p'(p'')$. Решив указанное уравнение, получим:

$$p'_{\pm}(p'') = \frac{1}{2} \left(-p'' \pm \sqrt{3} \sqrt{p_{\max}^2 - p''^2} \right), \quad p'(p'') = -p''. \quad (26)$$

Здесь решение $p'(p'') = -p''$ также является корнем второго порядка. Заметим, что единственным физическим решением в этом случае является $p'_+(p'')$, т.к. остальные решения приводят к тому, что один или оба импульса оказываются отрицательными.

Соотношения (24)-(26) определяют границы областей, где разрешены трехфононные процессы. На рис. 8 а, б, исходя из (24) и (26), показаны области, где разрешены трехфононные процессы (они заштрихованы). Заметим, что в безразмерных переменных, отнормированных на p_c , вид указанных областей не зависит от давления.

Из соотношений (24)-(26) (см. рис. 8) следует, что значения импульсов фононов, участвующих в трехфононных процессах, могут изменяться в интервалах:

$$0 < (p', p'') < \sqrt{\frac{3}{5}} p_c = p_{\min}, \quad (27)$$

$$0 < p < p_{\max}. \quad (28)$$

При давлении насыщенного пара имеем $\tilde{p}_{\min} = 7,7$ К, а $\tilde{p}_{\max} = 8,9$ К.

Покажем, что p_{\min} и p_{\max} могут быть также выражены через функцию ψ и ее первую производную. Действительно, из законов сохранения (20) и (21) следует, что при $p' \rightarrow p_{\min}$, $p'' \rightarrow 0$. В силу того, что $p'' \rightarrow 0$,

из (20) находим, что $p' = p$, а следовательно $\zeta_{pp'} = 0$. Тогда, с учетом того, что $p \rightarrow p_{\min} + p''$, разложим выражение (20) в ряд по p'' . В итоге получим:

$$\left. \{ \psi + p d\psi/dp \} \right|_{p=p_{\min}} = 0. \quad (29)$$

Отсюда, воспользовавшись выражением (6), получаем результат (27) для p_{\min} .

Заметим, что максимальный импульс фонона p , который получается в результате слияния фононов p' и p'' , согласно [28], определяется равенством

$$\psi(p_{\max}/2) = \psi(p_{\max}). \quad (30)$$

Откуда, с учетом (6) получаем соотношение (25).

Граничные значения импульсов фононов, участвующих в трехчастичных процессах, изучались в работах [11, 28-33]. В работе [31], была изображена область аналогичная приведенной на рис.8а. Однако она имела вид, несколько отличающийся от рис. 8а. Это связано с тем, что использовалась другая, менее адекватная экспериментам аппроксимация фононного спектра, исходя из которой были проведены компьютерные

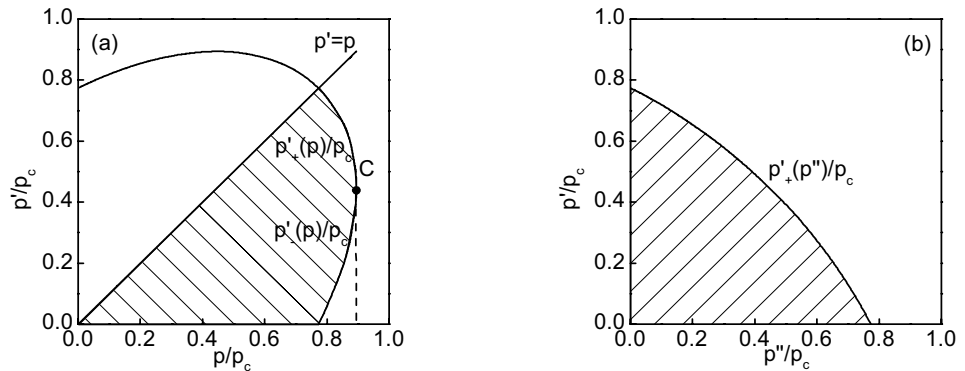


Рис. 8. Ограничения на импульсы фононов участвующих в трехфононных процессах. (а) – переменные p'/p_c и p/p_c . (б) - переменные p'/p_c и p''/p_c . Трехфононные процессы разрешены в заштрихованных областях.

вычисления.

Плотность вероятности трехчастичного процесса, согласно [34], может быть представлена в виде

$$W(\mathbf{p}|\mathbf{p}'\mathbf{p}'') = \frac{\pi \cdot c}{\rho \cdot \hbar} pp'p''(u+1)^2 \delta_{\mathbf{p}'+\mathbf{p}'',\mathbf{p}}. \quad (31)$$

Из (31) видно, что плотность вероятности не зависит от углов между импульсами взаимодействующих фононов всегда, когда такие процессы разрешены законами сохранения (20) и (21). Согласно (31), наиболее вероятным является процесс, при котором

$$\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon/2. \quad (32)$$

Рассчитаем исходя из соотношения (22) угол между фононами с импульсами \mathbf{p}' и \mathbf{p}'' как функцию p и соотношения между импульсами фононов p' и p'' . Для этого нам понадобятся зависимости p' и p'' от p и $m = p'/p''$, которые, согласно (24), в нулевом приближении по ψ , записываются в виде:

$$p' = \frac{m}{m+1} p, p'' = \frac{1}{m+1} p. \quad (33)$$

Подставим (6) с учетом (33) в (22). Разложив в полученном выражении $\zeta_{p'p''}$ в ряд по малому параметру $\theta_{p'p''}$ и ограничиваясь квадратичным членом получим:

$$\theta_{p'p''} = \sqrt{8\psi_{\max} \frac{p^2}{p_c^2} \left(3 - 5 \frac{p^2}{p_c^2} \left(1 - \frac{m}{(m+1)^2} \right) \right)}. \quad (34)$$

Из (34) следует, что при фиксированном m функция $\theta_{p'p''}$ достигает максимального значения

$$\theta_{p'p''}(p = p_{\theta_{\max}}) = 3(m+1) \sqrt{\frac{2\psi_{\max}}{5(m^2 + m + 1)}}, \quad (35)$$

при

$$p_{\theta_{\max}} = \sqrt{\frac{3}{10}} \frac{m+1}{\sqrt{m^2 + m + 1}} p_c. \quad (36)$$

Согласно (35), наибольшего значения функция $\theta_{p'p''}$ достигает при $m=1$, т.е. при выполнении условия (32). Заметим, что при $m=1$

$$p_{\theta_{\max}} = \sqrt{\frac{2}{5}} p_c, \theta_{p'p''\max} = \sqrt{\frac{24}{5}} \psi_{\max}. \quad (37)$$

На рис. 9 изображена полученная нами, исходя из выражения (34) зависимость отношения $\theta_{p'p''}/\theta_{p'p''\max}$ от p/p_c при различных соотношениях между импульсами фононов p' и p'' . Здесь $\theta_{p'p''\max}$ – максимальный угол между импульсами фононов, участвующих в трехфононном процессе, который определяется равенством (37). Заметим, что в указанных переменных вид этой зависимости не зависит от давления.

С ростом давления максимальный угол, под которым идут трехчастичные процессы, уменьшается. Это, как видно из (37), объясняется тем, что происходит уменьшение ψ_{\max} . Наряду с этим при увеличении давления, уменьшается значение p_c , определяющее максимальные значения импульсов фононов, которые могут участвовать в трехчастичных взаимодействиях. Эти два фактора ведут к сильному сокращению объема импульсного пространства, в котором трехфононные процессы разрешены законами сохранения энергии и импульса.

ЧАСТОТЫ ТРЕХФОНОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ИЗОТРОПНЫХ ФОНОННЫХ СИСТЕМАХ

Частоты трехфононных процессов в изотропных фононных системах в случае давления насыщенного пара были вычислены в [34], а в случае различных давлений в изотропных и анизотропных фононных системах в [6, 35]. Причем в [35] использовалось для расчетов конусное приближение для фононной функции

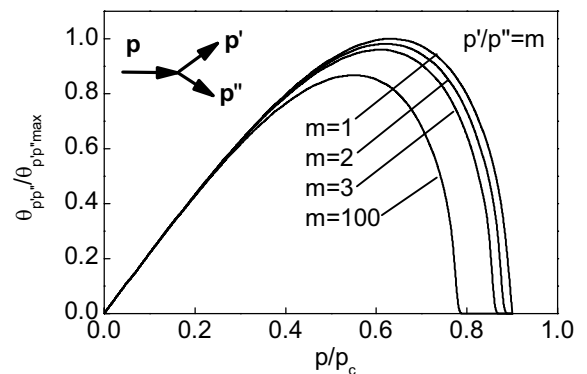


Рис. 9. Зависимость угла между образовавшимися фононами с импульсами p' и p'' от импульса p распадающегося фонона для различных отношений импульсов образовавшихся фононов $m = p'/p''$.

распределения. Поскольку эксперименты [22] проводились при давлениях 0, 5, 12 и 18 бар, то нас особо будут интересовать именно эти значения давлений.

Для нахождения частот трехфононных процессов мы будем следовать схеме работы [6]. Исходя из кинетического уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{dt} = & \frac{1}{2} \int \frac{W(\mathbf{p}_1 | \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3)}{(2\pi\hbar)^3} [n_2 n_3 (1+n_1) - n_1 (1+n_2)(1+n_3)] \delta(\varepsilon(\mathbf{p}_1) - \varepsilon(\mathbf{p}_2) - \varepsilon(\mathbf{p}_3)) \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) d^3 p_2 d^3 p_3 + \\ & + \int \frac{W(\mathbf{p}_3 | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2)}{(2\pi\hbar)^3} [n_3 (1+n_1)(1+n_2) - n_1 n_2 (1+n_3)] \delta(\varepsilon(\mathbf{p}_3) - \varepsilon(\mathbf{p}_1) - \varepsilon(\mathbf{p}_2)) \delta(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) d^3 p_2 d^3 p_3 \end{aligned} \quad (38)$$

где $n_i = n(\mathbf{p}_i)$ – число фононов в заданном квантовом состоянии, а $W(\mathbf{p}_3 | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2)$ – плотность вероятности переходов в фазовом пространстве, которая определяется выражением (31).

Для определения характерной частоты трехфононных процессов в изотропных фононных системах положим в уравнении (38):

$$n_1 = n_{10} + \delta n, \quad n_2 = n_{20}, \quad n_3 = n_{30}, \quad (39)$$

где индекс «0» указывает на равновесное распределение

$$n_0(p) = \left(\exp\left(\frac{\varepsilon(p)}{k_B T}\right) - 1 \right)^{-1}, \quad (40)$$

а δn – отклонение функции распределения от равновесной.

Далее, характерную частоту трехфононных процессов ν_{3pp} естественно определить соотношением:

$$\nu_{3pp}(\mathbf{p}_1) = -\frac{1}{\delta n} \frac{d\delta n}{dt}. \quad (41)$$

Исходя из выражений (31), (38)-(41) получим:

$$\nu_{3pp}(\mathbf{p}_1) = \frac{(u+1)^2}{4\pi\rho\hbar^4} \left\{ \frac{1}{2} J_1(\mathbf{p}_1) + J_2(\mathbf{p}_1) \right\}, \quad (42)$$

где

$$J_1(\mathbf{p}_1) = \frac{c p_1}{n_{10}} \int_0^{p_1} dp_2 \int_0^2 d\zeta_{12} p_2^3 |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2| n_0(p_2) n_0(p_1 - p_2) \delta(\varepsilon(p_1) - \varepsilon(p_2) - \varepsilon(|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|)), \quad (43)$$

$$J_2(\mathbf{p}_1) = c p_1 \int_{p_1}^{p_{\max}} dp_3 \int_0^2 d\zeta_{13} p_3^3 |\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1| \{n_0(p_3 - p_1) - n_0(p_3)\} \delta(\varepsilon(p_3) - \varepsilon(p_1) - \varepsilon(|\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1|)). \quad (44)$$

Здесь

$$\zeta_{12} = 1 - \frac{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}{p_1 p_2}, \quad (45)$$

$$\zeta_{13} = 1 - \frac{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_3}{p_1 p_3}. \quad (46)$$

Исключая δ -функции в уравнениях (43) и (44) путем интегрирования по ζ_{12} , ζ_{13} , получаем для $\nu_{3pp}(\mathbf{p}_1)$ из (42) следующее соотношение:

$$\nu_{3pp}(\tilde{p}_1) = \frac{(u+1)^2}{4\pi\rho\hbar^4} \left(\frac{k_B}{c} \right)^5 \left\{ \frac{1}{2} \xi(\tilde{p}_1) + \beta(\tilde{p}_1) \right\}, \quad (47)$$

где $\tilde{p}_i = \frac{c p_i}{k_B}$,

$$\xi(\tilde{p}_1) = \int_0^{\tilde{p}_1} d\tilde{p}_2 \tilde{p}_2^2 (\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2)^2 (1 + 2n_0(\tilde{p}_2)) \eta(\zeta(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)), \quad (48)$$

$$\beta(\tilde{p}_1) = \int_{\tilde{p}_1}^{\tilde{p}_{\max}} d\tilde{p}_3 \tilde{p}_3^2 (\tilde{p}_3 - \tilde{p}_1)^2 \{n_0(\tilde{p}_3 - \tilde{p}_1) - n_0(\tilde{p}_3)\} \eta(\zeta(\tilde{p}_3, \tilde{p}_1)). \quad (49)$$

Здесь

$$\zeta(\tilde{p}_i, \tilde{p}_j) = \frac{\tilde{p}_i - \tilde{p}_j}{\tilde{p}_i \tilde{p}_j} (\tilde{p}_i \psi(\tilde{p}_i) - \tilde{p}_j \psi(\tilde{p}_j) - (\tilde{p}_i - \tilde{p}_j) \psi(\tilde{p}_i - \tilde{p}_j)), \quad (50)$$

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (51)$$

Выражение (47) с учетом (48)-(51) полностью определяет характерную частоту трехфононной релаксации в изотропной фононной системе. Отметим тот факт, что конечный результат (47) содержит параметры нелинейности фононного спектра в He II. Математически этот факт выражается в наличии η -функций, которые фактически ограничивают область интегрирования. Заметим, что именно указанные η -функции обеспечивают достаточно быстрое обращение частот в нуль вблизи граничного импульса p_{\max} .

Исходя из выражения (47), получим аналитическое выражение для частоты трехфононной релаксации в случае когда $p_{\min} < p_1 < p_{\max}$. Для импульсов $p_1 > p_{\min}$ слагаемое $\beta(\tilde{p}_1)$ равняется нулю, т.к. фононы с импульсом $p_1 > p_{\min}$ не могут участвовать в процессах слияния (см. рис. 8b). В этом случае в выражении (47) у нас останется только слагаемое $\xi(\tilde{p}_1)$, которое определяется выражением (48). Оно соответствует распаду фонона с импульсом p_1 . Заметим, что слагаемое $\xi(\tilde{p}_1)$ состоит из стимулированного распада фонона с импульсом p_1 , за который отвечает слагаемое с Бозе-функцией в скобках подынтегрального выражения (48), и самопроизвольного распада фонона с импульсом p_1 , за который отвечает первое слагаемое равное единице. В рассматриваемом нами случае $p_{\min} < p_1 < p_{\max}$, мы можем не учитывать стимуляцию распада, т.к. его частота много меньше частоты самопроизвольного распада. Действительно, если импульс одного из фононов, получившихся в результате распада, мал, то вклад от такого распада в выражение (48) тоже является малым, а когда импульсы обоих фононов значительны, то слагаемое с Бозе-функцией оказывается значительно меньше единицы. В силу приведенных рассуждений мы можем опустить слагаемое с Бозе-функцией в скобках подынтегрального выражения (48), после чего интегрируя получим:

$$n_{3pp} = \frac{(u+1)^2 \sqrt{3}}{240\pi\rho\hbar^4} \sqrt{p_{\max}^2 - p_1^2} (9p_1^4 - 14p_1^2 p_{\min}^2 + 6p_{\min}^4). \quad (52)$$

Заметим, что за обращение выражения (52) в нуль при $p_1 \rightarrow p_{\max}$ отвечает подкоренное выражение. Выражение в скобках при этом увеличивается, стремясь к конечному значению равному $6p_c^4/5$. В итоге частота быстро уменьшается от максимального до нулевого значения в малом интервале импульсов (см. рис. 10). Действительно, изменение частоты связано с конкуренцией между множителем стоящим под квадратным корнем, который уменьшается по мере стремления $p_1 \rightarrow p_{\max}$, и возрастающим множителем, стоящим в скобках. Конкуренция приводит к тому, что выражение (52) достигает максимума при $p_1 \approx 0,84p_c$, а при $p_1 \approx 0,89p_c$ частоты уже обращаются в ноль. В результате частоты меняются от максимального значения до нулевого в малом интервале импульсов.

Исходя из данного способа расчета характерного времени трехфононных процессов, результат (47) следует интерпретировать как обратное время жизни фонона с импульсом p_1 в равновесном поле тепловых фононов с температурой T . Рассмотрим предельные случаи, следующие из общей формулы (47). Прежде всего, обратимся к гиперзвуковому пределу, когда $\frac{\tilde{p}_1}{T} \gg 1$. При этом

$$\beta(\tilde{p}_1) \approx 0, \quad (53)$$

а

$$\xi(\tilde{p}_1) \approx \int_0^{\tilde{p}_1} d\tilde{p}_2 \tilde{p}_2^2 (\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2)^2 = \frac{\tilde{p}_1^5}{30}. \quad (54)$$

Подстановка соотношений (53) и (54) в (47) дает

$$v_{3pp}^{(\infty)}(p_1) = \frac{(u+1)^2}{240\pi\rho\hbar^4} p_1^5. \quad (55)$$

Это выражение было впервые получено в работе [36]. Из соотношений (53) и (54) видно, что такой предельный результат соответствует чисто распадным процессам типа $\mathbf{p}_1 \rightarrow \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3$. Следует отметить, что формула (55) имеет в действительности довольно ограниченную область применимости. Это связано с тем, что необходимо одновременное выполнение двух условий: $\tilde{p}_1/T \gg 1$ и $\tilde{p}_1 < \tilde{p}_{\min}$; поэтому ее можно использовать для численных оценок фактически лишь при давлениях до 12 бар при температуре 1 К, и еще при меньших давлениях, если температура выше.

Другой предельный случай $\tilde{p}_1/T \ll 1$ соответствует поглощению акустической звуковой волны равновесным фононным полем с температурой T . Для этого случая

$$\xi(\tilde{p}_1) \approx 0, \tag{56}$$

$$\beta(\tilde{p}_1) \approx \frac{\tilde{p}_1}{T} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{p}_3^4 e^{\tilde{p}_3/T}}{\left(e^{\tilde{p}_3/T} - 1\right)^2} d\tilde{p}_3 = T^4 \frac{4\pi^4}{15} \tilde{p}_1. \tag{57}$$

Подстановка (56) и (57) в (47) дает

$$v_{3pp}^{(0)}(p_1) = \frac{\pi^3 (u+1)^2}{15\rho\hbar^4} \left(\frac{k_B}{c}\right)^4 T^4 p_1, \tag{58}$$

то есть мы приходим к результату, полученному в работах [37, 38]. Заметим, что в выражении (57) мы заменили \tilde{p}_{\max} на ∞ . Такая замена оправдана в случае, когда $\tilde{p}_{\max}/T \gg 1$. Отметим, что с ростом давления это неравенство начинает играть важную роль и ограничивает область применимости выражения (58).

В противоположность рассмотренному выше (см. (55)) распаду высоко-энергетического фона, предельный результат (58), как это видно из соотношений (56), (57), соответствует только процессам слияния $p_1 + p_2 \rightarrow p_3$. Формула (58) многократно использовалась для описания различных релаксационных процессов как в чистом He II, так и в сверхтекучих растворах $^3\text{He}-^4\text{He}$ (см. обзор [39]).

Необходимо заметить, что формула (47) с учетом зависимостей (6), (15-19) справедлива для всех давлений, при которых дисперсия аномальна. На рис. 10 приведены частоты трехфононных процессов в случае различных давлений (а) и температур (б). Из рис. 10а видно, что с ростом давления частоты начинают убывать. Это связано, во-первых, с уменьшением величины p_c , а, во-вторых, с изменением параметров u , ρ и c жидкого

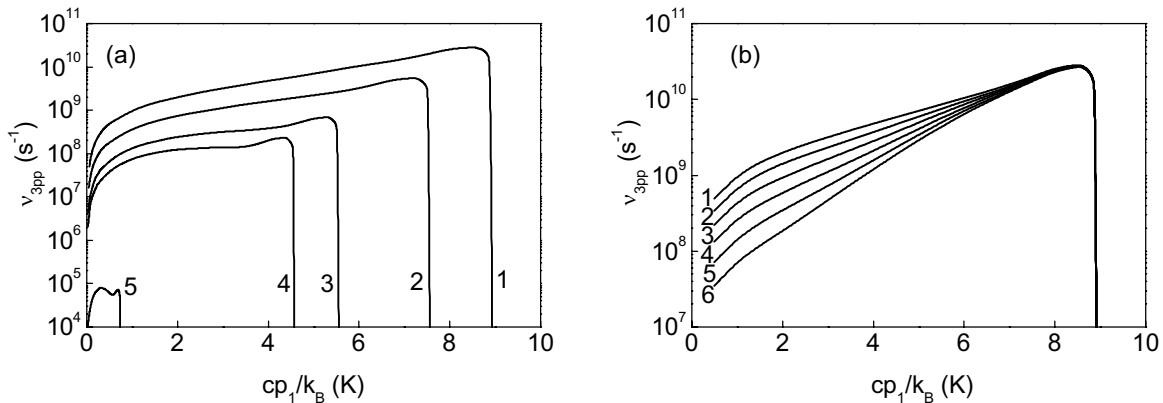


Рис. 10. Зависимость частоты релаксации в изотропных фононных системах v_{3pp} от импульса p_1 .

(а) - кривые 1-5 соответственно для давлений 0, 5, 10, 12 и 18 бар при $T=1$ К. (б) - изображены кривые 1-6 соответственно для температур 1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6 и 0,5 К в случае давления насыщенного пара.

гелия. За счет изменения параметров жидкого гелия с изменением давления от 0 до 12 бар при фиксированной величине p_c частоты уменьшаются в пять раз, а при дальнейшем понижении давления до 18 бар еще примерно в 2 раза. Остальное наблюдаемое уменьшение частот с ростом давления, а также уменьшение интервала импульсов, в котором идут трехфононные процессы, связано с уменьшением величины p_c , которое ведет к сокращению объема фазового пространства по которому ведется интегрирование. Заметим, что уменьшение частот связанное с уменьшением p_c имеет сильную температурную зависимость: так при температурах $T \sim 1$ К уменьшение величины p_c при изменении давления от 0 до 12 бар и фиксированных параметрах u , ρ и c приводит к уменьшению частот в два раза, а при дальнейшем понижении давления до 18 бар частоты уменьшаются еще в 160 раз. При температурах $T < 0,1$ К уменьшение величины p_c при повышении давления от 0 до 18 бар не сказывается на уменьшении частот трехфононной релаксации, которое обуславливается только параметрами жидкого гелия. Такая температурная зависимость объясняется наличием в подынтегральных выражениях Бозе-функций, которые содержат выражение $\exp(\tilde{p}/T)$.

Температурная зависимость v_{3pp} в предельных случаях (55) и (58) видна на рис. 10b, где при малых значениях p_1 частота $v_{3pp} \propto T^4$, а при больших значениях p_1 частота v_{3pp} от температуры практически не зависит.

РЕЛАКСАЦИЯ В АНИЗОТРОПНЫХ ФОНОННЫХ СИСТЕМАХ, ОБУСЛОВЛЕННАЯ ТРЕХЧАСТИЧНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Запишем согласно [6] выражение для частоты трехфононных процессов в анизотропных фононных системах, которое получается исходя из кинетического уравнения (38) аналогично тому, как было получено выражение (47) для частоты трехфононных процессов в изотропных фононных системах:

$$v_{3pp}(\tilde{p}_1, \zeta_1) = \frac{(u+1)^2}{4\pi\rho\hbar^4} \left(\frac{k_B}{c}\right)^5 \left\{ \frac{1}{2} \xi_a(\tilde{p}_1, \zeta_1) + \beta_a(\tilde{p}_1, \zeta_1) \right\}, \quad (59)$$

где

$$\xi_a(\tilde{p}_1, \zeta_1) = \int_0^{\tilde{p}_1} d\tilde{p}_2 \tilde{p}_2^2 (\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2)^2 \eta(\zeta(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)) \left(1 + \frac{2}{\pi} \int_{\zeta_{1,2-}}^{\zeta_{1,2+}} d\zeta_2 \frac{n_u(\tilde{p}_2, \zeta_2)}{\sqrt{(\zeta_{1,2+} - \zeta_2)(\zeta_2 - \zeta_{1,2-})}} \right), \quad (60)$$

$$\beta_a(\tilde{p}_1, \zeta_1) = \int_{\tilde{p}_1}^{\tilde{p}_{\max}} d\tilde{p}_3 \tilde{p}_3^2 (\tilde{p}_3 - \tilde{p}_1)^2 \eta(\zeta(\tilde{p}_3, \tilde{p}_1)) (\beta_2 - \beta_3). \quad (61)$$

Здесь $\zeta_i = 1 - \frac{\mathbf{p}_i \mathbf{N}}{p_i}$,

$$\beta_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\zeta_{1,(3-1)-}}^{\zeta_{1,(3-1)+}} d\zeta_2 \frac{n_u(\tilde{p}_3 - \tilde{p}_1, \zeta_2)}{\sqrt{(\zeta_{1,(3-1)+} - \zeta_2)(\zeta_2 - \zeta_{1,(3-1)-})}}, \quad (62)$$

$$\beta_3 = \frac{1}{\pi} \int_{\zeta_{3,1-}}^{\zeta_{3,1+}} d\zeta_3 \frac{n_u(\tilde{p}_3, \zeta_3)}{\sqrt{(\zeta_{3,1+} - \zeta_3)(\zeta_3 - \zeta_{3,1-})}}, \quad (63)$$

$$\zeta_{i,j\pm} = \zeta_1 + \zeta(\tilde{p}_i, \tilde{p}_j) - \zeta_1 \zeta(\tilde{p}_i, \tilde{p}_j) \pm \sqrt{(2\zeta_1 - \zeta_1^2)(2\zeta(\tilde{p}_i, \tilde{p}_j) - \zeta_1^2(\tilde{p}_i, \tilde{p}_j))}, \quad (64)$$

а $\zeta(\tilde{p}_i, \tilde{p}_j)$ определяется выражением (50).

Как и в изотропном случае, в выражении (59) первое слагаемое соответствует распаду фонона с импульсом \mathbf{p}_1 , а второе слиянию фонона с импульсом \mathbf{p}_1 с фононами анизотропной фононной системы. Выражения частоты трехфононных процессов в анизотропном случае отличается от изотропного случая тем, что появляется зависимость функции распределения фононов от угла ζ . В силу этого интегрирование по углам не может быть проведено аналитически. Заметим, что если в выражения (59-63) подставить для дрейфовой скорости $u = 0$, то распределения в фононной системе станет изотропным. В этом случае интегрирование по углам может быть проведено, и выражение (59) для частоты трехфононных процессов в анизотропных фононных системах перейдет в выражение (47).

Ниже приведены графики частот рассчитанные исходя из выражений (59-64). На рис. 11а представлена зависимость частоты релаксации фонона с импульсом \mathbf{p}_1 в анизотропной фононной системе в зависимости от угла θ_1 между осью анизотропии фононной системы \mathbf{N} и импульсом \mathbf{p}_1 при $T_p = 1$ К и различных давлениях. Значения $\zeta_p = 1 - \cos\theta_p$, соответствующие давлениям 0, 5, 10, 12 и 18 бар, равны соответственно $2,3 \cdot 10^{-2}$, $1,1 \cdot 10^{-2}$, $4,6 \cdot 10^{-3}$, $3 \cdot 10^{-3}$, $7,9 \cdot 10^{-4}$. Для наглядности мы используем параметры конусного приближения T_p и ζ_p . Связь с соответствующими параметрами T и u дрейфовой функции распределения приведена в работе [6] (см. там табл. 2). Импульс фонона p_1 принимался равным среднему импульсу фононов в пучке $\langle p \rangle$. Из рис. 11а видно, что данные частоты убывают с ростом давления. Это происходит по тем же причинам, что и в изотропном случае.

Заметим, что с увеличением угла θ_1 частоты v_{3pp} сначала увеличиваются достигая некоторого максимального значения, после чего уменьшаются и перестают зависеть от угла. Для того чтобы понять такую угловую зависимость частот обратимся к рис. 12. На рис. 12 кривая 1+2 это та же кривая, что и кривая 1 на рис. 11а. Она является суммой кривых 1 и 2, которые отвечают первому и второму слагаемому выражения (59) соответственно. Кривая 1 на рис. 12 отвечает распаду фонона с импульсом \mathbf{p}_1 , а кривая 2 – слиянию фонона с импульсом \mathbf{p}_1 с фононом анизотропной фононной системы. Увеличение частот, наблюдаемых на кривой 1, при малых углах обусловлено стимуляцией распада фонона с импульсом \mathbf{p}_1 за счет наличия анизотропной фононной системы. При больших же углах между импульсом фонона и осью анизотропии фонон перестает “чувствовать” наличие анизотропной фононной системы и поэтому зависимость от угла пропадает и частота распада выходит на постоянный уровень, отвечающий самопроизвольному распаду фонона. Наличие максимума на кривой 2 можно объяснить следующим образом. Заменим анизотропную фононную систему

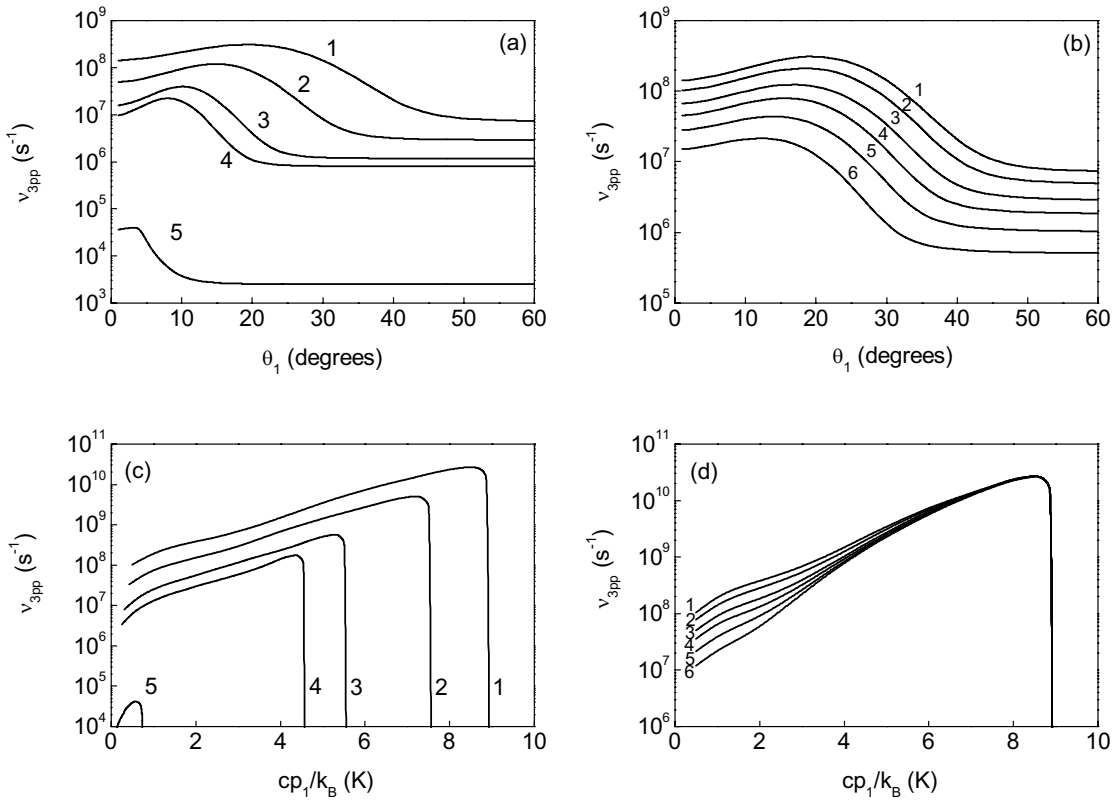


Рис. 11. Частота релаксации ν_{3pp} в анизотропных фоновых системах. (а) - зависимость ν_{3pp} от θ_1 при различных давлениях равных 0, 5, 10, 12 и 18 бар (кривые 1-5 соответственно) при $T_p=1$ К и значениях ζ_p равных соответственно $2,3 \cdot 10^{-2}$, $1,1 \cdot 10^{-2}$, $4,6 \cdot 10^{-3}$, $3 \cdot 10^{-3}$ и $7,9 \cdot 10^{-4}$. Импульс \tilde{p}_1 считался равным среднему значению импульса $\langle \tilde{p} \rangle$ фононов в пучке. (б) - зависимость ν_{3pp} от θ_1 при различных температурах T_p равных 1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6 и 0,5 К в случае давления насыщенного пара и импульса $\tilde{p}_1 = \langle \tilde{p} \rangle$ при $\zeta_p = 0,023$. (с, d) - зависимость ν_{3pp} от p_1 , при величине угла, которая соответствует максимуму кривых на рис. 11а и 11б. (с) - для различных давлений (0, 5, 10, 12, 18 бар) при $T_p=1$ К. (d) - для различных температур T_p (1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6 и 0,5 К) при давлении насыщенного пара.

монохроматическим пучком фононов, который движется вдоль оси z . Тогда средний импульс фононов в таком пучке будет равен 1,581 К. Рассчитав, под каким углом взаимодействуют такие фононы, получим $\theta_{eff} = 18^\circ$, что хорошо согласуется с положением максимума на рис. 11а. Заметим, что положения максимумов остальных кривых на рис. 11а, можно рассчитать аналогично. На рис. 11б рассматривается случай различных температур

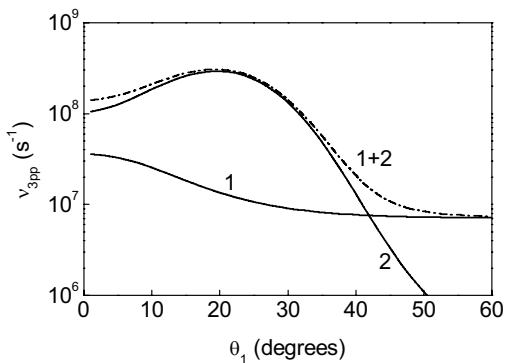


Рис. 12. Зависимость частоты трехфононных процессов от угла между осью анизотропии и импульсом релаксирующего фонона $\tilde{p}_1 = \langle \tilde{p} \rangle$ при $P=0$, $T_p=1$ К и $\zeta_p = 0,023$. Кривая 1 соответствует частоте распада фонона с импульсом \mathbf{p}_1 , кривая 2 – частоте слиянию фонона с импульсом \mathbf{p}_1 с фононом анизотропной фоновой системы, кривая 1+2 представляет собой сумму кривых 1 и 2 и соответствует полной частоте релаксации фонона с импульсом \mathbf{p}_1 в анизотропной фоновой системе.

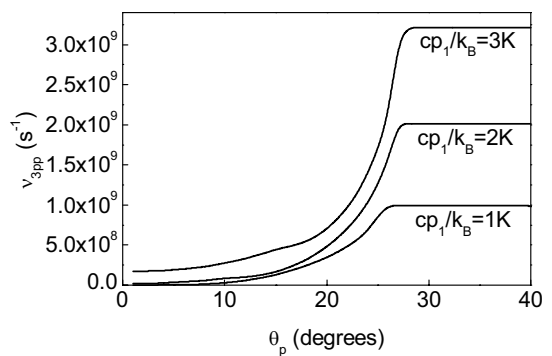


Рис. 13. Зависимость частоты ν_{3pp} от угла θ_p , занимаемого анизотропной фоновой системой в импульсном пространстве, для различных \tilde{p}_1 при $T_p=1$ К и давлении насыщенного пара.

при давлении насыщенного пара и $\zeta_p = 0,023$. Кривые в этом случае имеют угловую зависимость аналогичную представленной на рис. 11а. Рис. 11с и 11d представляют зависимость частоты ν_{3pp} от импульса p_1 при $\theta_1 = \theta_{eff}(P, T)$ для случаев соответственно различных давлений и температур. Заметим, что зависимости, приведенные на рис. 11с и 11d очень похожи на зависимости частот от импульса p_1 в случае релаксации в изотропной системе. Однако в данном случае частоты оказываются меньше.

Зависимость частоты трехфононных процессов от величины анизотропии фононной системы может быть получена путем вычисления частоты трехфононных процессов в анизотропных фононных системах с функцией распределения (12), а не (3), как это было сделано выше. Вычисляя, таким образом, частоты можно сделать переход от анизотропной фононной системы к изотропной. Данный переход изображен на рис. 13, где θ_p – характерный угол который занимает анизотропная фононная система в импульсном пространстве. При нулевом значении угла, анизотропная фононная система попросту отсутствует. В этом случае частота соответствует случаю распада фонона с импульсом p_1 , который был впервые посчитан в [36]. Затем, указанная частота начинает увеличиваться достигая изотропного случая при $\theta_p \sim 27^\circ$. Такой результат связан с тем, что фонон может провзаимодействовать с другим, если угол между их импульсами не превышает максимальный угол, под которым разрешены трехчастичные процессы. А в рассматриваемом случае величина такого угла составляет именно 27° .

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ АНИЗОТРОПНЫХ ФОНОННЫХ СИСТЕМ И ОБРАЗОВАНИЕ “ГОРЯЧЕЙ ЛИНИИ”

В экспериментах [21, 22] изучалось взаимодействие двух фононных пучков, пересекающихся под различными углами и при разных давлениях. На рис. 14 показан сигнал на болометре В от двух различных нагревателей H_1 и H_2 (штрих-пунктирные линии), сумма отдельных сигналов (пунктирная линия) и сигнал на болометре, возникающий от одновременных пересекающихся импульсов (сплошная линия) [21]. Угол между пучками составлял 6° , $t_p = 10^{-7}$ с, мощность 6,3 мВт при давлении насыщенного пара. Из рис. 14 видно, что в этих условиях пучки сильно взаимодействуют – суммарный сигнал от двух импульсов заметно превышает сумму отдельных сигналов от нагревателей. В этом случае в области пересечения пучков возникает новообразование – “горячая линия” (см. вставку в правом верхнем углу рис. 14), непрерывно поглощающая энергию фононных пучков и теряющая энергию за счет интенсивного рождения h-фононов. Теоретический анализ явлений, возникающих при пересечении фононных пучков в гелии впервые был выполнен в работе [5].

Найдем частоту взаимодействия двух фононных пучков исходя из полученного решения задачи о релаксации одного фонона в анизотропной фононной системе. На рис. 15 приведена частота такого взаимодействия в зависимости от угла между осями анизотропии фононных систем, который на рис. 15а изображен на вставке в правом верхнем углу, где анизотропные фононные системы изображены с помощью конусов. Данная частота получена исходя из выражения (59) следующим образом: значение импульса релаксирующего фонона принималось равным среднему значению импульса фононов в пучке, а по углам было сделано усреднение так, чтобы учесть, что на самом деле мы имеем дело не с одним фононом, а с анизотропным конусом. Для этого бралось три значения частоты при величине углов $\theta_{uu'}$ – θ_p , $\theta_{uu'}$, $\theta_{uu'} + \theta_p$ и вычислялось их среднее арифметическое значение. Заметим, что при таком подходе не следует учитывать самопроизвольные распады фонона с импульсом p_1 , т.к. сами по себе анизотропные фононные системы равновесные. Однако следует учитывать распад, стимулированный наличием анизотропной фононной системы, который, как следует из проведенных нами вычислений (см. рис. 12), дает малый вклад по сравнению с процессами слияния фононов.

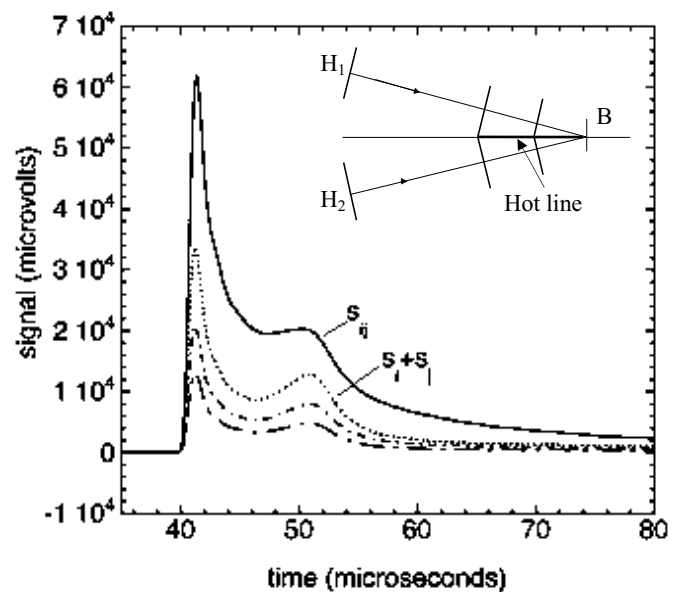


Рис. 14. Сигнал на болометре от двух отдельных фононных импульсов (штрих-пунктирные линии), сумма отдельных сигналов (пунктирная линия) и сигнал на болометре возникающий от одновременных пересекающихся фононных импульсов (сплошная линия) из работы [21].

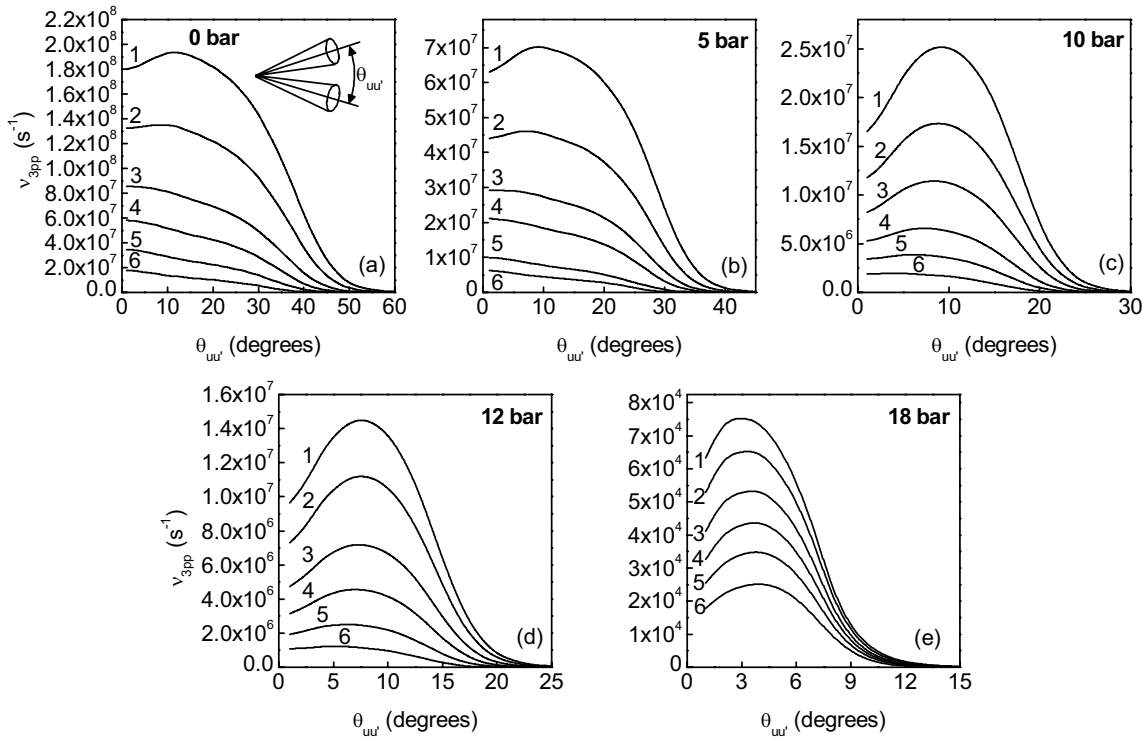


Рис. 15. Частота ν_{3pp} как функция угла между осями взаимодействующих анизотропных фоновых систем.

Кривые 1-6 соответствуют температурам T_p равным 1; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6 и 0,5 К. (а), (б), (с), (д), (е) – для давлений 0, 5, 10, 12 и 18 бар (ζ_p равно $2,3 \cdot 10^{-2}$, $1,1 \cdot 10^{-2}$, $4,6 \cdot 10^{-3}$, $3 \cdot 10^{-3}$ и $7,9 \cdot 10^{-4}$ соответственно).

Фоновые пучки успевают провзаимодействовать, если время в течение которого происходит замена общего объема пучков τ_{cross} , больше времени релаксации фононов ν_{3pp}^{-1} . Выражение для τ_{cross} , согласно работе [5], имеет вид

$$\tau_{cross} = t_p \left(2 \sin^2(\theta_{uu'}/2) \right)^{-1}, \quad (65)$$

где t_p – длительность теплового импульса, образующего фоновый пучок. В этом случае в объеме пересечения пучков успевают произойти трехфононные процессы в результате чего возникает новообразование, которое следуя терминологии [21], мы будем называть “горячей линией”.

Образование горячей линии наблюдалось в [21, 22] экспериментально и было показано, что при высоких давлениях и при больших углах между пучками горячая линия не образуется. Такую ситуацию можно объяснить исходя из рис. 15. Действительно, при значениях угла $\theta_{uu'}$, при которых проводились эксперименты [21, 22], т.е. $8,8^\circ$, 26° и 46° время τ_{cross} при $t_p = 10^{-7}$ с составляет соответственно $8,5 \cdot 10^{-6}$ с, $9,88 \cdot 10^{-7}$ с, $3,28 \cdot 10^{-7}$ с. Тогда, согласно рис. 15е видим, что при давлении 18 бар при всех этих значениях углов для всех температур выполняется неравенство

$$\tau_{cross} < \nu_{3pp}^{-1}. \quad (66)$$

При этом пучки не успевают провзаимодействовать и горячая линия не образуется.

Заметим также, что при значении угла равном 46° и $T_p = 0,7$ К в случае давления насыщенного пара выполняется неравенство (66) и горячая линия также не успевает образоваться, а при повышении температуры T_p до 1 К, данный угол составляет порядка 50° (см. рис. 15а).

В случае давления насыщенного пара, при $\theta_{uu'}$ равном $8,8$ и 26° , для всех шести значений температуры, которые представлены на рис. 15а кривыми 1-6, выполняется неравенство

$$\tau_{cross} > \nu_{3pp}^{-1}. \quad (67)$$

В этом случае пучки успевают провзаимодействовать.

Полученная здесь зависимость взаимодействия двух пучков фононов от угла между их осями при различных значениях давления и температуры полностью согласуется с результатами экспериментов [21, 22].

Заметим, что в экспериментах [21, 22], по мере движения фононного пучка от нагревателя к детектору угол $\theta_{uu'}$, как и температура пучков, изменяется. Учет этих эффектов был сделан в [5]. Однако для ответа на

вопрос о возможности взаимодействия пучков в условиях экспериментов [21, 22] достаточно приведенных выше сопоставлений.

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ h -ФОНОНОВ В l -ФОНОННОМ ПУЧКЕ

Получим следуя работе [40] выражения для частот рождения и уничтожения h -фонона с импульсом \mathbf{p} за счет рассеяния в квазиравновесной l -фононной анизотропной системе. Поскольку трехфононные процессы с участием h -фононов запрещены законами сохранения, самый быстрый процесс, определяющий эти частоты, это четырехфононный процесс.

Рассмотрим четырехфононный процесс, который определяет рождение h -фононов в анизотропной l -фононной системе. Законы сохранения энергии и импульса в этом случае записываются в виде

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4, \quad \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4. \quad (68)$$

Здесь и далее фононом с энергией ε_1 и импульсом \mathbf{p}_1 является h -фонон, а остальные три фонона являются l -фононами.

Кинетическое уравнение описывающее изменение функции распределения $n(\mathbf{p}_1) = n_1$ за счет рассматриваемого процесса можно записать в виде

$$\frac{dn_1}{dt} = N_b(\mathbf{p}_1) - N_d(\mathbf{p}_1), \quad (69)$$

где $N_b(\mathbf{p}_1)$ и $N_d(\mathbf{p}_1)$ соответственно увеличение и уменьшение числа h -фононов с импульсом \mathbf{p}_1 в единицу времени за счет столкновений, которые могут быть записаны в виде

$$N_{b,d}(\mathbf{p}_1) = \int W(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \delta(\mathbf{p}_\Sigma) \delta(\varepsilon_\Sigma) n_{b,d} d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4. \quad (70)$$

Здесь $W(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4)$ определяет плотность вероятности процесса, δ -функции отвечают законам сохранения энергии $\varepsilon_\Sigma = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4$ и импульса $\mathbf{p}_\Sigma = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4$, а

$$n_b = n_3^{(0)} n_4^{(0)} (1 + n_2^{(0)}) (1 + n_1), \quad n_d = n_1 n_2^{(0)} (1 + n_3^{(0)}) (1 + n_4^{(0)}), \quad (71)$$

где $n_i^{(0)} \equiv n^{(0)}(\mathbf{p}_i)$ - равновесная функция распределения l -фононов, которые мгновенно релаксируют за счет трехфононных процессов.

Равновесная функция распределения l -фононов согласно [5, 6] запишем в виде

$$n^{(0)}(\mathbf{p}_l) = \left\{ \exp\left(\frac{\varepsilon_l - \mathbf{p}_l \mathbf{u}}{k_B T}\right) - 1 \right\}^{-1}, \quad (72)$$

где

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}c(1 - \chi), \quad (73)$$

– дрейфовая скорость, \mathbf{N} – единичный вектор, направленный вдоль полного импульса фононной системы, который задает ось анизотропии фононной системы, а χ – параметр анизотропии.

В слабо анизотропном случае параметр χ близок к 1. В рассматриваемом нами случае, который отвечает экспериментам [2-4], фононные пучки это сильно анизотропные фононные системы и $\chi \ll 1$.

При расчетах нам будет удобнее пользоваться выражением

$$n^{(0)}(p_l, \zeta_l) = \left\{ \exp\left(\frac{cp_l}{k_B T} (\psi_l + \chi + \zeta_l - \zeta_l \chi)\right) - 1 \right\}^{-1}, \quad (74)$$

где $\zeta_l = 1 - \frac{\mathbf{p}_l \mathbf{N}}{p_l}$. Выражение (74) получается подстановкой (5) и (73) в (72).

Функция $W(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4)$ согласно [9, 10] может быть записана в виде

$$W(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = \frac{2\pi}{\hbar} V^2 H_{fi}^2 \frac{1}{(2\pi\hbar)^6}. \quad (75)$$

Здесь V - объем системы,

$$H_{fi} = \frac{\sqrt{p_1 p_2 p_3 p_4}}{8\rho V} M_\Sigma, \quad (76)$$

где ρ - плотность гелия, а, согласно [40],

$$M_\Sigma = M^{(1)} + M_{13}^{(3)} + M_{23}^{(3)} + M_{14}^{(3)} + M_{24}^{(3)} + M^{(5)} + M_4 \quad (77)$$

- матричный элемент. Входящие в (77) слагаемые имеют вид

$$M^{(1)} = \frac{\varepsilon_{1+2}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_{1+2}} (2u - 1 + \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_{1+2} + \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_{1+2}) (2u - 1 + \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_4 + \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_{3+4} + \mathbf{n}_4 \mathbf{n}_{3+4}), \quad (78)$$

$$M^{(5)} = -\frac{\varepsilon_{1+2}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_{1+2}} (2u - 1 + \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_{1+2} - \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_{1+2}) (2u - 1 + \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_4 - \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_{3+4} - \mathbf{n}_4 \mathbf{n}_{3+4}), \quad (79)$$

$$M_4 = 4 \left\{ (u-1)^2 + w \right\}, \quad (80)$$

$$M_{13}^{(3)} = \frac{\varepsilon_{1-3}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3 - \varepsilon_{1-3}} (2u - 1 + \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_3 + \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_{1-3} + \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_{1-3}) (2u - 1 + \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_4 + \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_{1-3} + \mathbf{n}_4 \mathbf{n}_{1-3}). \quad (81)$$

Остальные слагаемые выражения (77), то есть $M_{23}^{(3)}$, $M_{14}^{(3)}$, $M_{24}^{(3)}$ получаются из $M_{13}^{(3)}$ заменой соответствующих индексов. Здесь $\mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{p}_i}{p_i}$, $\varepsilon_i = \varepsilon(\mathbf{p}_i)$, $u = \frac{\rho}{c} \frac{\partial c}{\partial \rho} = 2,84$ - постоянная Грюнаизена,

$$w = \frac{\rho^2}{c} \frac{\partial^2 c}{\partial \rho^2} = 0,188.$$

Определим частоту рассматриваемого процесса равенством

$$\nu_1(\mathbf{p}_1) = \int W(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \delta(\mathbf{p}_y) \delta(\varepsilon_\Sigma) n_2^{(0)} (1 + n_3^{(0)}) (1 + n_4^{(0)}) d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4. \quad (82)$$

Тогда согласно (70), (71) выражение для N_d может быть записано в виде:

$$N_d = n_1 \nu_1. \quad (83)$$

С учетом равенства

$$n_3^{(0)} n_4^{(0)} (1 + n_2^{(0)}) = e^{-\frac{\varepsilon_1 - \mathbf{p}_1 \mathbf{u}}{k_B T}} n_2^{(0)} (1 + n_3^{(0)}) (1 + n_4^{(0)}), \quad (84)$$

которое следует из соотношений (68) и (72), мы получаем

$$N_b = e^{-\frac{\varepsilon_1 - \mathbf{p}_1 \mathbf{u}}{k_B T}} (1 + n_1) \nu_1. \quad (85)$$

В коротких пучках, которые реализовывались в экспериментах [41], $n_i \ll 1$. Поэтому для коротких пучков (далее мы будем рассматривать только случай коротких пучков) имеет место выражение

$$N_b^{(sh)} = e^{-\frac{\varepsilon_1 - \mathbf{p}_1 \mathbf{u}}{k_B T}} \nu_1. \quad (86)$$

Таким образом, чтобы найти N_b и N_d , которые входят в кинетическое уравнение, нам необходимо найти ν_1 .

ЧАСТОТА РОЖДЕНИЯ И УНИЧТОЖЕНИЯ h-ФОНОНОВ В АНИЗОТРОПНОЙ h-ФОНОННОЙ СИСТЕМЕ

Запишем выражение (82) с учетом (75)-(77) в сферической системе координат

$$\nu_1 = \frac{P_1}{2^{11} \pi^5 \hbar^7 \rho^2} \int M_{\Sigma}^2 \delta(\mathbf{p}_y) \delta(\varepsilon_\Sigma) n_2^{(0)} (1 + n_3^{(0)}) (1 + n_4^{(0)}) p_2^3 p_3^3 p_4^3 dp_2 d\varphi_2 d\zeta_2 dp_3 d\varphi_3 d\zeta_3 dp_4 d\varphi_4 d\zeta_4, \quad (87)$$

где $\zeta_i = 1 - \frac{\mathbf{p}_i \mathbf{N}}{p_i}$.

Не ограничивая общности можем выбрать за начало отсчета угла φ , угол φ_1 . В этом случае δ -функции могут быть записаны в виде

$$\delta(\mathbf{p}_y) = \delta(p_{1\perp} + p_{2\perp} \cos \varphi_2 - p_{3\perp} \cos \varphi_3 - p_{4\perp} \cos \varphi_4) \times \\ \times \delta(p_{2\perp} \sin \varphi_2 - p_{3\perp} \sin \varphi_3 - p_{4\perp} \sin \varphi_4) \delta(p_{\parallel} + p_{2\parallel} - p_{3\parallel} - p_{4\parallel}), \quad (88)$$

$$\delta(\varepsilon_\Sigma) = \frac{1}{c} \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4 - \phi), \quad (89)$$

где $p_{i\perp} = p_i \sqrt{2\zeta_i - \zeta_i^2}$, $p_{i\parallel} = p_i (1 - \zeta_i)$, $\phi = p_3 \psi_3 + p_4 \psi_4 - p_1 \psi_1 - p_2 \psi_2$. Заметим, что величина ϕ в рассматриваемом процессе всегда положительна ($\phi > 0$).

Для того чтобы выполнить интегрирование по φ_3 и φ_4 введем новые переменные

$$X = p_{3\perp} \cos \varphi_3 + p_{4\perp} \cos \varphi_4, \quad (90)$$

$$Y = p_{3\perp} \sin \varphi_3 + p_{4\perp} \sin \varphi_4. \quad (91)$$

С учетом этого выражение (87) примет вид

$$v_1 = \frac{P_1}{2^{10} \pi^5 \hbar^7 \rho^2} \int M_{\Sigma}^2 \delta(\mathbf{p}_v) \delta(\varepsilon_{\Sigma}) n_2^{(0)} (1+n_3^{(0)}) (1+n_4^{(0)}) p_2^3 p_3^3 p_4^3 \frac{dp_2 dp_3 dp_4 d\zeta_2 d\zeta_3 d\zeta_4 d\varphi_2 dXdY}{\sqrt{4p_{3\perp}^2 p_{4\perp}^2 - (X^2 + Y^2 - p_{3\perp}^2 - p_{4\perp}^2)^2}}. \quad (92)$$

Здесь и далее интегрирование проводится так, чтобы подкоренные выражения были неотрицательными.

Так как M_{Σ} зависит от $\cos \varphi_3$ и $\cos \varphi_4$, то для того чтоб выполнить интегрирование нам необходимо разрешить систему уравнений

$$\begin{cases} p_{1\perp} + p_{2\perp} \cos \varphi_2 - p_{3\perp} \cos \varphi_3 - p_{4\perp} \cos \varphi_4 = 0, \\ p_{2\perp} \sin \varphi_2 - p_{3\perp} \sin \varphi_3 - p_{4\perp} \sin \varphi_4 = 0, \end{cases} \quad (93)$$

относительно $\cos \varphi_3$ и $\cos \varphi_4$.

Система уравнений (93) имеет два решения, которые могут быть записаны в виде

$$\cos \varphi_3^{(\pm)} = \frac{(p_{1\perp} + p_{2\perp} \cos \varphi_2)(A + p_{3\perp}^2 - p_{4\perp}^2) \pm p_{2\perp} \sin \varphi_2 \sqrt{R}}{2Ap_{3\perp}}, \quad (94)$$

$$\cos \varphi_4^{(\pm)} = \frac{(p_{1\perp} + p_{2\perp} \cos \varphi_2)(A - p_{3\perp}^2 + p_{4\perp}^2) \mp p_{2\perp} \sin \varphi_2 \sqrt{R}}{2Ap_{4\perp}}, \quad (95)$$

где

$$R = 4p_{3\perp}^2 p_{4\perp}^2 - (A - p_{3\perp}^2 - p_{4\perp}^2)^2, \quad A = p_{1\perp}^2 + p_{2\perp}^2 + 2p_{1\perp} p_{2\perp} \cos \varphi_2, \quad (96)$$

Выполняя интегрирование по X , Y , а затем по p_4 и ζ_4 с помощью δ -функций имеем:

$$v_1 = N p_1 \int \{M_+^2 + M_-^2\} n_2^{(0)} (1+n_3^{(0)}) (1+n_4^{(0)}) \frac{p_2^3 p_3^3 p_4^2}{\sqrt{R}} dp_2 dp_3 d\zeta_2 d\zeta_3 d\varphi_2, \quad (97)$$

где мы обозначили

$$M_{\pm} = M_{\Sigma}(\cos \varphi_3 = \cos \varphi_3^{(\pm)}, \cos \varphi_4 = \cos \varphi_4^{(\pm)}), \quad N = \frac{1}{2^{10} \pi^5 \hbar^7 \rho^2 c}, \quad (98)$$

$$p_4 = p_1 + p_2 - p_3 - \phi, \quad \zeta_4 = \frac{p_1 \zeta_1 + p_2 \zeta_2 - p_3 \zeta_3 - \phi}{p_4}. \quad (99)$$

Дальнейшее интегрирование невозможно точно выполнить аналитически из-за сложности подынтегрального выражения. Зависимости v_1 от p_1 , ζ_1 и T , χ могут быть получены путем численного интегрирования выражения (97).

На рис. 16 показана угловая зависимость частоты при различных значениях p_1 и фиксированных значениях $T = 0,041$ К и $\chi = 0,02$, которые отвечают условиям экспериментов [41].

Мы видим, что есть максимум при значениях $cp_1/k_B < 13$ К. Наличие этого максимума при $cp_1/k_B = 10$ К обусловлено несколькими факторами. Во-первых, из законов сохранения следует, что четырехфононные процессы запрещены, если угол между импульсами фононов \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 менее чем

$$\zeta_{12\min} = 1 - \cos \theta_{12\min} \approx \frac{P_1 + P_2}{P_1 P_2} \phi. \quad (100)$$

Во-вторых, функция распределения фононов в пучке имеет достаточно острый максимум при $\theta_2 = 0$. Таким образом, основная часть фононов в пучке имеют импульс \mathbf{p}_2 , направленный вдоль оси анизотропии системы. Однако при $\theta_1 = 0$ фононы с импульсом \mathbf{p}_1 не могут взаимодействовать с фононами с импульсом \mathbf{p}_2 , который направлен вдоль оси анизотропии системы из-за наличия $\theta_{12\min}$. Таким образом, при $\theta_1 = 0$ законами сохранения энергии и импульса запрещено взаимодействие фононов с импульсом \mathbf{p}_1 с основной частью фононов пучка. С увеличением угла θ_1 становится возможным взаимодействие фонона с импульсом \mathbf{p}_1 все с большей группой фононов пучка, чем и обусловлен рост частоты на начальном участке. Дальнейший спад частот обусловлен убыванием

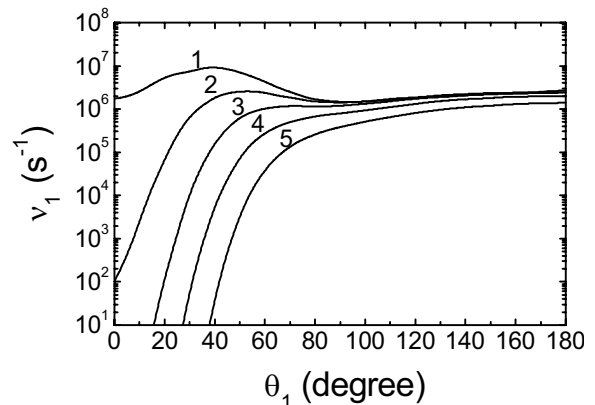


Рис. 16. Частота v_1 4pp как функция угла θ_1 между \mathbf{p}_1 и направлением пучка \mathbf{N} для различных величин cp_1/k_B равных 10, 11, 12, 13 и 14 К (линии 1-5 соответственно); $T=0,041$ К, $\chi=0,02$.

матричного элемента с ростом угла. При этом фононы с импульсом p_1 могут взаимодействовать уже практически со всеми фононами пучка. При углах $\theta_{1ME} \approx 80^\circ$ зависимость матричного элемента от угла θ_1 практически пропадает. При этом мы видим рост частот связанный с наличием в подынтегральном выражении (97) знаменателя R, который монотонно убывает с увеличением θ_1 .

С увеличением импульса p_1 ситуация несколько меняется. Угол θ_{12min} , согласно (100), увеличивается с ростом p_1 и становится больше чем угол θ_{1ME} . При этом у нас фактически пропадает участок, где частоты убывают. Именно такой ход кривой мы видим при $cp_1/k_B = 13$ К.

Отметим, что наблюдаемый на рис. 16 рост частоты при больших углах θ_1 связан с тем, что в результате взаимного сокращения слагаемых в матричном элементе, он практически не зависит от угла θ_1 и рост частоты в этом случае обусловлен знаменателя R в подынтегральном выражении (97). Если бы мы ограничились рассмотрением только одного слагаемого в M_Σ , то при больших значениях θ_1 частота не увеличивалась бы с ростом θ_1 , а уменьшалась.

УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ h - ФОНОНОВ, РОЖДЕННЫХ КОРОТКИМ l -ФОНОННЫМ ПУЧКОМ

Угловое распределение l - и h -фононов, может быть описано плотностью вероятности распределения фононов по углам. Плотность вероятности распределения рожденных h -фононов по ζ_1 определяется выражением

$$W_h(\zeta_1, \chi, T) = \frac{\int_0^{p_c} \varepsilon_1 N_b^{(sh)}(p_1, \zeta_1, \chi, T) p_1^2 dp_1}{4\pi^2 \hbar^3 \dot{E}_h}, \quad (101)$$

где

$$\dot{E}_h = \frac{1}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^2 d\zeta_1 \int_0^{p_c} \varepsilon_1 N_b^{(sh)}(p_1, \zeta_1, \chi, T) p_1^2 dp_1 \quad (102)$$

- полная энергия h -фононов, рожденных в единицу времени в единице объема, $N_b^{(sh)}(p_1, \zeta_1, \chi, T)$ определяется выражением (86), а верхний предел интегрирования по импульсу $p_{max} = 1,4p_c$ выбран из условий экспериментов [41], где основной вклад давался h -фононами с импульсами вблизи p_c .

Аналогичным образом введем плотность вероятности распределения l -фононов по ζ_1

$$W_l(\zeta_1, \chi, T) = \frac{\int_0^{p_c} \varepsilon_l n_l^{(0)}(p_1, \zeta_1, \chi, T) p_1^2 dp_1}{4\pi^2 \hbar^3 E_l}, \quad (103)$$

где

$$E_l = \frac{1}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^2 d\zeta_1 \int_0^{p_c} \varepsilon_l n_l^{(0)}(p_1, \zeta_1, \chi, T) p_1^2 dp_1 \quad (104)$$

- полная энергия l -фононов в пучке в единице объема, а $n_l^{(0)}(p_1, \zeta_1, \chi, T)$ определяется выражением (74).

Результаты численного расчета W_l и W_h по формулам (101), (103) при $\chi = 0,02$ и $T = 0,041$ приведены на рис. 17. Из рис. 17 следует, что W_h оказывается значительно более острой функцией угла, чем W_l .

Острота функций $W_{l,h}$ определяется угловой шириной соответствующих распределений, которая определяется выражением

$$\bar{\zeta}_{l,h} = \int_0^2 \zeta_{l,h} W_{l,h} d\zeta_{l,h}. \quad (105)$$

Для значений $\chi = 0,02$ и $T = 0,041$ получаем $\bar{\zeta}_l \approx 0,022$ и $\bar{\zeta}_h \approx 0,0046$, что соответствует $\bar{\theta}_l \approx 12^\circ$ и $\bar{\theta}_h \approx 5,5^\circ$. Эти рассчитанные значения находятся в хорошем согласии с экспериментальными значениями [41].

Отметим, что столь быстрое убывание W_h при увеличении ζ_1 связано с угловой зависимостью $N_b^{(sh)}$, которая приведена на рис. 18.

Как видно из рис. 18 $N_b^{(sh)}$ очень быстро убывает с ростом θ_1 . Это убывание определяется наличием множителя $\exp\left\{-\frac{\varepsilon_1 - \mathbf{p}_1 \mathbf{u}}{k_B T}\right\}$ в выражении (86), который имеет острый максимум при $\theta_1 = 0$. Отметим, что если в зависимости, приведенной на рис. 18 наличие экспоненциального множителя в $N_b^{(sh)}$ приводит к быстрому убыванию функции $N_b^{(sh)}(\theta_1)$, в то время как функция $\nu_1(\theta_1)$ имеет возрастающие участки, то зависимость $N_b^{(sh)}(p_1)$ за счет экспоненциального множителя оказывается более пологой, чем зависимость $\nu_1(p_1)$. Это объясняется тем, что экспонента является быстро растущей функцией p_1 при фиксированном значении θ_1 , что связано с увеличением значения модуля отрицательной функции $\psi(p_1)$ при увеличении p_1 .

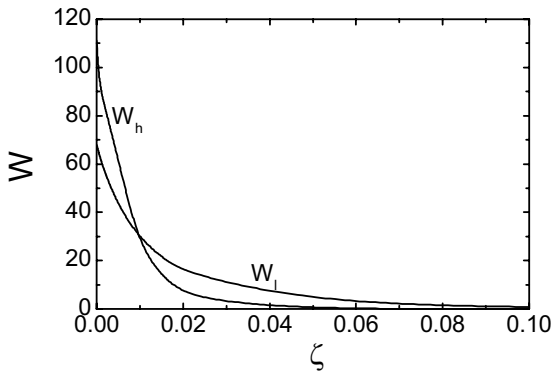


Рис. 17. Угловая зависимость плотности вероятности W для h - и l -фононов при $T=0,041$ К, $\chi=0,02$. Отметим, что угловое распределение для h -фононов уже, чем у l -фононов.

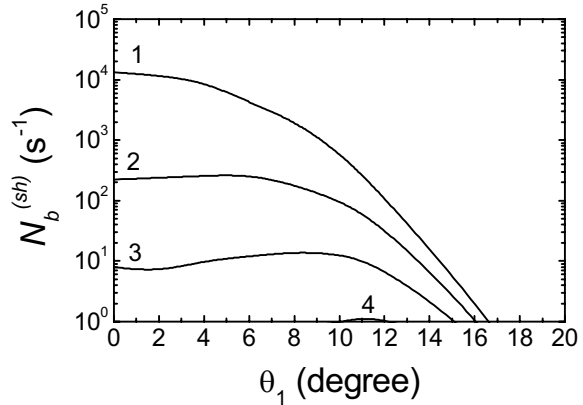


Рис. 18. Частота рождения h -фононов $N_b^{(sh)}$ в коротких импульсах как функция угла θ_1 между p_1 и направлением пучка для различных величин cp_1/k_B равных 10, 11, 12, 13 и 14 К (линии 1-4 соответственно); $T=0,041$ К, $\chi=0,02$.

ЭВОЛЮЦИЯ КОРОТКОГО ПУЧКА l-ФОНОНОВ, ОБУСЛОВЛЕННАЯ РОЖДЕНИЕМ h-ФОНОНОВ

В коротком фононном пучке, когда рожденные h -фононы успевают покинуть l -фононный пучок прежде чем успеет установиться равновесие между l - и h -фононами, кинетическое уравнение (69) согласно [40] можно записать в виде

$$\frac{dn_l}{dt} = N_b^{(sh)}. \quad (106)$$

Умножим (106) справа и слева на ε_1 и проинтегрировав по всем $\frac{d^3 p_1}{(2\pi\hbar)^3}$ получим

$$\frac{d\varepsilon_h}{dt} = \dot{E}_h, \quad (107)$$

где \dot{E}_h определяется выражением (102), а

$$\varepsilon_h = \frac{1}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^2 d\zeta_1 \int_{p_c}^{1,4 p_c} dp_1 p_1^2 \varepsilon_1 n_1. \quad (108)$$

Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{d\varepsilon_h}{dt} = -\frac{dE_l}{dt}, \quad (109)$$

где E_l - определяется выражением (104). Из (107) и (109) получаем

$$-\frac{dE_l}{dt} = \dot{E}_h. \quad (110)$$

Теперь умножив (106) справа и слева на p_{1z} аналогичным образом, получим

$$-\frac{dP_l}{dt} = \dot{P}_h, \quad (111)$$

где

$$P_l = \frac{1}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^2 d\zeta_l \int_0^{p_c} n_l^{(0)}(p_l, \zeta_l, \chi, T) p_l^3 (1 - \zeta_l) dp_l, \quad (112)$$

$$\dot{P}_h = \frac{1}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^2 d\zeta_l \int_{p_c}^{p_{\max}} N_b^{(sh)}(p_l, \zeta_l, \chi, T) p_l^3 (1 - \zeta_l) dp_l. \quad (113)$$

Таким образом, мы получили систему двух уравнений (110) и (111) относительно функций $\chi(t)$ и $T(t)$ с начальными условиями $\chi(t=0) = \chi_0$ и $T(t=0) = T_0$. Для ее решения удобно записать ее в виде

$$\begin{cases} -\frac{dE_l}{dt} = \dot{E}_h, \\ \frac{d}{dt}(E_l - cP_l) = -(\dot{E}_h - c\dot{P}_h). \end{cases} \quad (114)$$

Систему уравнений (114) можно разрешить относительно $\dot{\chi}(t)$ и $\dot{T}(t)$. Полученную систему двух уравнений можно решить численно и найти $\chi(t)$ и $T(t)$ при заданных начальных условиях $\chi(t=0) = \chi_0$ и $T(t=0) = T_0$.

На рис. 19 приведены зависимости χ и T от времени t для случая характерных экспериментальных значений $\chi_0 = 0,02$, $T_0 = 0,041$ К. Как видно из рис. 19 при рождении h -фононов увеличивается не только χ ,

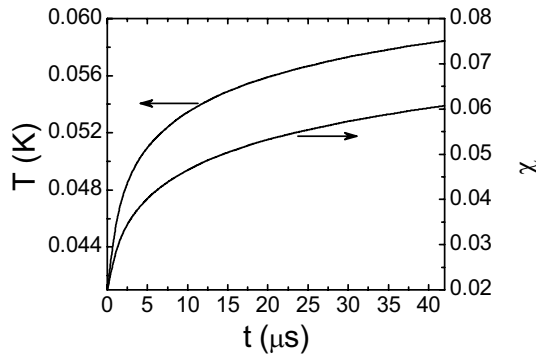


Рис. 19. Параметр анизотропии $\chi(t)$ и температура $T(t)$, вычисленные с начальными условиями $T_0=0,041$ К, $\chi_0=0,02$.

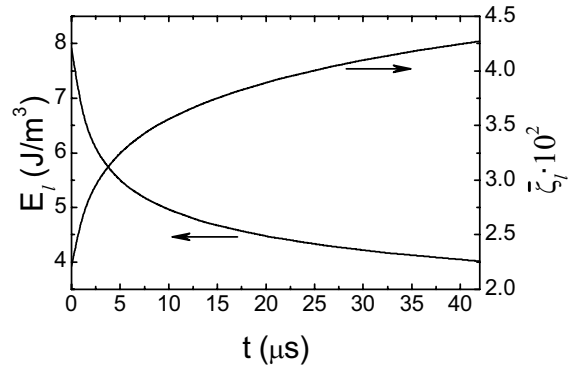


Рис. 20. l -фононная плотность энергии $E_l(t)$ и угловая ширина l -фононов, вычисленные с начальными условиями $T_0=0,041$ К, $\chi_0=0,02$.

но и T так, что полная плотность энергии l -фононного пучка уменьшается со временем.

На рис. 20 представлена зависимость от времени плотности энергии l -фононов $E_l(t) = E_l(\chi(t), T(t))$ и средней угловой ширины l -фононного пучка $\bar{\zeta}_l(t) = \bar{\zeta}_l(\chi(t), T(t))$. Уширение пучка со временем наблюдаемое на рис. 20 связано с законом сохранения импульса при рождении h -фононов в пучке l -фононов. Рождающиеся h -фононы, как это видно из рис. 17, имеют более острую зависимость от угла, и поэтому уносят в основном параллельную составляющую импульса, что приводит к уширению l -фононного пучка.

Отметим, что и при других значениях χ_0 и T_0 , графики качественно имеют тот же вид.

Введем величину

$$\Delta(t) = \frac{E_l(\chi_0, T_0) - E_l(\chi(t), T(t))}{E_l(\chi_0, T_0)}, \quad (115)$$

которая показывает какая часть энергии l -фононов перейдет в h -фононы.

На рис. 21 показано $\Delta(t)$ при $\chi_0 = 0,02$ для четырех значений начальной температуры $T_0 = 0,041$ К, $T_0 = 0,036$ К, $T_0 = 0,030$ К и $T_0 = 0,025$ К (кривые 1-4 соответственно). Из рис. 21 видно, что процесс рождения h -фононов идет более интенсивно при более высоком значении начальной температуры.

Зависимость $\Delta(t)$ приведенная на рис. 21 близка к зависимости полученной в [7, 8] с аппроксимационной Бозе конусной функцией распределения (12) при соответствующих значениях T_p и ζ_p .

На рис. 22 приведены зависимости $E_l(t=42\mu s)$ от $E_l(t=0)$.

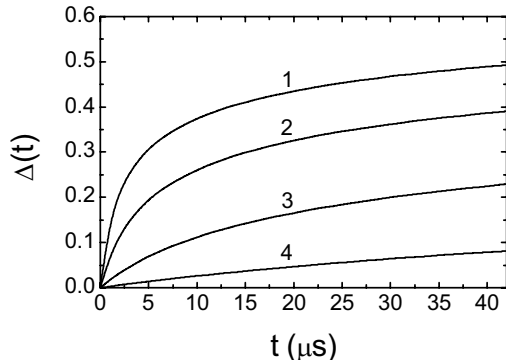


Рис. 21. Относительная доля энергии потерянной l-фононами из-за рождения h-фононов как функция времени для $\chi_0=0,02$ и различных T_0 , равных 0,041 К, 0,036 К, 0,030 К и 0,025 К (кривые 1-4).

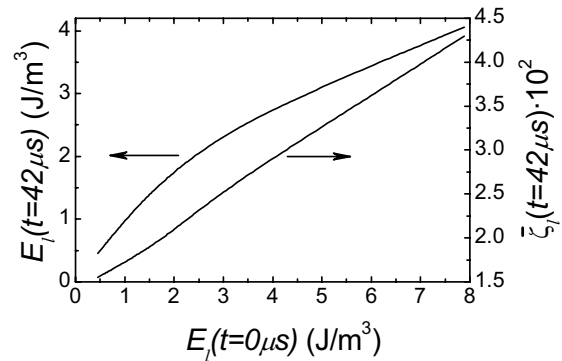


Рис. 22. l-фононная плотность энергии $E_l(t=42\text{ мкс})$ и угловая ширина l-фононов $\bar{\zeta}_l(t=42\text{ мкс})$ как функции $E_l(t=0)$, вычисленные с начальным значением $\chi_0=0,02$.

Из рис. 22 видно, что при увеличении начальной температуры на детектор будут приходить более широкие и более энергичные пучки. Именно такое явление наблюдалось в экспериментах [41], когда на нагреватель подавались сигналы различных мощностей.

Такой результат можно получить только исходя из точной функции распределения (72) и достаточно строгого и последовательного расчета. Отметим, что развитая здесь теория строго говоря применима только для очень широких пучков, когда пространственной эволюцией пучка можно пренебречь. Для пучков, которые реализовывались в экспериментах [41], полученные в этом разделе результаты следует уточнить исходя из пространственной эволюции пучка при его движении от нагревателя к детектору. Эволюция достаточно холодного пучка l-фононов, когда рождением h-фононов можно пренебречь, была рассмотрена в работах [42, 43].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы уникальные свойства анизотропных квазичастичных систем, наблюдавшиеся в экспериментах. Найдены энергетические и угловые распределения l-фононов, а также h-фононов в достаточно длинных пучках. Показано, что угловое распределение h-фононов уже, чем l-фононов в этом случае, что соответствует экспериментальным данным. Исследованы трехфононные процессы в изотропных и анизотропных фононных системах сверхтекучего гелия при различных давлениях. Найдена частота трехфононной релаксации в зависимости от угла, температуры, степени анизотропии фононного пучка и давления, что позволило проанализировать картину взаимодействия двух фононных пучков при различных углах пересечения и давлениях. Вычислена частота четырехфононного взаимодействия в анизотропных фононных системах для произвольных углов, определяющая частоту рождения и поглощения h-фононов l-фононным пучком. Найдено угловое распределение h-фононов рожденных коротким l-фононным пучком. Решена проблема эволюции l-фононного пучка, обусловленная рождением h-фононов. Это дало возможность объяснить наблюдаемые в эксперименте зависимости амплитуды l-фононного сигнала от подаваемой на нагреватель мощности.

Таким образом, в этой работе было представлено решение нескольких актуальных проблем анизотропных квазичастичных систем, показывающих несколько необычные явления возникают в этой активно развивающейся области физики квантовых жидкостей. Несомненно, нас ожидает еще не мало сюрпризов в этой области макрофизической квантовой физики.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. R.W. Gernsey and K. Luszczynski. Excitations Radiated from a Thermal Source in Helium II below 0.3 K // *Phys. Rev. A*-1971. –V. 3. - P. 1052-1060.
2. A.F.G. Wyatt, N.A. Lockerbie and R.A. Sherlock. Propagating Phonons in Liquid ^4He // *J. Phys. Condens. Matter*. –1989. – V. 1.- P. 3507-3522.
3. M.A.H. Tucker and A.F.G. Wyatt. Phonons in Liquid ^4He from a Heated Metal Film: I. The Creation of High-frequency Phonons // *J. Phys. Condens. Matter*. – 1994. –V. 6. - P. 2813-2824.
4. M.A.H. Tucker and A.F.G. Wyatt. Spatial Evolution of High Frequency Phonons in Superfluid ^4He from a Pulse-Heated Metal Film // *J. Low Temp. Phys.* -1998. –V. 113. – P. 621-626.
5. I.N. Adamenko, Yu.A. Kitsenko, K.E. Nemchenko, V.A. Slipko and A.F.G. Wyatt. Quasiequilibrium Distribution Function of Anisotropic Phonon Systems and the Interaction of Pulses of Low Energy Phonons in Superfluid Helium // *Phys. Rev. B*. -2005. – V. 72. -P. 054507.
6. I.N. Adamenko, Yu.A. Kitsenko, K.E. Nemchenko, V.A. Slipko and A.F.G. Wyatt. Three-Phonon Relaxation in Isotropic and Anisotropic Phonon Systems of Liquid Helium at Different Pressures // *Low Temp. Phys.* -2005. - V. 31. - P. 459.
7. I.N. Adamenko, K.E. Nemchenko, A.V. Zhukov, M.A.H. Tucker and A.F.G. Wyatt. The Creation of High Energy Phonons from Low Energy Phonons in Liquid Helium // *Phys. Rev. Lett.* -1999. -V. 82, -P. 1482.
8. A.F.G. Wyatt, M.A.H. Tucker, I.N. Adamenko, K.E. Nemchenko and A.V. Zhukov. High-Energy Phonon Creation From Cold Phonons in Pulses of Different Length in He II // *Phys. Rev. B*. -2000, -V. 62. –P. 9402.
9. I.N. Adamenko, K.E. Nemchenko and A.F.G. Wyatt. Phonon Interactions in an Anisotropic Phonon System Leading to a Suprathermal Distribution in Liquid ^4He // *JLTP*. -2001. –V. 125. -P. 1.
10. I.M. Khalatnikov. *An Introduction to the Theory of Superfluidity* (Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1989).
11. R.C. Dynes and V. Narayanamurti. Measurements of Anomalous Dispersion and Excitation Spectrum in He II // *Phys. Rev. B*. -1975. -V. 12. - P. 1720-1730.
12. W.G. Stirling, in *75th Jubilee Conference on Liquid Helium-4*, ed. J.G.M. Armitage, (World Scientific, Singapore 1983), P. 109.
13. R.C. Dynes and V. Narayanamurti. Evidence for Upward or "Anomalous" Dispersion in the Excitation Spectrum of He II // *Phys. Rev. Lett.* -1974. -V. 33. -P. 1195.
14. R.J. Donnelly and P.H. Roberts *A Theory of Temperature-Dependent Energy Levels: Thermodynamic Properties of He II* // *JLTP*. -1977. –V. 27. –P. 687-736; R.J. Donnelly, J.A. Donnelly and R.N. Hill. Specific Heat and Dispersion Curve for Helium II // *JLTP*. -1981. –V. 44. –P. 471-489.
15. A.F. Andreev and L.A. Melnikovsky. Thermodynamic Inequalities in Superfluid // *JETP Lett.* -2003. –V. 78, -P. 574.
16. L. Kramer. Thermodynamic Stability of Superfluid Flow Through a Channel // *Phys. Rev.* -1969. –V. 179. –P. 149.
17. I.N. Adamenko, K.E. Nemchenko, V.A. Slipko and A.F.G. Wyatt. Thermodynamics of Anisotropic Phonon Systems in Superfluid Helium // *J. Phys. Condens. Matter*. -2006. –V. 18. –P. 2805.
18. I.N. Adamenko, K.E. Nemchenko, V.A. Slipko and A.F.G. Wyatt. Anisotropic System of Quasiparticles in Superfluid Helium // *Phys. Rev. Lett.* -2006. –V. 96. –P. 065301.
19. R.E. Grisenti and J.P. Toennies. Cryogenic Microjet Source for Orthotropic Beams of Ultralarge Superfluid Helium Droplets // *Phys. Rev. Lett.* -2003. –V. 90. –P. 234501.
20. M.A.H. Tucker and A.F.G. Wyatt. Phonons in Liquid He from a Heated Metal Film: II. The Angular Distribution // *J. Phys. Condens. Matter*. -1994. –V. 6. -P. 2825.
21. R.V. Vovk, C.D.H. Williams and A.F.G. Wyatt. Interactions Between Sheets of Phonons in Liquid ^4He // *Phys. Rev. Lett.* - 2003. –V. 91. –P. 235302.
22. D.H.S. Smith, R. Vovk, C.D.H. Williams and A.F.G. Wyatt. Pressure Dependence of Interacting Phonons in Liquid ^4He // *Phys. Rev. B*. -2005. –V. 72. –P. 054506.
23. B.M. Abraham, Y. Eckstein, J.B. Ketterson, M. Kuchnir and P.R. Roach. Velocity of Sound, Density, and Gruneisen Constant in Liquid ^4He // *Phys. Rev. A*. -1970. -V. 1. –N. 2. -P. 250.
24. M.A.H. Tucker and A.F.G. Wyatt. The spectrum of High Energy Phonons Injected into Liquid ^4He // *Physica B*. -1994. –V. 194-196. -P. 549.
25. C.H. Aldrich III and D. Pines. Polarization Potentials and Elementary Excitations in He II at Low Temperatures // *JLTP*. - 1976. -V. 25, -N. 5/6. –P. 677.
26. C.H. Aldrich III, C.J. Pethick and D. Pines. Phonon Dispersion in He II at Long Wavelength and Low Temperatures //

- JLTP. -1976. -V. 25, N. 5/6. -P. 691.
27. R. Sridhar. Anomalous Phonon Dispersion in Helium II // Phys. Reports. -1987. -V. 146. -N. 5. -P. 259.
28. L.P. Pitayevski and Y.B. Levinson. Decay Threshold in the Phonon Spectra of Liquid Helium // Phys. Rev. B. -1976. -V. 14. -N. 1. -P. 263.
29. R.A. Sherlock, N.G. Mills and A.F.G. Wyatt. The Angular Spreading of Phonon Beams in Liquid ^4He : Upward Phonon Dispersion // J. Phys. C: Solid State Phys. -1975. -V. 8. -P. 2575.
30. J. Jackle and K.W. Kehr. High-Frequency Ultrasonic Attenuation in Superfluid Helium Under Pressure // Phys. Rev. Lett. -1971. -V. 27. -N. 10. -P. 654.
31. C.I. Um, S.Y. Lee, S.K. Yoo, T.F. George, L.N. Pandey and I.N. Adamenko. Viscosity and Ultrasonic Attenuation in ^4He below 0.6 K // ФНТ. -1997. -V. 23. -с. 537-545.
32. C.I. Um, H.K. Oh, W.H. Kahng and A. Isihara. Phonon Decay in Two-Dimensional Liquid ^4He // Phys. Rev. B. -1986. -V. 33. -N. 11. -P. 7550.
33. T.J. Sluckin and R.M. Bowley. The Attenuation of Phonons in Liquid Helium at Very Low Temperatures // J. Phys. C: Solid State Phys. -1974. -V. 7. -P. 1779-1786.
34. M.A.H. Tucker, A.F.G. Wyatt, I.N. Adamenko, A.V. Zhukov and K.E. Nemchenko. Three-Phonon Interactions and Initial Stage of Phonon Pulse Evolution in He II // Low Temp. Phys. -1999. -V. 25. -P. 488.
35. Ю.А. Кищенко, В.А. Слипка. Релаксация в фононных системах сверхтекучего гелия, обусловленная трехчастичными процессами // Вісник Харківського університету. -2004. -N. 619. - Вип. 1 /23/. -С. 81.
36. S. Halvin and M. Luban. Phonon Spectrum of Superfluid Helium // Phys. Lett. -1972. -V. A42. -P. 133.
37. H. J. Maris. Hydrodynamics of Superfluid Helium below 0.6 K. I. Viscosity of the Normal Fluid. // Phys. Rev. A -1973. -V. 8. -P. 1980-1987.
38. H. J. Maris. Hydrodynamics of Superfluid Helium below 0.6 K. II. Propagation of Temperature Waves. // Phys. Rev. A -1974. -V. 9. -P. 1412.
39. И.Н. Адаменко, Э.Я. Рудаевский. Кинетика фонон-примесной системы сверхтекучих растворов ^3He в ^4He // ФНТ. -1987. -т. 13. -N1. -с. 3-32.
40. I.N. Adamenko, Yu.A. Kitsenko, K.E. Nemchenko, V.A. Slipko and A.F.G. Wyatt. Creation and Decay of High-Energy Phonons in Anisotropic Systems of Low-Energy Phonons in Superfluid Helium // Phys. Rev. B. -2006. -V. 73. -P. 134505.
41. R.V. Vovk, C.D.H. Williams and A.F.G. Wyatt. Angular Distribution of a Pulse of Low-Energy Phonons in Liquid ^4He // Phys. Rev. B. 2003. -V. 68. -P. 134508.
42. I.N. Adamenko, K.E. Nemchenko, V.A. Slipko and A.F.G. Wyatt. Evolution of a Cool Phonon Pulse Propagating in Superfluid Helium // Phys. Rev. B. -2003. -V. 68. -P. 134507.
43. I.N. Adamenko, K.E. Nemchenko, V.A. Slipko and A.F.G. Wyatt. Transverse Evolution of Cylindrical Phonon Pulse in Superfluid Helium-4// JLTP. -2005. -V. 138. -P. 67.

ANISOTROPIC PHONON SYSTEMS IN SUPERFLUID HELIUM

I.N. Adamenko¹, Yu.A. Kitsenko², K.E. Nemchenko¹, V.A. Slipko¹ and A.F.G. Wyatt³

¹*V.N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Square 4, Kharkiv 61077, Ukraine*

²*Akhiezer Institute for Theoretical Physics, National Science Center, Kharkiv Institute of Physics and Technology, National Academy of Sciences of Ukraine, 1, Academicheskaya Street, Kharkov, 61108, Ukraine*

³*School of Physics, University of Exeter, Exeter EX4 4QL, United Kingdom*

In the paper a number of remarkable phenomena, which have been recently discovered in anisotropic phonon systems of superfluid ^4He , are considered. They are the phenomenon of high energy phonon creation by low energy phonon pulse, suprathermal distribution of high energy phonons in long phonon pulses and formation of hot line, which arises in colliding of phonon pulses. Three phonon processes in isotropic and anisotropic phonon systems of superfluid helium at different pressures are investigated. The dependence of three phonon rate on angle, temperature, measure of anisotropy of phonon pulse and pressure is found, what allowed to analyze the interaction picture of two phonon pulses at different intersection angles and pressures. The rate of four phonon interaction in anisotropic phonon systems at arbitrary angles, which determines the creation and decay rates of high energy phonons in the pulse of low energy phonons, is calculated. This allowed to account for the phenomena observed experimentally.

KEY WORDS: phonon, anisotropic system, distribution function, phonon-phonon interaction, relaxation rate.