УДК 539.12

НЕЛИНЕЙНАЯ СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

С.А. Дуплий[1], Дж.А. Голдин[2], В.М. Штелень[3]
[1] *Физико-технический факультет, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина*
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
steven.a.duplij@univer.kharkov.ua, http://webusers.physics.umn.edu/~duplij
[2] *Departments of Mathematics and Physics, Rutgers University*
Piscataway, NJ 08854, USA
geraldgoldin@dimacs.rutgers.edu, http://www.physics.rutgers.edu/people/pips/Goldin.html
[3] *Department of Mathematics, Rutgers University*
Piscataway, NJ 08854, USA
shtelen@math.rutgers.edu, http://www.math.rutgers.edu/~shtelen
Поступила в редакцию 15 сентября 2007 г.

В работе предложен обобщенный подход к нелинейной классической электродинамике и суперсимметричной электродинамике, который учитывает максимально возможные виды сред (анизотропные, пироэлектрические, киральные и ферромагнитные), возможные нелокальные эффекты и описывает как лагранжевы, так и нелагранжевы теории. Введены в рассмотрение обобщенные материальные уравнения и конститутивные тензоры самого общего вида. Рассматривается электромагнитная дуальность в терминах введенных тензоров. Предложено суперсимметричное обобщение материальных уравнений в суперполевом виде.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: материальные уравнения, нелинейная электродинамика, дуальность, суперсимметрия, суперполе

Хорошо известно, что для описания классических электромагнитных полей в средах одних уравнений Максвелла недостаточно, и вводятся так называемые материальные уравнения [1, 2]. Эти уравнения связи представляют собой дополнительные функциональные (линейные или нелинейные [3]) соотношения между напряженностями электрического и магнитного полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ и соответствующими индукциями $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$. Явный вид материальных уравнений определяется свойствами среды и возможными симметриями [4]. С другой стороны, считалось, что лоренц-инвариантность уравнений Максвелла несовместима с галилеевой симметрией. Однако еще в работе [5] было показано, что это проблема именно материальных уравнений, а сами уравнения Максвелла в среде инвариантны относительно обеих симметрий; в этой работе также исследовался галилеев предел при линейных материальных уравнениях, но с дополнительными связями на электромагнитные поля. Более того, в [6] был сделан вывод о том, что построение галилеево-инвариантной теории невозможно. Тем не менее, выход был найден в привлечении нелиненых материальных уравнений [7, 8], что позволило построить галилеево-инвариантную электродинамику, в которой возможно распространение волн при конечной скорости, в то время, как в линейной галилеево-инвариантной теории эта скорость бесконечна (см. обсуждение в [5]). Необходимость такой теории диктуется экспериментами по измерению скорости света в средах (например, экспериментальные результаты [9] показали возможность замедления скорости света до 17 м/сек).

Целью данной работы является получение наиболее общего вида нелинейных материальных уравнений, которые приводят к лагранжевой и нелагранжевой классической электродинамике, допускающей нетривиальный галилеев предел. При этом вид самих уравнений Максвелла не меняется. Также в работе предложено суперсимметричное обобщение материальных уравнений для суперсимметричной электродинамики в суперполевом виде.

ЛОРЕНЦЕВЫ И ГАЛИЛЕЕВЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Вначале запишем уравнения Максвелла [1] для классических электромагнитных полей в системе СИ, то есть в таком виде, чтобы скорость света не входила в определение фундаментальных полей [2]. Это, в частности, позволяет получить галилееву теорию как нетривиальный предел $c \to \infty$ релятивистской теории [7].

Поскольку хорошо известно [1], что статическое гравитационное поле эффективно действует как гиротропная среда с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_{grav} и μ_{grav}, то мы ограничимся рассмотрением теории в плоском пространстве-времени, которое определяется метрикой Минковского $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$, $x^\mu = \left(ct, x^i\right)$, $\mu, v... = 0, 1, 2, 3$, $i, j... = 1, 2, 3$ с $\partial_\mu = \partial \diagup \partial x^\mu = \left[c^{-1}\partial \diagup \partial t, \nabla\right]$ и антисимметричным тезором Леви-Чивита $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, $\varepsilon^{0123} = 1$. В этих обозначениях уравнения Максвелла запишутся в виде (не содержащем явно скорость света c)

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, \tag{2}$$

где $\mathbf{j}$ и ρ плотности тока и заряда. Уравнения Максвелла (1)–(2) инвариантны относительно преобразований Лоренца [1, 2]. Например, при преобразованиях

$$x'_{||} = \gamma\left(\mathbf{x} - \mathbf{v}t\right)_{||}, \; x'_{\perp} = x_{\perp}, \; t' = \gamma\left(t - \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right), \; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3}$$

плотности тока и заряда преобразуются как

$$j'_{||} = \gamma\left(\mathbf{j} - \mathbf{v}\rho\right)_{||}, \; j'_{\perp} = j_{\perp}, \; \rho' = \gamma\left(\rho - \frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right), \tag{4}$$

а поля преобразуются соответственно как

$$E'_{||} = E_{||}, \; E'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)_{\perp}, \; B'_{||} = B_{||}, \; B'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right)_{\perp}, \tag{5}$$

$$D'_{||} = D_{||}, \; D'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{D} + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)_{\perp}, \; H'_{||} = H_{||}, \; H'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{H} - \mathbf{v}\times\mathbf{D}\right)_{\perp}. \tag{6}$$

Отметим, что имеется 6 лоренц-инвариантов

$$C_1 = \mathbf{B}^2 - \frac{1}{c^2}\mathbf{E}^2, \; C_2 = \mathbf{B}\cdot\mathbf{E}, \; \mathbf{C}_3 = \mathbf{D}^2 - \frac{1}{c^2}\mathbf{H}^2, \; C_4 = \mathbf{D}\cdot\mathbf{H}, \; C_5 = \mathbf{B}\cdot\mathbf{H} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}, \; C_6 = \mathbf{B}\cdot\mathbf{D} + \frac{1}{c^2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}. \tag{7}$$

Можно проверить, что уравнения Максвелла (1)–(2) инвариантны также относительно галилеевых преобразований

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t, \; t' = t, \; \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}, \; \mathbf{B}' = \mathbf{B}, \; \mathbf{D}' = \mathbf{D}, \; \mathbf{H}' = \mathbf{H} - \mathbf{v}\times\mathbf{D}, \; \mathbf{j}' = \mathbf{j} - \mathbf{v}\rho, \; \rho' = \rho, \tag{8}$$

которые, очевидно, есть предел $c \to \infty$ преобразований Лоренца (5)–(6). Преобразования Лоренца и Галилея вместе принадлежат к общей группе линейных преобразовний $GL(4, \mathbb{R})$, допускаемые уравнениями Максвелла, что есть следствие неполноты системы (1)–(2): 8 уравнений для 12 неизвестных функций. Таким образом, необходимы дополнительные соотношения между полями $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, которые и будут нарушать группу $GL(4, \mathbb{R})$ до группы Лоренца или Галилея [7]. Другие варианты такого нарушения рассмотрены в [3], где также отмечается, что уравнения Максвелла (1)–(2) в отсутствие материальных уравнений общековариантны, то есть инвариантны относительно бесконечномерной группы Ли дифференцируемых преобразований $x'_{\mu} = f_{\mu}(x)$, если на многообразии не введена метрика или аффинная связность (см. также [10]).

В четырехмерных обозначениях вводятся антисимметричные тензоры напряженностей

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_x & \frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_z \\ -\frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & cD_x & cD_y & cD_z \\ -cD_x & 0 & -H_z & H_y \\ -cD_y & H_z & 0 & -H_x \\ -cD_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

и Ходж дуальные напряженности $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ и $\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G_{\rho\sigma}$. В этих обозначениях уравнения Максвелла имеют вид

$$\partial_{\mu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_{\mu}G^{\mu\nu} = j^{\nu}, \tag{10}$$

где $j^{\mu} = (c\rho, \mathbf{j})$ — 4-ток. Решением первого уравнения в (10) является $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$, где A_{μ} — абелево калибровочное поле. Отметим, что подобного представления для $G_{\mu\nu}$ не существует.

НЕЛИНЕЙНЫЕ МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Физически наблюдаемыми величинами считаются поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, поскольку ими определяется сила Лоренца $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$ для заряда q, движущегося со скоростью $\mathbf{v}$. В то же время поля $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ определяются свойствами среды (поляризуемостью и намагничиванием соответственно) и зависят также от физически наблюдаемых полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, так что в общем виде можно записать

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}\left(\mathbf{E}, \mathbf{B}\right), \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}\left(\mathbf{E}, \mathbf{B}\right). \tag{11}$$

Эти уравнения называются материальными уравнениями (а также уравнениями связи или уравнениями состояния). В простейшем случае теории в вакууме они линейны $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, где ε_0 и μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости, причем $\varepsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$. В работе [4] показано, что, если материальные уравнения имеют вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon\left(\mathbf{E},\mathbf{H}\right)\mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mu\left(\mathbf{E},\mathbf{H}\right)\mathbf{H}, \tag{12}$$

где $\varepsilon\left(\mathbf{E},\mathbf{H}\right)$, и $\mu\left(\mathbf{E},\mathbf{H}\right)$ произвольные гладкие функции, удовлетворяющие соотношению $\varepsilon\left(\mathbf{E},\mathbf{H}\right)\mu\left(\mathbf{E},\mathbf{H}\right) = c^{-2}$, то теория (без зарядов и токов) обладает Пуанкаре симметрией. Кроме того, тот же вывод справедлив и для функциональной зависимости более общего вида $\mathbf{D} = \mathbf{D}\left(\mathbf{E},\mathbf{H}\right)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}\left(\mathbf{H}\right)$ $[3,4]$. Если теория лоренц-инвариантна, то самые общие нелинейные материальные уравнения имеют следующий вид $[3,7]$

$$\mathbf{D} = M\left(C_1,C_2\right)\mathbf{B} + \frac{1}{c^2}N\left(C_1,C_2\right)\mathbf{E}, \tag{13}$$

$$\mathbf{H} = N\left(C_1,C_2\right)\mathbf{B} - M\left(C_1,C_2\right)\mathbf{E}, \tag{14}$$

где $M\left(C_1,C_2\right)$ и $N\left(C_1,C_2\right)$ — гладкие функции двух первых лоренц-инвариантов из (7). Поскольку $C_1 = C_1\left(\mathbf{B},\mathbf{E}\right)$ и $C_2 = C_2\left(\mathbf{B},\mathbf{E}\right)$, зависимости (13)–(14) существенно нелинейны. Отметим. что при наличии материальных уравнений вида (13)–(14) остальные лоренц-инварианты выражаются через C_1 и C_2 формулами

$$C_3 = \left(M^2\left(C_1,C_2\right) - \frac{1}{c^2}N^2\left(C_1,C_2\right)\right)C_1 + \frac{4}{c^2}M\left(C_1,C_2\right)N\left(C_1,C_2\right)C_2, \tag{15}$$

$$C_4 = M\left(C_1,C_2\right)N\left(C_1,C_2\right)C_1 - \left(M^2\left(C_1,C_2\right) - \frac{1}{c^2}N^2\left(C_1,C_2\right)\right)C_2, \tag{16}$$

$$C_5 = N\left(C_1,C_2\right)C_1 - 2M\left(C_1,C_2\right)C_2, \tag{17}$$

$$C_6 = M\left(C_1,C_2\right)C_1 + \frac{2}{c^2}N\left(C_1,C_2\right). \tag{18}$$

В простейшем случае теории в вакууме имеем

$$M_{vac}\left(C_1,C_2\right) = 0, \qquad N_{vac}\left(C_1,C_2\right) = \frac{1}{\mu_0} \tag{19}$$

с учетом того, что $\varepsilon_0\mu_0 = c^{-2}$. Если система обладает конформной инвариантностью, то нелинейные функции инвариантов зависят только от их отношения [4]

$$M\left(C_1,C_2\right) = M_c\left(\frac{C_1}{C_2}\right), \qquad N\left(C_1,C_2\right) = N_c\left(\frac{C_1}{C_2}\right). \tag{20}$$

Нетривиальным примером нелинейной электродинамики является теория Борна-Инфельда [11], для которой

$$M\left(C_1,C_2\right) = -\frac{C_2}{\sqrt{1 + C_1 - \frac{1}{c^2}C_2^2}}, \tag{21}$$

$$N\left(C_1,C_2\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + C_1 - \frac{1}{c^2}C_2^2}}. \tag{22}$$

Из сравнения (20) и (21)–(22) следует, что электродинамика Борна-Инфельда не является конформной инвариантной теорией.

Важно подчеркнуть, что функция $M\left(C_1,C_2\right)$ не может быть константой, отличной от нуля, а есть существенно нелинейная фунция, что следует из дополнительной симметрии теории, описываемой уравнениями Максвелла совместно с материальными уравнениями вида (13)–(14). Действительно, пусть $M\left(C_1,C_2\right) = m = const$. Тогда уравнения Максвелла для наблюдаемых полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ будут иметь вид

$$\frac{1}{c^2}\text{div}\ \left(N\left(C_1,C_2\right)\mathbf{E}\right) = \rho, \tag{23}$$

$$\text{rot}\ \left(N\left(C_1,C_2\right)\mathbf{B}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\left(N\left(C_1,C_2\right)\mathbf{E}\right)}{\partial t} + \mathbf{j}, \tag{24}$$

который не содержит m, поэтому всегда можно выбрать “калибровку” $m = 0$.

ГАЛИЛЕЕВА ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Поскольку в выбранных обозначениях скорость света не входит в уравнения Максвелла, галилеева электродинамика, соответствующая нарушению полной линейной группы симметрии уравнений Максвелла $GL(4,\mathbb{R})$ до галилеевой группы преобразований (8), может быть получена как формальный предел $c \to \infty$ одних лишь материальных уравнений (13)–(14). Тогда для галилеево-инвариантных материальных уравнений получаем

$$\mathbf{D} = M^G(G_1,G_2)\,\mathbf{B}, \tag{25}$$
$$\mathbf{H} = N^G(G_1,G_2)\,\mathbf{B} - M^G(G_1,G_2)\,\mathbf{E}, \tag{26}$$

где G_1, G_2 — первые два галилеевых инварианта из 6, получаемых из (7) $c \to \infty$ пределом, то есть

$$G_1 = \mathbf{B}^2,\ G_2 = \mathbf{B}\cdot\mathbf{E},\ G_3 = \mathbf{D}^2,\ G_4 = \mathbf{D}\cdot\mathbf{H},\ G_5 = \mathbf{B}\cdot\mathbf{H} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{D},\ G_6 = \mathbf{B}\cdot\mathbf{D}. \tag{27}$$

Отметим, что остальные галилеевы инварианты выражаются через первые два инварианта формулами

$$G_3 = M^{G2}(G_1,G_2)\,G_1, \tag{28}$$
$$G_4 = M^G(G_1,G_2)\,N^G(G_1,G_2)\,G_1 - M^{G2}(G_1,G_2)\,G_2, \tag{29}$$
$$G_5 = N^G(G_1,G_2)\,G_1 - 2M^G(G_1,G_2)\,G_2, \tag{30}$$
$$G_6 = M^G(G_1,G_2)\,G_1, \tag{31}$$

которые являются $c \to \infty$ пределом формул (15)–(18).

В данном подходе галилеева электродинамика является существенно нелинейной теорией, поскольку отличная от нуля плотность заряда несовместима с постоянством функции $M^G(G_1,G_2)$. Так, пусть $M^G(G_1,G_2) = m = const$, тогда из материального уравнения (25) и уравнений Максвелла следует, что $\mathrm{div}\,\mathbf{D} = m\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$ всегда, что несовместимо с уравнением $\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho$ при $\rho \neq 0$.

Частные случаи галилеевой электродинамики при выборе нелинейных функций

$$M^G(G_1,G_2) = 0, \quad N^G(G_1,G_2) = G_2 \quad (\text{с } \rho = 0), \tag{32}$$
$$M^G(G_1,G_2) = G_2, \quad N^G(G_1,G_2) = \mu_0^{-1} \quad (\text{с } \rho \neq 0) \tag{33}$$

рассматривались в работе [7], где также обсуждались отличия данного подхода от предшествующих (см. [5, 6]).

ОБОБЩЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим нелинейные материальные уравнения (13)–(14) в 4-инвариантном виде [8]

$$G_{\mu\nu} = N(C_1,C_2)\,F_{\mu\nu} + cM(C_1,C_2)\,\tilde{F}_{\mu\nu}, \tag{34}$$

где лоренц-инварианты C_1, C_2 из (7) выражаются теперь через напряженности формулами

$$C_1 = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \equiv 2X, \qquad C_2 = -\frac{c}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv -cY, \tag{35}$$

где лоренц-инвариантные величины X, Y введены для удобства работы в 4D обозначениях.

Если взять от (34) Ходж-сопряжение и представить эту пару уравнений в виде

$$\begin{pmatrix} G_{\mu\nu} \\ \tilde{G}_{\mu\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N(C_1,C_2) & cM(C_1,C_2) \\ -cM(C_1,C_2) & N(C_1,C_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{\mu\nu} \\ \tilde{F}_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \tag{36}$$

то в пространстве “спиноров”

$$\Pi^F = \begin{pmatrix} F_{\mu\nu} \\ \tilde{F}_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad \Pi^G = \begin{pmatrix} G_{\mu\nu} \\ \tilde{G}_{\mu\nu} \end{pmatrix} \tag{37}$$

можно заметить кватернионную структуру (аналогично [12])

$$\Pi^G = \mathbb{Q}\cdot\Pi^F, \tag{38}$$

где кватернион $\mathbb{Q}$ определяется формулой

$$\mathbb{Q} = N(C_1,C_2)\,\sigma_0 + icM(C_1,C_2)\,\sigma_2 \tag{39}$$

и $\sigma_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ — матрицы Паули в этом пространстве.

Несмотря на достаточную общность, материальные уравнения вида (13)–(14) и (34) не учитывают, например, анизотропные среды [13], пироэлектрические и ферромагнитные материалы, киральные среды [14], нелокальные эффекты. Поэтому самым общим выражением, учитывающим все перечисленные варианты сред, будет

$$G_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1} \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x^{\lambda_1}} + Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1\lambda_2} \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x^{\lambda_1} \partial x^{\lambda_2}} + \ldots, \tag{40}$$

где мы ввели три типа конститутивных тензоров $S_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$, $Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1\ldots\lambda_n}$, каждый из которых отвечает своему типу среды. Поскольку теперь формула (40) покрывает все возможные типы материальных уравнений, то рассматриваемые вместе (40) и уравнения Максвелла (10) определяют обобщенную нелинейную классическую электродинамику, которая описывает все типы материальных сред.

Для того, чтобы теория было лоренц-инвариантной все конститутивные тензоры должны зависеть от лоренц-инвариантов X, Y следующим образом: $S_{\mu\nu}$ — константа,

$$R_{\mu\nu}^{\rho\sigma} = R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}(X, Y), \quad Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1\ldots\lambda_n} = Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1\ldots\lambda_n}(X, Y, \ldots), \tag{41}$$

где "$\ldots$" означают производные инвариантов вплоть до порядка n.

Очевидно, что $S_{\mu\nu}$ — антисимметричный, $R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$ — антисимметричный по верхним и по нижним индексам, $Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1\ldots\lambda_n}$ — антисимметричный по верхним и по первым двум нижним индексам и симметричный по остальным индексам λ_i лоренцевы тензоры.

Рассмотрим некоторые примеры. Для простейшего случая вакуума имеем[1]

$$S_{\mu\nu} = 0, \quad R_{\mu\nu}^{\rho\sigma} = \mu_0^{-1} \delta_{[\mu}^{\rho} \delta_{\nu]}^{\sigma}, \quad Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1\ldots\lambda_n} = 0, \tag{42}$$

так, что единственный конститутивный тензор $R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$ "диагонален". Для электродинамики Борна-Инфельда имеем

$$S_{\mu\nu} = 0, \tag{43}$$

$$R_{\mu\nu}^{\rho\sigma} = \frac{\delta_{[\mu}^{\rho} \delta_{\nu]}^{\sigma} - cY \varepsilon_{[\mu\nu]\lambda\delta} \eta^{\lambda\rho} \eta^{\delta\sigma}}{\sqrt{1 + 2X - Y^2}}, \tag{44}$$

$$Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1\ldots\lambda_n} = 0. \tag{45}$$

Рассмотрим анизотропную среду с тензорными проницаемостями ε_{ij} и μ_{ij} ($i, j = x, y, z$), тогда материальные уравнения (не описываемые формулами вида (13)–(14)) будут иметь вид $\mathbf{D}_i = \varepsilon_{ij} \mathbf{E}_j$, $\mathbf{B}_i = \mu_{ij} \mathbf{H}_j$, для которых конститутивный тензор $R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$ легко может быть найден, а остальные $S_{\mu\nu}$ и $Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1\ldots\lambda_n}$ зануляются. Случай, когда $S_{\mu\nu} \neq 0$, соответствует пироэлектрическим и ферромагнитным материалам и будет рассмотрен отдельно.

ЛАГРАНЖЕВА НЕЛИНЕЙНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Пусть мы имеем лагранжиан $L(X, Y)$, зависящий от лоренцевых инвариантов и описывающий нелинейную классическую электродинамику. Тогда из материального уравнения (34) имеем

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial L(X, Y)}{\partial X} F_{\mu\nu} + \frac{\partial L(X, Y)}{\partial Y} \tilde{F}_{\mu\nu}. \tag{46}$$

Сравнивая (40) and (46), получаем конститутивные тензоры для обобщенной лагранжевой нелинейной электродинамики

$$S_{\mu\nu} = 0, \tag{47}$$

$$R_{\mu\nu}^{\rho\sigma} = \frac{\partial L(X, Y)}{\partial X} \delta_{[\mu}^{\rho} \delta_{\nu]}^{\sigma} + \frac{\partial L(X, Y)}{\partial Y} \varepsilon_{[\mu\nu]\lambda\delta} \eta^{\lambda\rho} \eta^{\delta\sigma}, \tag{48}$$

$$Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1\ldots\lambda_n} = 0. \tag{49}$$

В этом случае нелинейные функции M and N из (13)–(14) имеют специальный вид

$$N_L(X, Y) = \frac{\partial L(X, Y)}{\partial X}, \qquad M_L(X, Y) = \frac{1}{c} \frac{\partial L(X, Y)}{\partial Y}. \tag{50}$$

[1] Квадратными скобками обозначена антисимметризация с учетом множителя, то есть $x_{[\mu\nu]} \equiv (x_{\mu\nu} - x_{\nu\mu})/2$.

Таким образом, для того, чтобы материальные уравнения вида (34) совместно с уравнениями Максвелла описывали лагранжеву нелинейную электродинамику, необходимо, чтобы функции $M(X,Y)$ и $N(X,Y)$ были связаны условием [8]

$$\frac{\partial N_L(X,Y)}{\partial Y} = c\frac{\partial M_L(X,Y)}{\partial X}. \tag{51}$$

В качестве примера можно привести лагранжиан электродинамики Борна-Инфельда [11].

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДУАЛЬНОСТИ

Рассмотрим преобразования дуальности $F_{\mu\nu} \leftrightarrow \tilde{G}_{\mu\nu}$ [15]

$$\delta F_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu}, \qquad \delta G_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}, \tag{52}$$

Условие (анти)самодуальности определяется формулой

$$F_{\mu\nu} = \epsilon\tilde{G}_{\mu\nu} \Rightarrow X = \epsilon Y, \tag{53}$$
$$\epsilon = \pm 1. \tag{54}$$

При этом выполняется основное соотношение дуальной теории

$$F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = G_{\mu\nu}\tilde{G}^{\mu\nu} \tag{55}$$

или эквивалентно $\mathbf{D}\cdot\mathbf{H} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{E}$.

Используя (40), можно получить условия (анти)самодуальности для конститутивного тензора $R^{\rho\sigma}_{\mu\nu}$ (при $S_{\mu\nu} = 0$, $Q^{\rho\sigma\lambda_1\ldots\lambda_n}_{\mu\nu} = 0$) в следующем виде

$$R^{\rho\sigma}_{\mu\nu}\varepsilon_{\rho\sigma\lambda\delta}\eta^{\lambda[\mu}\eta^{\delta\nu]} = 2\epsilon. \tag{56}$$

Конечные преобразования дуальности определяются формулами

$$F'_{\mu\nu} = aF_{\mu\nu} + b\tilde{G}_{\mu\nu}, \tag{57}$$
$$G'_{\mu\nu} = eG_{\mu\nu} + f\tilde{F}_{\mu\nu}, \tag{58}$$

где $af - be = 1$. Учитывая материальные уравнения вида (34) и их Ходж-сопряженные, можно получить

$$F'_{\mu\nu} = U^{\rho\sigma}_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}, \tag{59}$$
$$G'_{\mu\nu} = V^{\rho\sigma}_{\mu\nu}G_{\rho\sigma}, \tag{60}$$

где $U^{\rho\sigma}_{\mu\nu}$ и $V^{\rho\sigma}_{\mu\nu}$ можно назвать “тензорами дуальности”, которые имеют вид

$$U^{\rho\sigma}_{\mu\nu} = (a - bcM(C_1,C_2))\,\delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\nu} + \frac{1}{2}bN(C_1,C_2)\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta}\eta^{\lambda\rho}\eta^{\delta\sigma}, \tag{61}$$
$$V^{\rho\sigma}_{\mu\nu} = \left(e + \frac{fcM(C_1,C_2)}{N^2(C_1,C_2) + c^2M^2(C_1,C_2)}\right)\delta^{\rho}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\nu} + \frac{1}{2}\frac{N(C_1,C_2)}{N^2(C_1,C_2) + c^2M^2(C_1,C_2)}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta}\eta^{\lambda\rho}\eta^{\delta\sigma}. \tag{62}$$

Отметим, что уравнения движения можно получить непосредственно методом, изложенным в [15].

Дальнейшее рассмотрение свойств конститутивных тензоров $S_{\mu\nu}$, $R^{\rho\sigma}_{\mu\nu}$, $Q^{\rho\sigma\lambda_1\ldots\lambda_n}_{\mu\nu}$ и различные их приложения будут рассмотрены в отдельной работе.

СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Рассмотрим суперсимметричную версию классической электродинамики и суперполевое обобщение материальных уравнений в суперпространстве. Выберем обозначения (в основном следуя [16]), в которых $N = 1$ четырехмерное суперпространство есть $z^M = \left\{x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\right\}$, где мы ввели “объединенный” индекс $M = \{\mu, \alpha, \dot{\alpha}\}$ и $\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ $(\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2)$ — дополнительные грассмановы координаты (двухкомпонентные майорановские спиноры)[2].

Преобразования $N = 1$ $D = 4$ суперсимметрии есть

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + i\lambda^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}}, \tag{63}$$
$$\tilde{\theta}^\alpha = \theta^\alpha + \lambda^\alpha, \qquad \tilde{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}} = \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \lambda^{\dot{\alpha}}, \tag{64}$$

[2] Спинорные индексы будем обозначать буквами из начала греческого алфавита, которые опускаются и поднимаются с помощью полностью антисимметричного тензора $\varepsilon^{12} = -\varepsilon_{12} = \varepsilon_{\dot{1}\dot{2}} = -\varepsilon^{\dot{1}\dot{2}} = 1$..

где $\lambda^{\alpha}, \lambda^{\dot\alpha}$ — грассмановы постоянные антикоммутирующие спиноры. Преобразования (63)–(64) генерируются суперзарядами

$$\mathrm{Q}_{\alpha} = -i\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} + \sigma^{\mu}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \tag{65}$$

$$\bar{\mathrm{Q}}_{\dot\alpha} = i\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} + \theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \tag{66}$$

$$\left\{\mathrm{Q}_{\alpha}, \bar{\mathrm{Q}}_{\dot\alpha}\right\} = 2i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \tag{67}$$

следующим образом $\tilde z^M = \exp\left[i\left(\lambda^{\alpha}\mathrm{Q}_{\alpha} + \bar{\mathrm{Q}}_{\dot\alpha}\lambda^{\dot\alpha}\right)\right] z^M$, где $\sigma^{\mu}_{\alpha\dot\alpha} = (I, \vec\sigma)_{\alpha\dot\alpha}$ — матрицы Паули. Ковариантные суперпроизводные определяются формулами

$$\mathrm{D}_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \tag{68}$$

$$\mathrm{D}_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} - i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \tag{69}$$

$$\bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} + i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \tag{70}$$

$$\left\{\mathrm{D}_{\alpha}, \bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha}\right\} = 2i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \tag{71}$$

так что остальные (анти)коммутаторы, кроме (67) и (71), зануляются.

Общее суперполе $\Phi\left(x,\theta,\bar\theta\right)$ (с произвольными не указанными здесь индексами) как функция нильпотентных грассмановых величин θ^{α}, $\bar\theta^{\dot\alpha}$ раскладывается в конечный ряд по ним с коэффициентами, которые являются обычными и спинорными функциями (мультиплет полей) и перемешиваются (инфинитезимальными) преобразованиями суперсимметрии

$$\delta\Phi\left(x,\theta,\bar\theta\right) = i\left(\lambda^{\alpha}\mathrm{Q}_{\alpha} + \bar{\mathrm{Q}}_{\dot\alpha}\lambda^{\dot\alpha}\right)\Phi\left(x,\theta,\bar\theta\right). \tag{72}$$

Дальнейшие подробности можно найти, например, в [16].

Абелево калибровочное поле $A_{\mu}(x)$ входит в векторный мультиплет и является компонентой калибровочного суперполя $\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar\theta\right) = \mathsf{V}^{+}\left(x,\theta,\bar\theta\right)$, где $+$ означает суперэрмитово сопряжение. Суперкалибровочные преобразования имеют вид

$$\tilde{\mathsf{V}}\left(x,\theta,\bar\theta\right) = \mathsf{V}\left(x,\theta,\bar\theta\right) + \frac{i}{2}\left(\Lambda\left(x,\theta,\bar\theta\right) - \Lambda^{+}\left(x,\theta,\bar\theta\right)\right), \tag{73}$$

где $\Lambda\left(x,\theta,\bar\theta\right)$ — киральное суперполе, удовлетворяющее соотношениям $\mathrm{D}_{\alpha}\Lambda\left(x,\theta,\bar\theta\right) = 0$ и $\bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha}\Lambda^{+}\left(x,\theta,\bar\theta\right) = 0$, так что в действительности является функцией лишь двух суперкоординат $\Lambda\left(x,\theta,\bar\theta\right) = \Upsilon\left(x_L,\theta\right)$, $\Lambda^{+}\left(x,\theta,\bar\theta\right) = \Upsilon^{+}\left(x_R,\bar\theta\right)$, где $x^{\mu}_{L,R} = x^{\mu} \pm i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}$. В калибровке Весса-Зумино половина полей можно "откалибровать" (занулить), используя суперкалибровочные преобразования (73), тогда для $\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar\theta\right)$ можно получить

$$\begin{aligned}\mathsf{V}_{WZ}\left(x,\theta,\bar\theta\right) &= -\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}A_{\mu}(x) - i\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\theta^{\alpha}\psi_{\alpha}(x)\\ &+ i\theta^{\alpha}\theta_{\alpha}\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\psi^{\dot\alpha}(x) + \frac{1}{2}\theta^{\alpha}\theta_{\alpha}\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}D(x),\end{aligned} \tag{74}$$

где $\psi_{\alpha}(x)$ — майораново фермионное поле (суперпартнер фотона — фотино), $D(x)$ — нефизическое вспомогательное поле, необходимое лишь для удовлетворения всего выражения преобразованиям суперсимметрии и удовлетворяющее уравнениям движения $D(x) = 0$.

Если $\Psi\left(x,\theta,\bar\theta\right)$ суперполе материи, то его суперкалибровочные (фазовые) преобразования есть

$$\tilde\Psi\left(x,\theta,\bar\theta\right) = \exp\left[-\frac{ie}{\hbar c}\left(\Lambda\left(x,\theta,\bar\theta\right) + \Lambda^{+}\left(x,\theta,\bar\theta\right)\right)\right]\Psi\left(x,\theta,\bar\theta\right). \tag{75}$$

Вместе (73) и (75) представляют полный набор суперкалибровочных преобразований абелевой $N = 1$ суперсимметричной калибровочной теории.

Для каждой суперпроизводной D_M введем соответствующий калибровочный суперпотенциал $\mathsf{A}_M\left(x,\theta,\bar\theta\right)$, тогда ковариантные относительно суперкалибровочных преобразований (73) и (75) суперпроизводные будут иметь вид

$$\nabla_M = \mathrm{D}_M + \frac{ie}{\hbar c}\mathsf{A}_M\left(x,\theta,\bar\theta\right). \tag{76}$$

При этом требование, чтобы ковариантная суперпроизводная от материального суперполя преобразовывалась, как само суперполе (75) приводит к преобразованиям суперпотенциала

$$\tilde{\mathsf{A}}_\mu\left(x,\theta,\bar\theta\right)=\mathsf{A}_\mu\left(x,\theta,\bar\theta\right)+\frac{1}{2}\mathrm{D}_\mu\left(\Lambda\left(x,\theta,\bar\theta\right)+\Lambda^+\left(x,\theta,\bar\theta\right)\right), \tag{77}$$

$$\tilde{\mathsf{A}}_\alpha\left(x,\theta,\bar\theta\right)=\mathsf{A}_\alpha\left(x,\theta,\bar\theta\right)+\frac{1}{2}\mathrm{D}_\alpha\Lambda^+\left(x,\theta,\bar\theta\right), \tag{78}$$

$$\tilde{\bar{\mathsf{A}}}_{\dot\alpha}\left(x,\theta,\bar\theta\right)=\bar{\mathsf{A}}_{\dot\alpha}\left(x,\theta,\bar\theta\right)+\frac{1}{2}\bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha}\Lambda\left(x,\theta,\bar\theta\right). \tag{79}$$

Эти преобразования автоматически выполняются, если выбрать

$$\mathsf{A}_\mu\left(x,\theta,\bar\theta\right)=\left(i\mathrm{D}_\mu-\frac{1}{2}\mathrm{D}_\alpha\sigma_\mu^{\alpha\dot\alpha}\bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha}\right)\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar\theta\right), \tag{80}$$

$$\mathsf{A}_\alpha\left(x,\theta,\bar\theta\right)=i\mathrm{D}_\alpha\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar\theta\right),$$
$$\bar{\mathsf{A}}_{\dot\alpha}\left(x,\theta,\bar\theta\right)=i\bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha}\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar\theta\right), \tag{81}$$

где $\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar\theta\right)$ — препотенциал абелевой $N=1$ суперсимметричной калибровочной теории. Из (80)–(81) следует, что имеется соотношение между векторной и спинорными производными

$$\nabla_\mu=\frac{i}{4}\sigma_\mu^{\alpha\dot\alpha}\left\{\nabla_\alpha,\bar\nabla_{\dot\alpha}\right\}, \tag{82}$$

а также связь между суперпроизводными и ковариантными суперпроизводными

$$\nabla_\alpha=e^{\,\frac{e}{\hbar c}\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar\theta\right)}\mathrm{D}_\alpha e^{-\frac{e}{\hbar c}\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar\theta\right)}, \tag{83}$$

$$\bar\nabla_{\dot\alpha}=e^{-\frac{e}{\hbar c}\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar\theta\right)}\bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha}e^{\,\frac{e}{\hbar c}\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar\theta\right)}. \tag{84}$$

Теперь, чтобы стандартным образом получить супернапряженность (кривизну) $\mathsf{F}_{MN}\left(x,\theta,\bar\theta\right)$ и кручение$\mathsf{T}_{MN}{}^{K}$, необходимо вычислить перестановочные соотношения

$$\left\{\nabla_M,\nabla_N\right]=i\mathsf{T}_{MN}{}^{K}\nabla_K+i\mathsf{F}_{MN}\left(x,\theta,\bar\theta\right), \tag{85}$$

где $\{\ \ ]$ означает смешанный коммутатор (равный антикоммутатору для двух нечетных величин и коммутатору в остальных случаях). Из (82) следует, что кручение имеет лишь такие ненулевые компоненты

$$\mathsf{T}_{\alpha\dot\alpha}{}^{\mu}=2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}. \tag{86}$$

Для супернапряженности из (82) получаем, что все компоненты с обеими фермионными индексами зануляются

$$\mathsf{F}_{\alpha\beta}\left(x,\theta,\bar\theta\right)=\mathsf{F}_{\alpha\dot\beta}\left(x,\theta,\bar\theta\right)=\mathsf{F}_{\dot\alpha\dot\beta}\left(x,\theta,\bar\theta\right)=0. \tag{87}$$

Такого типа связи называются “сохраняющими представление”, поскольку они позволяют ввести киральные и антикиральные суперполя, которые “выживают” при ненулевой калибровочной константе взаимодействия. Такие смешанные спин-векторные (нечетные) суперполя наинизшей размерности есть

$$\mathsf{F}_{\alpha\mu}\left(x,\theta,\bar\theta\right)=-i\left[\nabla_\alpha,\nabla_\mu\right]=\mathrm{D}_\alpha\mathsf{A}_\mu\left(x,\theta,\bar\theta\right)-\mathrm{D}_\mu\mathsf{A}_\alpha\left(x,\theta,\bar\theta\right), \tag{88}$$

$$\bar{\mathsf{F}}_{\dot\alpha\mu}\left(x,\theta,\bar\theta\right)=-i\left[\bar\nabla_{\dot\alpha},\nabla_\mu\right]=\bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha}\mathsf{A}_\mu\left(x,\theta,\bar\theta\right)-\mathrm{D}_\mu\bar{\mathsf{A}}_{\dot\alpha}\left(x,\theta,\bar\theta\right), \tag{89}$$

которые и являются супераналогом напряженностей $F_{\mu\nu}$. Используя разрешение связей типа (80)–(81), можно получить явный вид

$$\mathsf{F}_{\alpha\mu}\left(x,\theta,\bar\theta\right)=-\frac{1}{2}\mathrm{D}_\alpha\mathrm{D}_\beta\sigma_\mu^{\beta\dot\beta}\bar{\mathrm{D}}_{\dot\beta}\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar\theta\right), \tag{90}$$

$$\bar{\mathsf{F}}_{\dot\alpha\mu}\left(x,\theta,\bar\theta\right)=-\frac{1}{2}\bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha}\bar{\mathrm{D}}_{\dot\beta}\sigma_\mu^{\dot\beta\beta}\mathrm{D}_\beta\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar\theta\right). \tag{91}$$

Из этого вида следует, что смешанные спин-векторные супернапряженности могут быть выражены через одно киральное спинорное суперполе

$$\mathsf{F}_{\alpha\mu}\left(x,\bar\theta\right)=-i\varepsilon_{\alpha\beta}\sigma_\mu^{\beta\dot\beta}\bar{\mathsf{W}}_{\dot\beta}\left(x,\bar\theta\right), \tag{92}$$

$$\bar{\mathsf{F}}_{\dot\alpha\mu}\left(x,\theta\right)=-i\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\sigma_\mu^{\dot\beta\beta}\mathsf{W}_{\beta}\left(x,\theta\right), \tag{93}$$

где

$$\mathsf{W}_{\beta}\left(x,\theta\right)=\frac{1}{2}\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}}\bar{\mathrm{D}}^{\dot{\beta}}\mathrm{D}_{\beta}\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right),\quad \bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}}\mathsf{W}_{\beta}\left(x,\theta\right)=0, \tag{94}$$

$$\bar{\mathsf{W}}_{\dot{\beta}}\left(x,\bar{\theta}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{D}^{\alpha}\mathrm{D}_{\beta}\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\beta}}\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right),\quad \mathrm{D}_{\alpha}\bar{\mathsf{W}}_{\dot{\beta}}\left(x,\bar{\theta}\right)=0. \tag{95}$$

Эти суперполя удовлетворяют дополнительному соотношению $\mathrm{D}^{\alpha}\mathsf{W}_{\alpha}\left(x,\theta\right)=\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}}\bar{\mathsf{W}}^{\dot{\alpha}}\left(x,\bar{\theta}\right)$. Используя разложение препотенциала $\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$ по компонентам, в калибровке Весса-Зумино (74) получаем

$$\mathsf{W}_{\alpha}\left(x,\theta\right)=-i\psi_{\alpha}\left(x\right)+\left(\varepsilon_{\alpha\gamma}D\left(x\right)-\frac{i}{2}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\sigma}^{\nu}_{\dot{\beta}\gamma}F_{\mu\nu}\left(x\right)\right)\theta^{\gamma}-\theta^{\beta}\theta_{\beta}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\left(x\right), \tag{96}$$

$$\bar{\mathsf{W}}_{\dot{\alpha}}\left(x,\bar{\theta}\right)=i\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\left(x\right)+\left(\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}D\left(x\right)+\frac{i}{2}\bar{\sigma}^{\mu}_{\dot{\alpha}\alpha}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^{\nu}_{\beta\dot{\gamma}}F_{\mu\nu}\left(x\right)\right)\bar{\theta}^{\dot{\gamma}}+\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\bar{\sigma}^{\mu}_{\dot{\alpha}\alpha}\partial_{\mu}\psi^{\alpha}\left(x\right). \tag{97}$$

Из (92)–(93) следует, что роль калибровочных инвариантов X и Y (35) играют суперполя

$$\mathsf{X}\left(x,\theta\right)=\frac{1}{4}\bar{\mathsf{F}}_{\dot{\alpha}\mu}\left(x,\theta\right)\bar{\mathsf{F}}^{\dot{\alpha}\mu}\left(x,\theta\right)=\mathsf{W}^{\alpha}\left(x,\theta\right)\mathsf{W}_{\alpha}\left(x,\theta\right), \tag{98}$$

$$\mathsf{Y}\left(x,\bar{\theta}\right)=\frac{1}{4}\mathsf{F}^{\alpha\mu}\left(x,\bar{\theta}\right)\mathsf{F}_{\alpha\mu}\left(x,\bar{\theta}\right)=\bar{\mathsf{W}}_{\dot{\alpha}}\left(x,\bar{\theta}\right)\bar{\mathsf{W}}^{\dot{\alpha}}\left(x,\bar{\theta}\right). \tag{99}$$

Разлагая по компонентам (96)–(97) можно заметить связь

$$\mathsf{X}\left(x,\theta\right)=\ldots+\theta^{\alpha}\theta_{\alpha}\left(X-iY\right), \tag{100}$$

$$\mathsf{Y}\left(x,\bar{\theta}\right)=\ldots+\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(X+iY\right), \tag{101}$$

что после интегрирования по грассмановым координатам дает правильный вклад в лагранжан теории.

СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Теперь рассмотрим $N=1$ суперсимметричную теорию в некоторой “суперсреде” и будем искать супераналог материальных уравнений (13). По аналогии введем супернапряженности в “суперсреде” $\mathsf{G}^{\alpha\mu}\left(x,\bar{\theta}\right)$ и $\bar{\mathsf{G}}_{\dot{\alpha}\mu}\left(x,\theta\right)$, но не будем их выражать через препотенциал как в (90)–(91) (так же, как и $G_{\mu\nu}$ не имеет представления через потенциал). Но мы предположим, что $\mathsf{G}^{\alpha\mu}\left(x,\bar{\theta}\right)$ и $\bar{\mathsf{G}}_{\dot{\alpha}\mu}\left(x,\theta\right)$ имеют представление через киральное спинорное суперполе, аналогичное (92)–(93)

$$\mathsf{G}_{\alpha\mu}\left(x,\bar{\theta}\right)=-i\varepsilon_{\alpha\beta}\sigma^{\beta\dot{\beta}}_{\mu}\bar{\mathsf{W}}^{G}_{\dot{\beta}}\left(x,\bar{\theta}\right), \tag{102}$$

$$\bar{\mathsf{G}}_{\dot{\alpha}\mu}\left(x,\theta\right)=-i\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\sigma}^{\dot{\beta}\beta}_{\mu}\mathsf{W}^{G}_{\beta}\left(x,\theta\right), \tag{103}$$

где киральные суперполя в “суперсреде” $\mathsf{W}^{G}_{\beta}\left(x,\theta\right)$ и $\bar{\mathsf{W}}^{G}_{\dot{\beta}}\left(x,\bar{\theta}\right)$ не выражаются через препотенциал, но имеют разложение по компонентам аналогичное (96)–(97)

$$\mathsf{W}^{G}_{\alpha}\left(x,\theta\right)=-i\psi^{G}_{\alpha}\left(x\right)+\left(\varepsilon_{\alpha\gamma}D^{G}\left(x\right)-\frac{i}{2}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\sigma}^{\nu}_{\dot{\beta}\gamma}G_{\mu\nu}\left(x\right)\right)\theta^{\gamma}-\theta^{\beta}\theta_{\beta}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\bar{\psi}^{G\dot{\alpha}}\left(x\right), \tag{104}$$

$$\bar{\mathsf{W}}^{G}_{\dot{\alpha}}\left(x,\bar{\theta}\right)=i\bar{\psi}^{G}_{\dot{\alpha}}\left(x\right)+\left(\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}D^{G}\left(x\right)+\frac{i}{2}\bar{\sigma}^{\mu}_{\dot{\alpha}\alpha}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^{\nu}_{\beta\dot{\gamma}}G_{\mu\nu}\left(x\right)\right)\bar{\theta}^{\dot{\gamma}}+\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\bar{\sigma}^{\mu}_{\dot{\alpha}\alpha}\partial_{\mu}\psi^{G\alpha}\left(x\right), \tag{105}$$

где $G_{\mu\nu}\left(x\right)$ дается выражением (10). Очевидно, что гораздо проще работать с величиной, имеющей один спинорный индекс $\mathsf{W}^{G}_{\alpha}\left(x,\theta\right)$, чем с величиной, имеющей спин-векторный индекс $\mathsf{G}_{\alpha\mu}\left(x,\bar{\theta}\right)$, тем более, что они отличаются лишь на постоянную матрицу (см. (92)–(93) и (102)–(103)). Поэтому мы сформулируем супераналог материальных уравнений (40) в терминах киральных спинорных суперполей следующим образом

$$\mathsf{W}^{G}_{\alpha}\left(x,\theta\right)=\mathsf{S}_{\alpha}\left(x,\theta\right)+\mathsf{R}^{\beta}_{\alpha}\left(x,\theta\right)\mathsf{W}_{\beta}\left(x,\theta\right)+\mathsf{Q}^{\beta\gamma}_{\alpha}\left(x,\theta\right)\mathrm{D}_{\beta}\mathsf{W}_{\gamma}\left(x,\theta\right)+\ldots\mathrm{DDW}\ldots, \tag{106}$$

$$\bar{\mathsf{W}}^{G}_{\dot{\alpha}}\left(x,\bar{\theta}\right)=\bar{\mathsf{S}}_{\dot{\alpha}}\left(x,\bar{\theta}\right)+\bar{\mathsf{R}}^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}\left(x,\bar{\theta}\right)\bar{\mathsf{W}}_{\dot{\beta}}\left(x,\bar{\theta}\right)+\bar{\mathsf{Q}}^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}_{\alpha}\left(x,\bar{\theta}\right)\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\beta}}\bar{\mathsf{W}}_{\dot{\gamma}}\left(x,\bar{\theta}\right)+\ldots\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\mathrm{W}\ldots,. \tag{107}$$

Калибровочная суперинвариантность теории требует, чтобы суперполя $\mathsf{S}_{\alpha}\left(x,\theta\right)$, $\mathsf{R}^{\beta}_{\alpha}\left(x,\theta\right)$, $\mathsf{Q}^{\beta\gamma}_{\alpha}\left(x,\theta\right)$ зависили только от калибровочного суперинварианта $\mathsf{X}\left(x,\theta\right)$ (формула (98)), а суперполя $\bar{\mathsf{S}}_{\dot{\alpha}}\left(x,\bar{\theta}\right)$, $\bar{\mathsf{R}}^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}\left(x,\bar{\theta}\right)$, $\bar{\mathsf{Q}}^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}_{\alpha}\left(x,\bar{\theta}\right)$ зависели только от $\mathsf{Y}\left(x,\bar{\theta}\right)$ (формула (99)). То есть

$$\mathsf{S}_{\alpha}\ =\ \mathsf{S}_{\alpha}\left(\mathsf{X}\left(x,\theta\right)\right),\quad \mathsf{R}^{\beta}_{\alpha}=\mathsf{R}^{\beta}_{\alpha}\left(\mathsf{X}\left(x,\theta\right)\right),\ \mathsf{Q}^{\beta\gamma}_{\alpha}=\mathsf{Q}^{\beta\gamma}_{\alpha}\left(\mathsf{X}\left(x,\theta\right)\right), \tag{108}$$

$$\bar{\mathsf{S}}_{\dot{\alpha}}\ =\ \bar{\mathsf{S}}_{\dot{\alpha}}\left(\mathsf{Y}\left(x,\bar{\theta}\right)\right),\quad \bar{\mathsf{R}}^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}=\bar{\mathsf{R}}^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}\left(\mathsf{Y}\left(x,\bar{\theta}\right)\right),\ \bar{\mathsf{Q}}^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}_{\alpha}=\bar{\mathsf{Q}}^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}_{\alpha}\left(\mathsf{Y}\left(x,\bar{\theta}\right)\right). \tag{109}$$

Используя (96)–(97) и (104)–(105) можно получить материальные уравнения (106)–(107) в компонентах.

ВЫВОДЫ

Таким образом, здесь предлагается максимально обобщенный подход к нелинейной классической электродинамике и суперсимметричной электродинамике, который учитывает все возможные виды сред, нелокальные эффекты и описывает как лагранжевы, так и нелагранжевы теории. Вводятся материальные уравнения и конститутивные тензоры самого общего вида, предложено их суперсимметричное обобщение. Рассматривается электромагнитная дуальность в терминах введенных тензоров и показывается связь с предыдущими подходами, намечены направления дальнейшего развития теории.

Один из авторов (С.А. Дуплий) благодарен Ю.А. Кирочкину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Landau L. D., Lifshitz E. M. Classical theory of fields. - Oxford: Pergamon Press, 1988.
2. Jackson J. D. Classical Electrodynamics. - New York: Wiley, 1999.
3. Fushchich W. I., Shtelen V. M., Serov N. I. Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics. - Dordrecht: Kluwer, 1993.
4. Fushchich W. I., Tsifra I. On symmetries of nonlinear equations of electrodynamics // Theor. Math. Phys. - 1985. - V. 64. - № 1. - P. 41–50.
5. Le Bellac M., Lévy-Leblond J.-M. Galilean electromagnetism // Nuovo Cimento. - 1973. - V. B14. - P. 217–233.
6. Brown H. R., Holland P. R. The Galilean covariance of quantum mechanics in the case of external fields // American J. Phys. - 1999. - V. 67. - P. 204–214.
7. Goldin G. A., Shtelen V. M. On Galilean invariance and nonlinearity in electrodynamics and quantum mechanics // Phys. Lett. - 2001. - V. A279. - P. 321–326.
8. Goldin G. A., Shtelen V. M. Generalization of Yang-Mills theory with nonlinear constitutive equations // J. Phys. A: Math. Gen. - 2004. - V. 37. - P. 10711–10718.
9. Marangos J. Slow light in cool atoms // Nature. - 1999. - V. 397. - P. 559–560.
10. Schrödinger E. Space-Time Structure. - Cambridge: Cambridge University Press, 1985. - 135 p.
11. Born M., Infeld L. Foundations of the new field theory // Proc. Roy. Soc. London. - 1934. - V. A144. - P. 425–454.
12. Cirilo-Lombardo D. J. On the mathematical structure and hidden symmetries of the born-infeld field equations // J. Math. Phys. - 2007. - V. 48. - P. 032301.
13. Dmitriev V. A. Group theoretical approach to determine structure of complex and composite media constitutive tensors // Electronics Lett. - 1998. - V. 34. - № 8. - P. 743–745.
14. Vinogradov A. P. On the form of constitutive equations in electrodynamics // Physics-Uspekhi. - 2002. - V. 45. - № 3. - P. 331–338.
15. Gibbons G. W., Hashimoto K. Non-linear electrodynamics in curved backgrounds // JHEP. - 2000. - V. 09. - P. 013–021.
16. Wess J., Bagger J. Supersymmetry and Supergravity. - Princeton: Princeton Univ. Press, 1983. - 216 p.

NONLINEAR SUPERSYMMETRIC CLASSICAL ELECTRODYNAMICS

S.A. Duplij[1], G.A. Goldin[2], V.M. Shtelen[3]

[1]*Department of Physics and Technology, V.N. Karazin Kharkov National University, Svoboda Sq. 4, Kharkov 61077, Ukraine*

[2]*Departments of Mathematics and Physics, Rutgers University, Piscataway, NJ 08854, USA*

[3]*Department of Mathematics, Rutgers University, Piscataway, NJ 08854, USA*

In this paper we propose a general approach to nonlinear classical electrodynamics, allowing its description in the largest possible class of media (anisotropic, piroelectric, chiral, and ferromagnetic), and including both Lagrangian and non-Lagrangian (e.g., dissipative) theories. We introduce generalized constitutive equations via constitutive tensors of a very general form. We formulate electromagnetic duality in terms of these constitutive tensors. We also propose a supersymmetric generalization of the constitutive equations in a superfield approach.

KEY WORDS: constitutive equations, nonlinear electrodynamics, duality, supersymmetry, superfield.