

PACS: 41.60.-m; 61.80.Cb, 61.85.+p, 41.50.+h  
УДК 539.12.04

## РАЗНОСТЬ КЛАССИЧЕСКОЙ ЧАСТОТЫ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ЧАСТОТЫ БРЭГГА

А.В. Щагин

ИНЦ Харьковский физико-технический институт, Харьков 61108, Украина

E-mail: shchagin@kipt.kharkov.ua

Поступила в редакцию 16 июля 2008 г.

В работе получено аналитическое выражение для разности между классической частотой параметрического рентгеновского излучения (ПРИ) релятивистской заряженной частицы в кристалле и частотой Брэгга в том же направлении наблюдения в кинематическом случае. Исследуется поведение разности частот вблизи и на угловом удалении от направления распространения рефлекса ПРИ и получены формулы для этих случаев. Показано, что частота Брэгга всегда превышает частоту ПРИ. Вблизи центра рефлекса ПРИ разность частот возрастает пропорционально квадрату углового расстояния до центра рефлекса, а в области максимального выхода в рефлексе ПРИ разность частот в два раза превышает разность частот в центре рефлекса. Обсуждаются возможные методы экспериментальных исследований рентгеновского излучения с двумя близкими частотами.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** параметрическое рентгеновское излучение, частота параметрического рентгеновского излучения, кристалл, частота Брэгга, разность рентгеновских частот.

Параметрическое черенковское излучение заряженных частиц в периодической среде было предсказано в работе харьковских физиков Я.Б. Файнберга и Н.А. Хижняка [1]. Это излучение релятивистских частиц в кристалле в рентгеновском диапазоне рассматривалось в [2], затем оно было обнаружено экспериментально в 1985 г. и интенсивно исследовалось в СССР в конце 80-х годов на ускорителях в Томске, Харькове, Ереване, а позже и в других странах. Обзоры этих исследований и свойств параметрического рентгеновского излучения (ПРИ) содержатся в работах [3-9].

ПРИ испускается в кристалле релятивистскими заряженными частицами в результате их взаимодействия с кристаллографическими плоскостями. Область наибольшей интенсивности в угловом распределении ПРИ находится вблизи направления Брэгга и имеет угловой размер

$$\gamma_{eff}^{-1} \approx \left[ \gamma^{-2} + |\chi_0| \right]^{1/2}, \quad (1)$$

где  $\gamma$  есть релятивистский фактор налетающей частицы,  $\gamma_{eff}$  есть эффективный релятивистский фактор налетающей частицы в веществе [10, 11] с учетом эффекта плотности [2, 7],  $\chi_0 = \chi_0(\omega)$  - средняя диэлектрическая восприимчивость кристалла,  $\omega$  есть циклическая частота излучения. Эта область в угловом распределении называется рефлексом ПРИ. Именно излучение в рефлексе ПРИ наблюдалось в первых и в большинстве последующих экспериментов по исследованию свойств ПРИ. В экспериментах излучение обычно наблюдают в плоскости вектора обратной решетки кристалла  $\vec{g}$  одной из систем кристаллографических плоскостей кристалла и вектора скорости налетающих частиц  $\vec{V}$ . Ниже мы будем называть ее плоскостью реакции. Частота ПРИ на большом угловом расстоянии от рефлекса может значительно отличаться от частоты Брэгга [12], но частота ПРИ в рефлексе весьма близка к частоте Брэгга в направлении наблюдения. Этот факт послужил поводом для дискуссий в первые годы после экспериментального обнаружения ПРИ о том, какое именно излучение наблюдается в эксперименте – действительно ли это ПРИ или же это тривиальное тормозное излучение релятивистских электронов, подвергшееся дифракции в кристалле в направлении детектора с частотой Брэгга. Проблема была разрешена в основном в пользу ПРИ в экспериментальных условиях работ [13] (см. также [10]), где исследовались ориентационные зависимости выхода излучения, а измеренные частоты (энергии) спектрального пика излучения сравнивались с представленным на графиках численным расчетом частоты ПРИ и частоты Брэгга в окрестности рефлекса. Однако вопрос о величинах вклада подвергшихся дифракции тормозного и других видов излучения с частотой Брэгга в области рефлекса ПРИ продолжает оставаться актуальным для различных экспериментальных условий (см., например, весьма полный обзор, обсуждение и ссылки в работе [14]). При этом до сих пор, насколько нам известно, не рассматривалось явное аналитическое выражение для разности этих двух близких частот. С целью выяснения возможностей экспериментальных исследований этих двух близких рентгеновских частот, в настоящей работе мы получаем и анализируем явные выражения для разности между классическим выражением частоты ПРИ и частотой Брэгга

подвергнутого дифракции излучения и обсуждаем возможные методы экспериментальных измерений в этом направлении.

### ЧАСТОТА БРЭГГА В КРИСТАЛЛЕ

Выражение для частоты Брэгга в кристалле  $\omega_B$  легко получить из закона сохранения импульса при дифракции Брэгга

$$\hbar \vec{k}_1 = \hbar \vec{k}_2 + \hbar \vec{g}, \quad (2)$$

где  $\vec{k}_1$  есть волновой вектор падающего излучения в кристалле,  $\vec{k}_2$  есть волновой вектор излучения в

кристалле после дифракции,  $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = \frac{\omega_B \sqrt{\varepsilon_0}}{c}$ ,  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\omega_B)$  - средняя диэлектрическая проницаемость

кристалла,  $c$  есть скорость света,  $|\vec{g}| = g = \frac{2\pi}{a}$ ,  $a$  есть расстояние между соседними кристаллографическими

плоскостями. Вектор  $\vec{g}$  перпендикулярен этим кристаллографическим плоскостям и  $\hbar \vec{g}$  есть собственное значение оператора импульса бесконечного кристалла с учетом его периодичности с периодом  $a$ . Возведя выражение (2) в квадрат, получаем

$$\omega_B = -\frac{cg^2}{2\sqrt{\varepsilon_0}(\vec{\Omega}\vec{g})}, \quad (3)$$

где  $\vec{\Omega} = \vec{k}_2 / k_2$  есть единичный вектор в направлении наблюдения. Выражение (3) описывает частоту рентгеновского излучения, которое может распространяться в направлении наблюдения  $\vec{\Omega}$  после дифракции на кристаллографических плоскостях, описываемых вектором обратной решетки  $\vec{g}$ . Очевидно, что такое возможно только в случае, если в направлении вектора  $\vec{k}_1$  есть излучение с той же частотой. Такое излучение может испускаться релятивистской частицей, движущейся через кристалл - например, тормозное или переходное или иного типа излучение которые испускаются вблизи вектора скорости частицы  $\vec{V}$  (см., например, [15]).

### КЛАССИЧЕСКАЯ ЧАСТОТА ПРИ В КРИСТАЛЛЕ

Получим частоту  $\omega$  ПРИ релятивистской частицы в кристалле, следуя [2], из законов сохранения энергии и импульса для излучения частицы с начальной энергией  $E$  и импульсом  $\vec{P}$  в кристалле на системе кристаллографических плоскостей, описываемых вектором обратной решетки  $\vec{g}$

$$E = E_1 + \hbar\omega, \quad (4)$$

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \hbar\vec{g} + \hbar\vec{k}, \quad (5)$$

где  $E_1$  и  $\vec{P}_1$  - энергия и импульс частицы после излучения фотона с энергией  $\hbar\omega$  и импульсом  $\hbar\vec{k} = \frac{\hbar\omega\sqrt{\varepsilon_0}}{c}\vec{\Omega}$ . Преобразуем (4), при условии  $E \gg \hbar\omega$  и используя выражение  $E^2 = c^2P^2 + m^2c^4$ , к виду

$$P_1^2 - P^2 = -\frac{2E\hbar\omega}{c^2}. \quad (6)$$

Из выражения (5), при условии  $|\vec{P}| \gg |\hbar\vec{g} + \hbar\vec{k}|$  и используя соотношение  $\vec{P} = \frac{E}{c^2}\vec{V}$ , получим выражение

$$P_1^2 - P^2 = -2\hbar\frac{E}{c^2}\vec{V}(\vec{g} + \vec{k}). \quad (7)$$

Приравняв (6) и (7), получаем классическое выражение для частоты ПРИ

$$\omega = \frac{c(\vec{g}\vec{V})}{c - \sqrt{\varepsilon_0}(\vec{\Omega}\vec{V})}. \quad (8)$$

Оно было получено при условиях, что импульс частицы много больше импульса излученного фотона и импульса, переданного кристаллу, а ее энергия много больше энергии излученного фотона. Потому часть информации, содержащейся в квантовой системе уравнений (4) и (5), утеряна в (8). Тем не менее, выражение (8) прекрасно описывает имеющиеся в литературе экспериментальные данные (см. приведенные выше обзоры). Оно впервые получено Тер-Микаеляном (см. формулу (28.5) в [2]) и подтверждено экспериментально в [13].

### РАЗНОСТЬ ЧАСТОТЫ БРЭГГА И КЛАССИЧЕСКОЙ ЧАСТОТЫ ПРИ

Выпишем выражения для частоты Брэгга (3) и частоты ПРИ (8) для одной и той же системы кристаллографических плоскостей в полярных координатах

$$\omega_B = \frac{cg}{2\sqrt{\varepsilon_0} \sin(\theta - \phi) \left[ 1 - \frac{2 \sin \theta \cos \phi}{\sin(\theta - \phi)} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right]}, \quad (9)$$

$$\omega = \frac{cg \sin \phi}{\sqrt{\varepsilon_0} (\xi^{-1} - \cos \theta)}, \quad (10)$$

где  $\varphi$  - азимутальный угол направления наблюдения относительно плоскости реакции,  $\phi < \theta$  есть угол между кристаллографической плоскостью и вектором  $\vec{V}$ ,  $\theta \leq \pi$  есть полярный угол наблюдения относительно вектора скорости частицы  $\vec{V}$ ,  $\xi = \frac{V\sqrt{\varepsilon_0}}{c}$  есть скорость частицы в единицах фазовой скорости распространения излучения в кристалле,  $\xi^{-1} = 1 + \frac{1}{2}\gamma_{eff}^{-2}$ . Из (9, 10) найдем разность частот в абсолютном

$$\omega_B - \omega = \frac{cg}{2\sqrt{\varepsilon_0} (\xi^{-1} - \cos \theta)} \frac{\xi^{-1} - \cos(\theta - 2\phi) + 2 \sin \theta \sin 2\phi \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\left[ \sin(\theta - \phi) - 2 \sin \theta \cos \phi \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right]}, \quad (11)$$

а также нормализованном виде

$$\frac{\omega_B - \omega}{\omega} = \frac{\xi^{-1} - \cos(\theta - 2\phi) + 2 \sin \theta \sin 2\phi \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos(\theta - 2\phi) - \cos \theta - 2 \sin \theta \sin 2\phi \sin^2 \frac{\varphi}{2}}. \quad (12)$$

Выражения (11, 12) описывают разность частот при произвольной ориентации кристалла, пучка и направления наблюдения, т.е. векторов  $\vec{g}$ ,  $\vec{V}$ ,  $\vec{\Omega}$ . Условие  $\phi < \theta$  означает, что излучение, подвергающееся дифракции, падает с той же стороны кристаллографической плоскости, что и налетающая заряженная частица. Из (9-11) можно видеть, что эта разность частот всегда положительна. Таким образом, частота Брэгга всегда превышает частоту ПРИ

$$\omega_B > \omega. \quad (13)$$

Центр рефлекса ПРИ расположен в плоскости реакции под полярным углом  $\theta$ , приблизительно равным  $2\phi$  [10, 13], и практически совпадает с направлением Брэгга [11]. Получим из (12) нормализованную разность частот вблизи рефлекса ПРИ как функцию малых углов  $\delta, \alpha$  по отношению к центру рефлекса. Угол  $\delta = |\theta - 2\phi|$  находится в плоскости реакции, а угол  $\alpha = \varphi \sin \theta$  - в перпендикулярном направлении.

$$\frac{\omega_B - \omega}{\omega} \approx \frac{\gamma^{-2} + |\chi_0| + \delta^2 + \alpha^2}{4 \sin^2 \phi} = \frac{\gamma_{eff}^{-2} + \rho^2}{4 \sin^2 \frac{\theta_c}{2}}, \quad (14)$$

где  $\rho = \sqrt{\delta^2 + \alpha^2}$  - угол, отсчитываемый в произвольном направлении от направления центра рефлекса. Координаты показаны на рис. 1 в [11].

Разность частот возрастает квадратично при отклонении от центра рефлекса в произвольном направлении [16]. В центре рефлекса она имеет минимальное значение:

$$\left(\frac{\omega_B - \omega}{\omega}\right)_{\min} = \frac{\gamma_{\text{eff}}^{-2}}{4 \sin^2 \phi} = \frac{\gamma^{-2} + |\chi_0|}{4 \sin^2 \phi}. \quad (15)$$

Максимальный выход ПРИ находится на угловом расстоянии  $\rho = \gamma_{\text{eff}}^{-1}$  от центра рефлекса [10, 17]. В области максимального выхода получаем разность частот

$$\left(\frac{\omega_B - \omega}{\omega}\right)_{\max Y} = \frac{\gamma_{\text{eff}}^{-2}}{2 \sin^2 \phi}. \quad (16)$$

### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

В работе получены аналитические выражения для разности частоты Брэгга и классической частоты ПРИ. Выражения (11, 12) описывают эту разность частот на произвольном угловом расстоянии от центра рефлекса. Выражение (14) описывает разность частот в малоугловом приближении вблизи центра рефлекса ПРИ. Показано, что частота Брэгга всегда превышает частоту ПРИ (13). В центре рефлекса ПРИ разность частот минимальна и возрастает пропорционально квадрату углового отклонения от центра рефлекса в произвольном направлении (14). Разность частот в области максимального выхода в рефлексе ПРИ (16) превышает разность частот в центре рефлекса (15) в 2 раза.

В области рефлекса ПРИ нормализованная разность частот может изменяться от порядка  $10^{-2}$  при энергии электронов около 5 МэВ до порядка  $10^{-6}$  при энергиях налетающих электронов сотни МэВ и энергии излучения десятки кэВ. При этом абсолютная разность частот рентгеновского излучения изменяется от десятков и сотен эВ до сотых долей эВ. Разность частот перестает уменьшаться с ростом энергии электронов при  $\gamma^{-2} < |\chi_0|$ , что является еще одним проявлением эффекта плотности для ПРИ.

В рефлексе ПРИ в зависимости от условий эксперимента могут присутствовать и другие типы излучения релятивистских частиц, подвергшиеся дифракции в кристалле в направлении детектора с частотой Брэгга. Источниками такого излучения могут быть, например, некогерентное и когерентное тормозное излучение, переходное излучение, излучение при каналировании, ондуляторное излучение частицы в периодически изогнутом кристалле. Подвергшееся дифракции излучение имеет частоту Брэгга, которая несколько отличается от частоты ПРИ в области рефлекса. В общем случае их трудно разделить по энергии излучения при использовании полупроводниковых детекторов рентгеновского излучения вследствие их недостаточного энергетического разрешения, а применение кристалл-дифракционного спектрометра существенно усложняет эксперимент.

Оценим возможность использования ширин спектральных пиков излучений для разделения их вкладов. Рассмотрим ширины спектральных пиков ПРИ и подвергшегося дифракции излучения, которые обусловлены конечным угловым разрешением эксперимента  $\Delta\theta$  при  $\Delta\theta \ll \gamma_{\text{eff}}^{-1}$ . Оценка ширины спектрального пика ПРИ была получена путем дифференцирования выражения для частоты ПРИ (10) и подтверждена экспериментально в [13]

$$\Delta\omega \approx \frac{\omega}{\tan \frac{\theta}{2}} \Delta\theta. \quad (17)$$

Продифференцировав (9) при  $\varphi = 0$  получим оценку ширины спектрального пика подвергшегося дифракции излучения

$$\Delta\omega_B \approx \frac{\omega_B}{\tan \frac{\theta}{2}} \Delta\theta. \quad (18)$$

Из выражений (17) и (18) видно, что оба излучения имеют практически одинаковую ширину спектрального пика. Поэтому не представляется возможным использовать ширину наблюдаемого спектрального пика для прямого определения вида излучения.

Рассмотрим некоторые другие возможные методы экспериментального разделения по энергии вкладов ПРИ и излучения, подвергшегося дифракции.

При снижении энергии налетающих частиц разность частот увеличивается. Например, при энергии электронов 2,5 МэВ и энергии ПРИ 10 кэВ разность энергий спектральных пиков может быть порядка 300 эВ.

Такую разность энергий можно различить с помощью полупроводникового детектора. Например, так можно экспериментально разделить вклады от подвергнутого дифракции излучения при каналировании и ПРИ.

При более высоких энергиях налетающих заряженных частиц, когда разность частот может составлять десятки эВ, в блоке детектирования можно использовать пластину из вещества, у которого энергия края поглощения находится между двумя частотами исследуемого излучения. Ширина края поглощения может составлять единицы эВ. В таком случае излучение, подвергнутое дифракции, будет сильно поглощаться в пластине, а ПРИ будет поглощаться слабее и может проходить сквозь пластину. Таким способом можно разделить и определить вклады ПРИ и излучения, подвергнутого дифракции, при средней энергии налетающих электронов.

При высокой энергии налетающих частиц, для измерения разности рентгеновских частот порядка единиц эВ можно рассмотреть возможность применения метода гетеродинамирования. В качестве нелинейного элемента можно попробовать использовать ФЭУ, который успешно применяется как нелинейный элемент в аналогичных работах в световом диапазоне. В качестве сигнала гетеродина следует использовать лазер с частотой  $\omega_L$ , близкой к измеряемой разности частот. Все три излучения – два рентгеновских с частотами  $\omega_B$ ,  $\omega$  и световое с частотой  $\omega_L$  следует одновременно подать на фотокатод ФЭУ. Ток ФЭУ должен содержать колебания с комбинационной частотой

$$\omega_C = \omega_B - \omega - \omega_L. \quad (19)$$

При выборе частоты  $\omega_L$  достаточно близкой к разности частот  $\omega_B - \omega$ , возможно наблюдение комбинационной частоты  $\omega_C$  в радиодиапазоне. Среднее значение  $\omega_C$  и его спектральную ширину можно определить при сканировании частоты лазера  $\omega_L$ .

В качестве одного из возможных применений подвергнутого дифракции излучения при каналировании отметим экстракцию излучения при каналировании из протяженных кристаллов, а также фокусировку излучения при каналировании и ПРИ в пространственно разделенных точках, предложенные в [15].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Я.Б. Файнберг, Н.А. Хижняк Потери энергии заряженной частицей при прохождении через слоистый диэлектрик // ЖЭТФ. – 1957. - Т.32. - С.883-895.
2. М.Л. Тер-Микаелян Влияние среды на электромагнитные процессы. - Ереван: Издательство Академии наук Армянской ССР, 1969.
3. A.V. Shchagin, X.K. Maruyama Parametric X-rays. In: "Accelerator-Based Atomic Physics Techniques and Applications", eds. S.M. Shafroth and J.C. Austin. New York: AIP Press, 1997. - P.279-307.
4. P. Rullhusen, A. Artru, P. Dhez Novel Radiation Sources Using Relativistic Electrons. - Singapore: World Scientific Publishers, 1998.
5. A.V. Shchagin Current status of parametric X-ray radiation research // Radiation Physics and Chemistry. – 2001. - Vol.61. - P.283-291.
6. A.V. Shchagin Investigations and properties of PXR. In: "Electron-Photon Interaction in Dense Media" ed. by H. Wiedemann. NATO Science Series, II. Mathematics, Physics and Chemistry, Vol.49. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 2002. - P.133-151.
7. М.Л. Тер-Микаелян Радиационные электромагнитные процессы при высоких энергиях в периодических средах // УФН. – 2001. - Т.171. - С.597-624.
8. А.В. Шагин Предсказание, исследования и применения параметрического черенковского излучения. В книге: Н.А. Хижняк – физик-теоретик, радиофизик и человек. – Харьков, ИПП «Контраст». - 2006. - 458с. – С.246-265.
9. А.С. Лобко Экспериментальные исследования параметрического рентгеновского излучения. - Минск: БГУ, 2006.
10. A.V. Shchagin, N.A. Khizhnyak Differential properties of parametric X-ray radiation from a thin crystal // Nucl. Instr. and Meth. – 1996. - Vol.B119. – P.115-122.
11. A.V. Shchagin Linear polarization of parametric X-rays // Phys. Lett. - 1998. - Vol.A247. – P. 27-36.
12. A.V. Shchagin, V.I. Pristupa, N.A. Khizhnyak Parametric X-ray radiation from relativistic electrons in a crystal in the vicinity and at angular distance from a Bragg direction // Nucl. Instr. and Meth. - 1995. - Vol.B99. – P.277-280.
13. A.V. Shchagin, V.I. Pristupa, N.A. Khizhnyak A fine structure of parametric X-ray radiation from relativistic electrons in a crystal // Phys. Lett. - 1990. - Vol.A148 - P.485-488.
14. Д.А. Бакланов, А.Н. Балдин, И.Е. Внуков, Д.А. Нечасенко, Р.А. Шатохин Соотношение вкладов дифрагированного тормозного излучения и параметрического рентгеновского излучения в совершенных кристаллах. // Вестник Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина, серия физическая, "Ядра, частицы, поля". - 2007. - № 763, вып. 1(33). - С. 41-56.
15. A.V. Shchagin Diffraction, extraction and focusing of parametric X-ray radiation, channeling radiation and crystal undulator radiation from a bent crystal. In: "Advanced radiation sources and applications" ed. by H. Wiedemann, NATO Science Series, II. Mathematics, Physics and Chemistry – V.199. - Springer, 2006. – P.27-45; //Вестник Харьковского национального университета, серия физическая, "Ядра, частицы, поля". – 2006. – №.732, вып.2/30/. - С.35-46.

16. A.V. Shchagin Comparison of Bragg and PXR energies // Oral paper at V International Symposium "Radiation from Relativistic Electrons in Periodic Structures". September 10-14, 2001, Lake Aya, Altai Mountains, Russia, Final Program & Book of Abstracts. – P.49.
17. А.В. Щагин, В.В. Сотников Структура угловых распределений выхода, энергии и направлений линейной поляризации в рефлексах параметрического рентгеновского излучения. // Вопросы атомной науки и техники, серия «Плазменная электроника и новые методы ускорения». – 2008. - 4(6). - С. 316 – 321.
18. A.V. Shchagin Diffraction in forward direction of parametric X-ray radiation from relativistic particles of moderate energy // Oral paper at 2<sup>nd</sup> International Conference on Charged and Neutral Particles Channeling Phenomena, Frascati, Italy, July 2 – 7, 2006. Proceedings of SPIE 6634, 663418 (2007) 9p. Sultan B. Dabagov, Editor, 663418, May 2, 2007.

## THE DIFFERENCE BETWEEN FREQUENCY OF PARAMETRIC X-RAY RADIATION AND BRAGG FREQUENCY

**A.V. Shchagin**

*NSC Kharkov Institute of Physics and Technology,  
Akademicheskaya Str. 1, 61108 Kharkov, Ukraine*

The analytical expression for the difference between classic frequency of parametric X-ray radiation (PXR) and Bragg frequency at the same observation direction is obtained for kinematical case. The behavior of the difference is analyzed at angular distance and in the vicinity of the PXR reflection, related formulae are derived. It is shown that Bragg frequency always exceeds the PXR frequency. The difference of frequencies increases proportionally to square of the angular distance from the reflection center in the vicinity of the PXR reflection center. The difference of the frequencies in the field of the reflection where the PXR yield has maximum value exceeds one in the reflection center by factor two. Methods of experimental research of X-rays with two close frequencies are discussed.

**KEY WORDS:** parametric X-ray radiation, frequency of parametric X-ray radiation, crystal, Bragg frequency, difference of X-ray frequencies.