

УДК 531.49

ЗАМКНУТЫЕ СВЕРХПРОВОДЯЩИЕ КОСМИЧЕСКИЕ СТРУНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ ПОЛЯХ ЭЙНШТЕЙНА-МАКСВЕЛЛА

А.В. Жовтан, С.Н. Рошупкин

*Таврический Национальный Университет им. В.И. Вернадского,
95007, Симферополь, проспект Вернадского 4, Физический факультет
E-mail: alex_ph@fastmail.fm*

Поступила в редакцию 10 октября 2008 г.

Рассмотрена динамика замкнутой сверхпроводящей космической струны в аксиально-симметричных гравитационных полях обусловленных либо осевым током, либо азимутальным током, либо аксиальным распределением электрического заряда. Показано, что во всех трех случаях динамика замкнутой сверхпроводящей струны описывается эффективным частицеподобным гамильтонианом. Проведено исследование возникающих эффективных потенциалов и найдены численные решения классических уравнений движения замкнутой сверхпроводящей струны. Показано, что динамика струны носит нетривиальный характер и существенно зависит как от параметров фоновой метрики, так и параметров самой сверхпроводящей струны.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: сверхпроводящая струна, поля Эйнштейна-Максвелла, эффективные потенциалы, численные решения.

Возможность того, что в процессе эволюции Вселенной произошел один, а возможно и более фазовых переходов, является интригующей гипотезой привлекающей пристальное внимание специалистов в различных областях физики и астрофизики [1]. Прямым следствием фазовых переходов является возможность образования во Вселенной устойчивых, топологически нетривиальных дефектов [1]. Особое внимание привлекают вихреподобные решения (космические струны), которые могут образовываться в виде замкнутых или открытых структур и которые могут играть фундаментальную роль в формировании ранней структуры Вселенной [2]. Интерес к космическим струнам еще больше возрос после работы Виттена [3], в которой была продемонстрирована возможность образования сверхпроводящих космических струн в результате бозонной конденсации в коре струны [4,5]. При этом струна ведет себя подобно тонкому сверхпроводящему проводнику и ток в ее оболочке в первом приближении описывается уравнением Лондона, характерным для сверхпроводников [4,5]. Уже первые исследования по динамике сверхпроводящих струн в гравитационных полях привели к неожиданному результату. Так, например, в работе [6] было показано, что уравнения описывающие движение сверхпроводящей струны в гравитационном поле черной дыры Шварцшильда не интегрируемы и в системе имеет место динамический хаос [7]. Дальнейшие исследования [8] показали, что при движении сверхпроводящих струн в космической плазме возникает ряд интересных астрофизических эффектов, которые, возможно позволят обнаружить космические струны во Вселенной [9,10].

Целью настоящей работы является исследование движения замкнутой сверхпроводящей космической струны в аксиально-симметричных гравитационных полях обусловленных либо осевым током, либо азимутальным током, либо аксиальным распределением электрического заряда.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МОДЕЛЬ

Действие сверхпроводящей струны хорошо известно и имеет вид [11]

$$S = \int L(\omega) \sqrt{-\det G_{\alpha\beta}} d\tau d\sigma, \quad (1)$$

где

$$G_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}(x) x_{,\alpha}^{\mu} x_{,\beta}^{\nu}, \quad (\alpha, \beta = 0, 1) \quad (2)$$

– индуцированная метрика на мировом листе струны, $g_{\mu\nu}(x)$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) – метрика фонового гравитационного поля, $x^{\mu}(\tau, \sigma)$ – мировые координаты струны, являющиеся функциями локальных листовых координат τ и σ , $x_{,\alpha}^{\mu} \equiv \partial x^{\mu} / \partial \xi^{\alpha}$ ($\xi^{\alpha} = (\xi^0, \xi^1) \equiv (\tau, \sigma)$), а $L(\omega)$ – плотность функции Лагранжа, зависящая от ковариантной производной скалярного поля Φ «живущего» на мировом листе струны:

$$\omega = G^{\alpha\beta} (\Phi_{,\alpha} + A_{\mu} x_{,\alpha}^{\mu}) (\Phi_{,\beta} + A_{\mu} x_{,\beta}^{\mu}). \quad (3)$$

В формуле (3) A_{μ} – потенциал внешнего электромагнитного поля. В настоящей работе мы для простоты предполагаем отсутствие внешнего электромагнитного поля и рассматриваем динамику струны только в гравитационном поле. То есть все влияние присутствующих в пространстве распределенных зарядов и токов на

динамику струны включено в соответствующие метрики. Конечно, в дальнейшем было бы любопытно включить в рассмотрение и внешнее электромагнитное поле.

Рассмотрим модель, в которой плотность функции Лагранжа имеет вид:

$$L(\omega) = 1 + \frac{\omega}{2}, \quad A_\mu = 0, \quad (4)$$

а для мировых координат струны и скалярного поля Φ выберем следующий анзац [11]:

$$x^a = x^a(\tau), \quad (a = 0, 1, 2), \quad x^3 = \phi = \sigma, \quad \Phi = f(\tau) + n\sigma, \quad (5)$$

где $f(\tau)$ – произвольная функция τ , а $n = const$. Анзац (5) описывает замкнутую токонесящую струну, движущуюся вдоль оси Z и осциллирующую в перпендикулярной плоскости XOY . В плоскости XOY введены полярные координаты ρ и ϕ , причем координата ϕ отождествляется с листовой координатой σ .

Подставляя (2)-(5) в (1) получаем эффективное действие, описывающее замкнутую сверхпроводящую струну

$$S_{eff} = \int L(\omega) \sqrt{-(g_{ab} g_{\phi\phi} - g_{a\phi} g_{b\phi})} \dot{x}^a \dot{x}^b d\tau, \quad (6)$$

где точка обозначает дифференцирование по τ . Поскольку мы будем рассматривать метрики с диагональной структурой, в дальнейшем для сокращения записи уравнений недиагональные компоненты $g_{a\phi}$ опускаются.

Вариация действия (6) по $f(\tau)$ и $x^a(\tau)$ приводит к уравнениям

$$\omega(\tau) = \frac{n^2 - \Omega^2}{g_{\phi\phi}}, \quad (7)$$

$$\left[\frac{g_{ab} g_{\phi\phi}}{\sqrt{-g_{ab} g_{\phi\phi} \dot{x}^a \dot{x}^b}} \left(1 + \frac{N^2}{2g_{\phi\phi}}\right) \dot{x}^b \right] + \frac{\sqrt{-g_{ab} g_{\phi\phi} \dot{x}^a \dot{x}^b}}{2g_{\phi\phi}} \left(1 - \frac{N^2}{2g_{\phi\phi}}\right) g_{\phi\phi, a} - \frac{g_{bc, a} \dot{x}^b \dot{x}^c g_{\phi\phi}}{2\sqrt{-g_{ab} g_{\phi\phi} \dot{x}^a \dot{x}^b}} \times \left(1 + \frac{N^2}{2g_{\phi\phi}}\right) = 0, \quad (8)$$

где Ω – постоянная интегрирования, а $N^2 = n^2 + \Omega^2$.

Вводя метрику

$$h_{ab} \equiv g_{ab} g_{\phi\phi} \left(1 + \frac{N^2}{2g_{\phi\phi}}\right)^2 \quad (9)$$

и переходя к новому аффинному параметру $\tilde{\tau}$

$$d\tilde{\tau} = \sqrt{-g_{ab} g_{\phi\phi} \dot{x}^a \dot{x}^b} \left(1 + \frac{N^2}{2g_{\phi\phi}}\right) d\tau, \quad (10)$$

уравнения (8) можно записать в компактном виде

$$\frac{d^2 x^a}{d\tilde{\tau}^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\tilde{\tau}} \frac{dx^c}{d\tilde{\tau}} = 0, \quad (11)$$

где Γ_{bc}^a – символы Кристоффеля для метрики h_{ab} . Легко показать, что уравнения (11) могут быть получены из гамильтониана

$$H = \frac{1}{2} h^{ab} p_a p_b + \frac{1}{2} = 0. \quad (12)$$

Таким образом, динамика замкнутой сверхпроводящей струны сводится к уравнениям движения, описывающим фиктивную точечную частицу в «нефизическом» трехмерном пространстве, определяемом метрическим тензором h_{ab} . Однако, более предпочтительно описывать динамику замкнутой сверхпроводящей струны в физическом пространстве-времени, описываемом метрическим тензором $g_{\mu\nu}$. С этой целью удобно

перейти к новому гамильтониану \hat{H} , который связан с гамильтонианом (12) следующим соотношением:

$$\hat{H} \equiv g_{\phi\phi} \left(1 + \frac{N^2}{2g_{\phi\phi}}\right)^2 H \quad (13)$$

и новому аффинному параметру $\hat{\tau}$

$$d\hat{\tau} \equiv \left(1 + \frac{N^2}{2g_{\phi\phi}}\right)^{-2} \frac{d\tilde{\tau}}{g_{\phi\phi}}. \quad (14)$$

В результате находим

$$\hat{H} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + \frac{1}{2} g_{\phi\phi} \left(1 + \frac{N^2}{2g_{\phi\phi}}\right)^2 - \frac{\Omega^2 n^2}{2g_{\phi\phi}}, \quad (15)$$

$$p_\phi = -n\Omega. \quad (16)$$

Следует отметить, что в следствие репараметризационной инвариантности действия (1), гамильтониан (15) тождественно равен нулю. Поскольку он является частицеподобным, то определяет единственную связь между каноническими переменными. Другая связь в рамках выбранного анзаца (5) тривиально удовлетворяется.

Беря за основу гамильтониан (15), мы рассмотрим динамику сверхпроводящих струн в цилиндрически-симметричных полях Эйнштейна-Максвелла.

ЭФФЕКТИВНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Известны три точных решения описывающих статические, цилиндрически-симметричные поля Эйнштейна-Максвелла [12]:

- 1) с азимутальным магнитным полем, обусловленным осевым током;
- 2) с продольным магнитным полем, обусловленным азимутальными токами;
- 3) с радиальным электрическим полем, обусловленным аксиальным распределением заряда.

Соответствующие метрики имеют вид:

$$ds^2 = \rho^{2m^2} G^2 (d\rho^2 - dt^2) + \rho^2 G^2 d\phi^2 + G^{-2} dz^2, \quad (17)$$

$$ds^2 = \rho^{2m^2} G^2 (d\rho^2 - dt^2) + G^{-2} d\phi^2 + \rho^2 G^2 dz^2, \quad (18)$$

$$ds^2 = \rho^{2m^2} G^2 (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 G^2 d\phi^2 - G^{-2} dt^2, \quad (19)$$

где

$$G = C_1 \rho^m + C_2 \rho^{-m}, \quad (20)$$

а C_1, C_2, m – вещественные константы. Безразмерная константа m связана с электромагнитными полями, а именно: для случаев 1) и 2) она определяет функциональную зависимость магнитостатического потенциала от радиальной координаты ρ , а для случая 3) – электростатического потенциала. В общем случае эти зависимости определяются функцией вида $f(\rho^{m^2}, \rho^m)$. Явный вид самой функции в данном случае не важен, так как все влияние, которое оказывает цилиндрически-симметричное электромагнитное поле на движение замкнутой сверхпроводящей космической струны, определяется видом соответствующей квадратичной формы.

Из гамильтониана (15) видно, что динамика сверхпроводящей струны определяется некоторым «эффективным» потенциалом который зависит как от фоновой метрики, так и от характеристик струны (параметр N). Поэтому, прежде чем выписывать уравнения движения, следующие из гамильтониана (15) для конкретных метрик (17)-(19), исследуем подробнее эффективные потенциалы для всех трех случаев фоновых пространств. Именно от наличия и характера потенциальных ям зависит физика поведения сверхпроводящей космической струны в соответствующем гравитационном поле. Исследование потенциалов удобнее проводить, рассматривая их как функции двух переменных $-m$ и ρ , то есть $U_{\text{eff}} = U_{\text{eff}}(m, \rho)$. Тогда в данном координатном базисе эффективные потенциалы будут представлять собой некоторые двумерные поверхности. Ввиду нетривиальной зависимости, выразить аналитически все стационарные точки в общем случае не представляется возможным. Однако одну из стационарных точек, а именно стационарную точку типа «седла», удастся найти аналитически для всех трех случаев.

В дальнейшем мы в функции G выбираем константы C_1 и C_2 , равными друг другу: $C_1 = C_2 = c$. Этот выбор не ограничивает общности.

Азимутальное магнитное поле

Используя уравнения (15), (16) и (17), получаем выражение для эффективного потенциала

$$U^2(\rho) = \rho^{2m^2} G^4 p^2 + \rho^{2m^2+2} G^4 + \frac{N^4}{4} \rho^{2m^2-2} + N^2 \rho^{2m^2} G^2, \quad (21)$$

где p - обобщенный импульс, сопряженный с циклической координатой z . На рис. 1 представлен общий вид

потенциала (21).

Как говорилось выше, будем рассматривать потенциал (21) как функцию переменных m и ρ . Тогда из условий экстремальности потенциала

$$\begin{cases} \frac{\partial U_{\text{eff}}(m, \rho)}{\partial m} = 0, \\ \frac{\partial U_{\text{eff}}(m, \rho)}{\partial \rho} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

находим одну стационарную точку, которую можно выразить аналитически. Она определяется условиями:

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ m_s = \sqrt{\frac{N^4 - 64c^4}{64c^4\rho^2 + (8c^2 + N^2)^2}} \end{cases} \quad (23)$$

Эта точка определяет седловину (перевал на двумерной поверхности $U_{\text{eff}}(m, \rho)$). Из выражения (23) видно, что седловина возможна только при условии $N > 2\sqrt{2}c$.

Из выражения (21) находим граничное значение параметра m : $m_c = 2$, разделяющее две области с разным поведением эффективного потенциала:

$$\begin{cases} U_{\text{min}} \neq 0 \text{ при } \rho \neq 0, m < m_c; \\ U_{\text{min}} \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow 0, m > m_c. \end{cases} \quad (24)$$

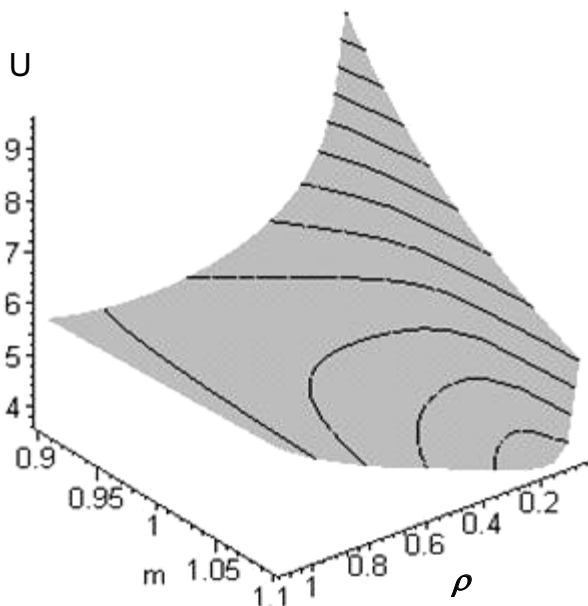


Рис.1. Эффективный потенциал для случая азимутального магнитного поля в окрестности стационарной точки типа "седло" при следующем выборе параметров: $N=3$; $p=1$.

Из (24) видно, что устойчивый колебательный режим сверхпроводящей струны возможен только в области $m < m_c$. В области $m > m_c$ независимо от начальных данных струна всегда сжимается в точку – коллапсирует на ось z .

Таким образом, имеем следующую качественную картину поведения замкнутой сверхпроводящей космической струны в азимутальном магнитном поле. Если $N < 2\sqrt{2}c$, то, как упоминалось выше, стационарной точки типа «седла» нет. Тогда струна, двигаясь вдоль оси z , будет совершать колебания около положения равновесия, характеристика которых зависит от начальных данных $\rho(0)$, $\dot{\rho}(0)$ и параметров N , m . Если мы рассматриваем малые колебания около положения равновесия, то частота колебаний будет определяться только параметрами N и m . Тогда оказывается, что частота малых колебаний струны монотонно растет с увеличением параметра m , входящего в фоновую метрику. Кроме того, зависимость частоты осцилляций от параметра m достаточно хорошо аппроксимируется функцией

вида ae^{bm^2} в интервале изменения m от 0 до 1,9, где a и b – некоторые числа. В среднем в этом интервале частота колебаний изменяется на два порядка.

Ситуация меняется если $N > 2\sqrt{2}c$. В этом случае появляется стационарная точка типа «седла», определяемая условиями (23). Как и в первом случае, замкнутая струна, двигаясь вдоль оси z , совершает колебания в плоскости ортогональной этой оси. Частота малых колебаний также зависит от параметров N и m , но теперь ее рост носит более сложный характер. В интервале изменения m от 0 до m_s частота осцилляций возрастает на порядок, и ее рост неплохо описывается функцией вида ae^{bm^4} , где a и b – константы, отличные от предыдущих. В интервале от m_s до 1,2 частота возрастает линейно еще на порядок. И,

наконец, в интервале от 1,2 до 1,9 она растет по экспоненте с показателем пропорциональным m^2 еще на порядок. Наиболее резкое возрастание происходит на втором участке, причем этот рост усиливается с увеличением N по сравнению с p . Такое поведение объясняется резким ростом величины второй производной эффективного потенциала взятой в точке равновесия в данном интервале.

Продольное магнитное поле

Все сказанное выше можно аналогичным образом применить к случаю продольного магнитного поля (магнитного поля, созданного азимутальными токами и направленного вдоль оси z). Используя формулы (15), (16) и (18) получаем соответствующий эффективный потенциал

$$U^2(\rho) = \rho^{2m^2-2} p^2 + \rho^{2m^2} + \frac{N^4}{4} \rho^{2m^2} G^4 + N^2 \rho^{2m^2} G^2. \quad (25)$$

Вид потенциала (25) принципиально не отличается от (21).

Снова рассматривая потенциал как некоторую двумерную поверхность $U(\rho, m)$, находим стационарную точку типа «седла»:

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ m_s = \frac{p}{\sqrt{p^2 + (1 + 2N^2 c^2)^2}} \end{cases}. \quad (26)$$

Из выражения (25) для эффективного потенциала находим критическое значение параметра m : $m_c = 2$. Отсюда получаем две области, аналогичные полученным в предыдущем случае, в которых поведение эффективного потенциала различно:

$$\begin{cases} U_{\min} \neq 0 \text{ при } \rho \neq 0, m < m_c; \\ U_{\min} \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow 0, m > m_c \end{cases}. \quad (27)$$

Как и в случае азимутального магнитного поля, при наличии продольного магнитного поля устойчивые осцилляции замкнутой сверхпроводящей космической струны возможны только при условии $m < m_c$. В противном случае струна коллапсирует на ось z .

Поведение частоты малых колебаний струны аналогично рассмотренному в предыдущем случае. Единственное отличие проявляется в несколько различной роли параметров N и p , влияющих на рост частоты колебаний. Если в случае азимутального поля скачок частоты колебаний в области $[m_s; 1,2]$ наблюдается при значениях параметра N в несколько раз больших p , то в случае продольного поля скачки частоты наблюдаются при значениях p по крайней мере в несколько раз превосходящих N . Если же $N \sim p$, то рост частоты с ростом m носит более плавный характер и, как в предыдущем случае, приблизительно описывается экспоненциальной функцией с показателем, пропорциональным m^2 . Суммарный рост частоты на интервале изменения m (0;1,9) составляет 2-3 порядка. Значение $m = 0$ исключается, так как в этом случае струна неограниченно расширяется, что хорошо видно из выражения (25) для эффективного потенциала.

Сравнение выражений (23), (26) и изменения частоты колебаний сверхпроводящей струны позволяет сделать вывод, что рост частоты малых колебаний струны в окрестности седловой точки тем больше, чем ближе значение m_s к единице. Другими словами, если параметры N и p выбраны такими, что m_s близко к 1, то рост частоты колебаний в узком диапазоне изменения m в окрестности значения $m = 1$ будет очень значительным.

Радиальное электрическое поле

В отличие от предыдущих двух случаев, весьма похожих друг на друга, случай радиального электрического поля (поля, созданного цилиндрически-симметричным распределением электрического заряда) имеет кардинальное отличие: несмотря на наличие стационарной точки типа «седла», ни при каких значениях параметров N , p не наблюдается не только резкое но и вообще какое-либо значительное увеличение частоты колебаний струны при увеличении параметра m . Наоборот, в достаточно широком диапазоне значений параметров, частота при увеличении m заметно падает. Однако важнее всего то, что эффективный потенциал в данном случае имеет более богатую структуру с точки зрения наличия устойчивых и неустойчивых стационарных точек и асимптотического поведения при $\rho \rightarrow 0$.

Используя формулы (15), (16) и (19), получаем выражение для эффективного потенциала

$$U^2(\rho) = \rho^{-2m^2} G^{-4} \rho^2 + \rho^2 + \frac{N^4}{4} \rho^{-2} G^{-4} + N^2 G^{-2}. \quad (28)$$

Соответствующая двумерная поверхность, которую представляет собой потенциал (28), изображена на рис. 2.

Из соотношения (28) получаем два критических значения параметра m : $m_{c1} = \frac{1}{2}$, $m_{c2} = 2$. Эти значения разделяют области, в которых поведение эффективного потенциала при $\rho \rightarrow 0$ различно. Нетрудно видеть, что имеют место следующие соотношения

$$\begin{cases} U_{\min} \neq 0 \text{ при } \rho \neq 0, m < m_{c1}, m_{c2} < m; \\ U_{\min1} \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow 0, U_{\min2} \neq 0 \text{ при } \rho \neq 0, m_{c1} < m < m_{c2}. \end{cases} \quad (29)$$

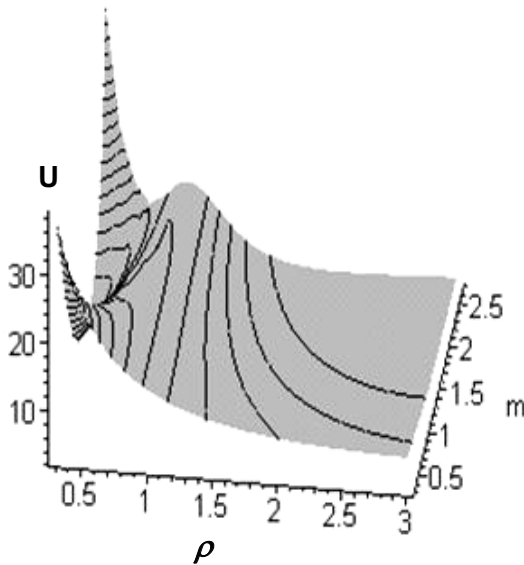


Рис.2. Общий вид эффективного потенциала для случая радиального электрического поля при $N=5$, $p=1$. Видно, что в области $m > 2$ существуют два минимума.

и p . Так, если p превосходит N в несколько раз то два минимума существуют только в области $m < m_{c1}$, тогда как в области $m_{c2} < m$ остается только один минимум. Если же N превосходит p , то ситуация прямо противоположная: два минимума существуют только в области $m_{c2} < m$. Потенциальные ямы, соответствующие минимуму с меньшим значением ρ , могут быть гораздо уже потенциальных ям, соответствующих минимуму с большим значением ρ . Отсюда следует, что значение вторых производных эффективного потенциала, взятых в точках минимумов будет очень сильно различаться. Таким образом, в случае локализации замкнутой струны в потенциальной яме, соответствующей минимуму с меньшим значением ρ , частота её осцилляций может быть на несколько порядков больше при той же полной энергии.

Таким образом, в случае радиального электрического поля мы имеем более разнообразную динамику сверхпроводящей космической струны, чем в предыдущих двух. Однако, как и следовало ожидать, во всех трех случаях четко прослеживается зависимость возникновения того или иного типа движения сверхпроводящей струны как от характеристик последней (параметр N), так и от характеристик фоновой метрики (параметр m).

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

В силу того, что метрические коэффициенты в квадратичных формах (17)-(19) зависят только от радиальной координаты ρ и учитывая связь $H = 0$, мы можем из соответствующих гамильтонианов сразу же получить уравнения движения струны. Очевидно, что они будут нелинейными дифференциальными уравнениями первого порядка, описывающими эволюцию радиальной координаты ρ струны. Однако эти уравнения разрешимы относительно производной и поэтому сводятся к квадратурам. В итоге получается неявное решение в виде

$$\tau(\rho) = \int F(\rho) d\rho, \quad (30)$$

где функция $F(\rho)$ в общем случае представляет собой иррациональное выражение относительно ρ .

Так как нас интересует явное поведение ρ с течением времени, то проще всего непосредственно получить уравнения Гамильтона из соответствующих гамильтонианов и исследовать их с помощью численных методов. Используя (15), (16), (17)-(19), соответствующие гамильтонианы можно записать в форме

$$H = -\frac{1}{2}\rho^{-2m^2}G^{-2}\varepsilon_0^2 + \frac{1}{2}\rho^{-2m^2}G^{-2}p_\rho^2 + \frac{1}{2}G^2p^2 + \frac{1}{2}\left(\rho G + \frac{N^2}{2\rho G}\right)^2, \quad (31)$$

$$H = -\frac{1}{2}\rho^{-2m^2}G^{-2}\varepsilon_0^2 + \frac{1}{2}\rho^{-2m^2}G^{-2}p_\rho^2 + \frac{1}{2}\rho^{-2}G^{-2}p^2 + \frac{1}{2}\left(G^{-1} + \frac{N^2}{2}G\right)^2, \quad (32)$$

$$H = -\frac{1}{2}G^2\varepsilon_0^2 + \frac{1}{2}\rho^{-2m^2}G^{-2}p_\rho^2 + \frac{1}{2}\rho^{-2m^2}G^{-2}p^2 + \frac{1}{2}\left(\rho G + \frac{N^2}{2\rho G}\right)^2. \quad (33)$$

Тогда уравнения движения записываются в форме гамильтоновых уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial p_\rho} \\ \dot{p}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial \rho} \end{cases}. \quad (34)$$

В силу громоздкости сами уравнения в явной форме не выписаны.

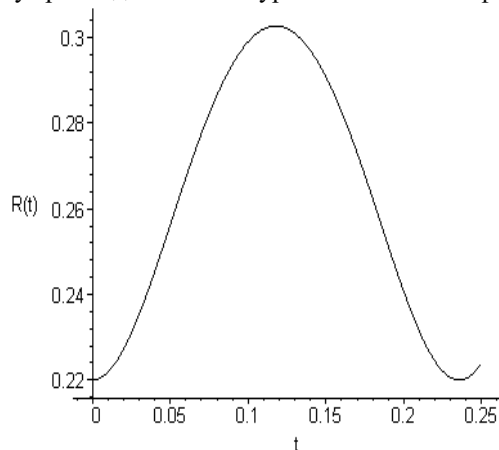


Рис.3. Зависимость радиуса замкнутой сверхпроводящей космической струны от времени в случае азимутального магнитного поля при следующих параметрах: $N=5$, $p=1$, $m=1$.

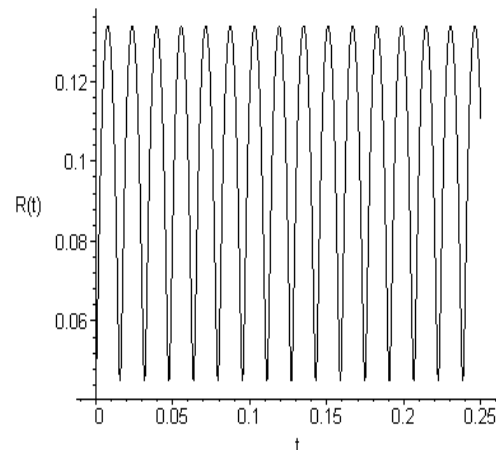


Рис.4. Зависимость радиуса замкнутой сверхпроводящей космической струны от времени в случае азимутального магнитного поля при $m=1.1$, $N=5$, $p=1$.

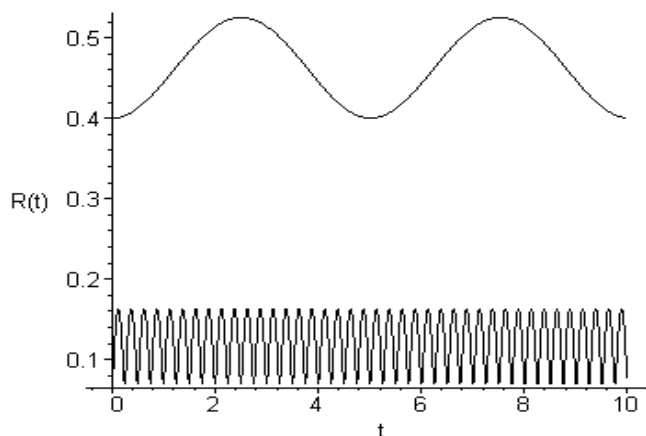


Рис.5. Осцилляции радиуса струн, локализованных в разных потенциальных ямах для случая радиального электрического поля. Верхняя кривая соответствует струне, локализованной в широкой потенциальной яме, а нижняя – локализации в узкой потенциальной яме. Видна значительная разница в частотах колебаний. Для обоих случаев выбор параметров одинаков: $N=1$, $p=5$, $m=1/3$.

Теперь варьируя начальные данные и параметры m , N и p можно графически получить все типы движения струны которые описывались выше. Например, на рис. 3 представлен колебательный процесс струны в случае азимутального магнитного поля при $m=1$, а на рис. 4 те же колебания, но при $m=1.1$. Хорошо видна разница между частотами обоих колебаний.

На рис. 5 приведены зависимости радиуса струны от времени, отвечающие движению в потенциальных ямах разной ширины для случая радиального электрического поля. Верхний

график искусственно сжат в вертикальном направлении. Видно, что струна, локализованная в узкой потенциальной яме, совершает колебания с частотой значительно большей частоты колебаний струны, локализованной в широкой потенциальной яме. При этом полная энергия для обеих струн одинаковая.

ВЫВОДЫ

Полученные в работе результаты показывают, что динамика замкнутой сверхпроводящей космической струны может быть сведена к исследованию движения точечной частицы в эффективном потенциале, который однозначно определяется фоновой метрикой. Это наблюдение позволяет достаточно просто исследовать динамику сверхпроводящей струны в цилиндрически-симметричных полях Эйнштейна-Максвелла. При этом оказывается, что динамика сверхпроводящей струны носит нетривиальный характер и существенным образом зависит как от параметров фоновой метрики, так и от параметров сверхпроводящей струны. В частности очень четко прослеживаются изменения в динамике сверхпроводящей струны в зависимости от параметра m . В случае азимутального и аксиального магнитных полей частота колебаний струны монотонно увеличивается при увеличении параметра m в интервале $(0; 1,9)$. При этом если значение m в седловой стационарной точке приближается к 1, частота колебаний значительно возрастает в узком диапазоне изменения m . Случай радиального электрического поля кардинально отличается от предыдущих двух: во-первых, наличие стационарной точки типа «седла» не оказывает заметного влияния на поведение сверхпроводящей струны и, как следствие, при увеличении параметра m не наблюдается роста частоты осцилляций; во-вторых, в достаточно широком диапазоне изменения параметров N и p при фиксированном m возможно существование двух потенциальных ям с различной шириной. Частоты колебаний локализованных в этих ямах замкнутых струн могут очень сильно отличаться.

В заключение следует отметить следующее. Как уже говорилось, в данной работе мы ограничились рассмотрением только фоновых гравитационных полей и не учитывали внешнее электромагнитное поле. Поэтому возникает необходимость и интерес в будущем проанализировать движение замкнутой сверхпроводящей космической струны в аксиально-симметричных полях Эйнштейна-Максвелла с учетом внешнего аксиально-симметричного электромагнитного поля, поскольку это представляет несомненный интерес для современных исследований в области астрофизики и космологии.

Авторы искренне благодарны Л.Я. Арифову, А.А. Желтухину и А.П. Лелякову за плодотворное обсуждение и замечания по результатам работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vilenkin A., Shellard E.P.S. Cosmic strings and other topological defects. – Cambridge University Press, 2000. – 534p.
2. Peebles P.J.E. Principles of Physical Cosmology. – Princeton University Press, 1994. – 850p.
3. Witten E. Superconducting strings // Nucl. Phys. – 1985. – Vol. B 249. – P. 557-592.
4. Kibble T.W.B., Hindmarsh M.B. Cosmic strings. Preprint hep-th/9411342.
5. Everett A.E. New mechanism for superconductivity in cosmic strings // Phys. Rev. Lett. – 1988. – Vol. 61, №16. – P.1807-810.
6. Larsen A.L. Cosmic Strings and Black Holes. Preprint hep-th/9610063.
7. Гальцов Д.В., Масар Э. Движение тел в пространстве-времени Шварцшильда с коническими особенностями // ТМФ. – 1989. - Т.80, №2. - С.288 – 303.
8. Berezhinsky V., Hnatyk B., Vilenkin A. Gamma ray bursts from superconducting cosmic strings. Preprint astro-ph/0102366.
9. CSL-1: chance projection effect or serendipitous discovery of gravitational lens induced by a cosmic string? / Sazhin M., Longo G., Capaccioli M. and al. Preprint astro-ph/0302547.
10. Lens candidates in the Capodimonte Deep Field in vicinity of the CSL-1 object / Sazhin M., Khovanskaya O., Capaccioli M. and al. Preprint astro-ph/0406516.
11. Larsen A.L. Dynamics of cosmic strings and springs; a covariant formulation. Preprint hep-th/9304086.
12. Точные решения уравнений Эйнштейна / Под ред. Э. Шмутцера. - Пер. с англ. Н.В. Мицкевича. – М.: Энергоиздат, 1982. – 416с.

CLOSED SUPERCONDUCTING COSMIC STRINGS IN EINSTEIN-MAXWELL CYLINDRICALLY-SYMMETRIC FIELDS

A.V. Zhovtan, S.N. Roshchupkin

V.I. Vernadski Tavrida National University,
95007, Simferopol, Vernadski st. 4, Physical Department

Dynamics of closed superconducting cosmic string is considered in the axisymmetric gravitational fields induced by either the axial current or by the azimuthal current or by the axially distributed electrical charges. It is shown that the dynamics of the closed superconducting string in all three cases can be described by effective particle-like Hamiltonian. The investigation of the effective potentials has been carried out and the numerical solutions of the classical motion equations of the closed superconducting string have been obtained. It is shown that the string dynamics has nontrivial character and depends substantially both upon background metric parameters as well as and string's parameters.

KEY WORDS: superconducting cosmic string, Einstein-Maxwell fields, effective potentials, numerical solutions.