УДК 530.1

ЗВУКОВЫЕ МОДЫ В ИЗОТРОПНОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

А.А. Ступка
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара
Днепропетровск, пр. Гагарина 72, 49010
E-mail: antonstupka@mail.ru
Поступила в редакцию 21 мая 2009 г.

Рассмотрена гидродинамика плазмы в магнитном поле, которое имеет в равновесии равный нулю первый момент и отличный от нуля второй момент магнитной индукции. Получены уравнения идеальной магнитной гидродинамики в таком поле для адиабатического процесса. Показано, что в уравнение Эйлера входит новая переменная – второй момент магнитной индукции, для которого получено временное уравнение на основе уравнений Максвелла в гидромагнитном приближении. Изучены одномерные плоские волны в этой системе. Получены значения фазовых скоростей двух поперечных и одной продольной звуковых волн.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: изотропная магнитная гидродинамика, второй момент магнитной индукции, одномерные плоские волны, звуковые моды, поперечная скорость звука.

SOUND MODES IN ISOTROPIC MAGNETIC HYDRODYNAMICS

A.A. Stupka
Oles' Honchar Dnipropetrovs'k National University, 72, Gagarin ave.
Dnipropetrovs'k, Ukraine, 49010
Hydrodynamics of plasma in a magnetic field that has in equilibrium first moment of magnetic induction equal to the zero and second moment different from a zero is considered. Equations of ideal magnetic hydrodynamics in such field for adiabatic process are received. It is shown that a new variable - second moment of magnetic induction is included in the Euler equation, for which time equation is received on the basis of Maxwell equalizations in the hydromagnetic approach. One-dimension plane waves in this system are studied. The values of phase velocities of two transversal and one longitudinal sound waves are received.
KEY WORDS: isotropic magnetic hydrodynamics, second moment of the magnetic induction, one-dimension plane waves, sound modes, transversal sound velocity.

ЗВУКОВІ МОДИ В ІЗОТРОПНІЙ МАГНІТНІЙ ГІДРОДИНАМІЦІ

А.А. Ступка
Дніпропетровський національний університет ним. Олеся Гончара
Дніпропетровськ, пр. Гагаріна 72, 49010
Розглянуто гідродинаміку плазми в магнітному полі, яке має в рівновазі рівний нулю перший момент і відмінний від нуля другий момент магнітної індукції. Одержано рівняння ідеальної магнітної гідродинаміки в такому полі для адіабатичного процесу. Показано, що в рівняння Ейлера входить нова змінна – другий момент магнітної індукції, для якого одержано часове рівняння на основі рівнянь Максвела в гідромагнітному наближенні. Вивчено одномірні плоскі хвилі в цій системі. Отримано значення фазових швидкостей двох поперечних і однієї подовжньої звукових хвиль.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: ізотропна магнітна гідродинаміка, другий момент магнітної індукції, одномірні плоскі хвилі, звукові моди, поперечна швидкість звуку.

Магнитная гидродинамика (МГД) – это раздел механики сплошных сред, изучающий движение проводящих (электропроводных) сред в присутствии магнитного поля [1]. В МГД среда рассматривается как единая жидкость и описывается локальными значениями плотности ρ, давления P и скорости $\vec{v}$. Кроме этих чисто гидродинамических величин обычно состояние среды характеризуется магнитной индукцией $\vec{B}$ [2 с.8], которая имеет некоторое ненулевое значение в равновесном состоянии. Предположим, что магнитное поле является случайной величиной с равным нулю первым моментом магнитной индукции $\vec{B}$ и отличным от нуля вторым [3]. Будем считать равновесное состояние системы изотропным и постоянное магнитное поле будем характеризовать средним квадратом магнитной индукции. В стандартное уравнение Эйлера входит квадратичный по магнитному полю тензор напряжений Максвелла [2 с.16], для которого мы построим временное уравнение в МГД приближении. Предложенное обобщение МГД позволит применить теорию к изотропным системам, таким как плазма изотропного твёрдого тела.

Цель работы - получение уравнения идеальной магнитной гидродинамики в магнитном поле, которое имеет в равновесии равный нулю первый момент и отличный от нуля второй момент магнитной индукции, для адиабатического процесса и изучить одномерные плоские волны в этой системе.

УРАВНЕНИЯ ИЗОТРОПНОЙ ИДЕАЛЬНОЙ МГД

Выпишем стандартные уравнения идеальной МГД, пренебрегая всеми диссипативными эффектами (вязкостью, теплопроводностью и электрическим сопротивлением) [2 с.19-24]. При этом МГД эффекты проявляются наиболее ярко. Уравнение непрерывности

$$\partial_t \rho + div\rho\vec{v} = 0\,, \tag{1}$$

уравнение Эйлера

$$d\rho\vec{v}/dt = -\nabla P - [\vec{B},\vec{j}]/c\,, \tag{2}$$

здесь учтено, что среда немагнитная и напряженность совпадает с индукцией $\vec{H}=\vec{B}$. Кроме того, запишем уравнения Максвелла в МГД случае для магнитной индукции как случайной величины

$$rot\vec{B} = 4\pi\vec{j}/c\,, \tag{3}$$

$$\partial_t \vec{B} = rot[\vec{v},\vec{B}]\,. \tag{4}$$

При выводе уравнения (4) учтено, что при медленных движениях среды электроны успевают сместиться в сторону увеличения электрического потенциала таким образом, что градиент этого потенциала обратится в нуль. При этом электрическое поле в собственной системе отсчёта [4 с.89] равно нулю, т.е. $\vec{E}=-[\vec{v},\vec{B}]/c$. Подставим электрический ток из (3) в (2) и получим закон сохранения импульса в виде

$$\partial_t\left(\rho v_i\right) + \partial_k \pi_{ik} = 0\,, \tag{5}$$

здесь введено обозначение для производной $\partial/\partial x_k = \partial_k$ и для тензора потока импульса $\pi_{ik} = \rho v_i v_k + P\delta_{ik} - \left(B_i B_k - B^2\delta_{ik}/2\right)/4\pi$. Мы будем интересоваться лишь малыми колебаниями в данной системе. Это позволяет произвести линеаризацию по малой амплитуде отклонений от равновесных значений. Тогда

$$\pi_{ik} = \delta_{ik}\left(\left(\partial P/\partial\rho\right)_s \rho + \left(\partial P/\partial s\right)_\rho s\right) - \left(\left\langle B_i B_k\right\rangle - \left\langle B_l B_l\right\rangle\delta_{ik}/2\right)/4\pi\,, \tag{6}$$

где отклонения корреляционных моментов поля от их равновесных значений считаются также имеющими первый порядок малости. Как видно, в (5) входит тензор напряжений Максвелла, который в МГД приближении полностью определяется вторым моментом $\left\langle B_i B_k\right\rangle$. Временное уравнение для указанного момента получим из (4), умножая на B_k в той же пространственно-временной точке и симметризуя. После усреднения по случайным фазам [5 с.439] и линеаризации имеем уравнение

$$\partial_t\left\langle B_i B_k\right\rangle = \eta_{iklmnp}\left\langle B_l B_m\right\rangle_0 \partial_n v_p\,, \tag{7}$$

где введен тензор $\eta_{iklmnp} = \delta_{ip}\delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{im}\delta_{kp}\delta_{ln} - \delta_{il}\delta_{km}\delta_{np} - \delta_{im}\delta_{kl}\delta_{np}$. Согласно сделанным предположениям о статистике магнитного поля равновесное значение корреляционного момента $\left\langle B_l B_m\right\rangle_0 = \left\langle B_0^2\right\rangle\delta_{lm}/3 = const$. Тепловыми флуктуациями будем пренебрегать. В тензор потока импульса (6) входит отклонение энтропии. Для простоты будем интересоваться адиабатическими процессами, тогда

$$\partial_t v_i + \partial_k\left\{\delta_{ik}v_s^2\rho - \left(\left\langle B_i B_k\right\rangle - \left\langle B_l B_l\right\rangle\delta_{ik}/2\right)/4\pi\right\}/\rho_0 = 0\,. \tag{8}$$

Здесь ρ_0 - равновесное значение плотности массы, $v_s^2 = \left(\partial P/\partial\rho\right)_s$ - адиабатическая скорость звука в незамагниченой жидкости. Также линеаризуем (1)

$$\partial_t\rho + \rho_0\partial_i v_i = 0\,. \tag{9}$$

Система уравнений (9), (8) и (7) для переменных ρ, v_i и $\left\langle B_i B_k\right\rangle$ замкнута.

АДИАБАТИЧЕСКИЕ ОДНОМЕРНЫЕ ВОЛНЫ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ

Рассмотрим одномерные волны, вдоль направления распространения направим координатную ось z. Пусть все МГД величины зависят только от z и t. Уравнение (7) симметрично по тензорным индексам i и k, потому содержит 6 уравнений для компонент симметричного тензора $\left\langle B_i B_k\right\rangle$. Уравнение $\partial_t\left\langle B_x B_y\right\rangle = 0$ имеет тривиальное решение $\left\langle B_x B_y\right\rangle = const$ и отделяется от остальной системы. Остальные 9 уравнений (7)-(9) удобно представить в матричном виде

$$\partial_t\Psi_\alpha + \mathrm{Z}_{\alpha\beta}\partial_z\Psi_\beta = 0\,. \tag{10}$$

Здесь введен вектор состояния

$$\Psi = \left(\rho, v_x, v_y, v_z, \left\langle B_x B_x\right\rangle, \left\langle B_x B_z\right\rangle, \left\langle B_y B_y\right\rangle, \left\langle B_y B_z\right\rangle, \left\langle B_z B_z\right\rangle\right) \tag{11}$$

и матрица со следующими ненулевыми компонентами

$$\mathrm{Z}_{14} = \rho_0\,,\ \mathrm{Z}_{26} = Z_{38} = -2Z_{45} = -2Z_{47} = 2Z_{49} = -1/4\pi\rho_0\,,\ Z_{41} = \frac{v_s^2}{\rho_0}\,,\ Z_{54} = Z_{74} = -2Z_{62} = -2Z_{83} = 2\left\langle B_0^2\right\rangle/3\,. \tag{12}$$

В плоской одномерной волне зависимость вектора состояния от координаты и времени имеет вид [2 с.49-55]

$$\Psi_\alpha = A_\alpha\exp\left(ikz - i\omega t\right)\,. \tag{13}$$

Подстановка (13) в (10) даёт

$$\mathrm{Z}_{\alpha\beta} A_\beta = V A_\alpha , \tag{14}$$

где $V = \omega / k$ - фазовая скорость волны, A_α - правый собственный вектор матрицы Z. Стандартным образом решая уравнение (14) находим собственные значения V матрицы Z

$$V = \left\{ 0,0,0,-\sqrt{\left\langle B_0^2 \right\rangle /12\pi\rho_0}, \sqrt{\left\langle B_0^2 \right\rangle /12\pi\rho_0}, -\sqrt{\left\langle B_0^2 \right\rangle /12\pi\rho_0}, \sqrt{\left\langle B_0^2 \right\rangle /12\pi\rho_0}, -\sqrt{v_s^2 + \left\langle B_0^2 \right\rangle /6\pi\rho_0}, \sqrt{v_s^2 + \left\langle B_0^2 \right\rangle /6\pi\rho_0} \right\}, \tag{15}$$

а также собственные векторы. Так как собственный вектор определён с точностью до скалярного множителя, каждая из найденных волн характеризуется одним независимым параметром, в качестве которого будем выбирать амплитуду второго момента поля. Значениям $V = 0$ соответствуют нераспространяющиеся возмущения одного из диагональных элементов тензора второго момента поля и плотности:

$$A_1 = \left\{ 1/8\pi v_s^2, 0,0,0,0,0,0,0,1 \right\}, \ A_2 = \left\{ -1/8\pi v_s^2, 0,0,0,0,0,1,0,0 \right\}, \ A_3 = \left\{ -1/8\pi v_s^2, 0,0,0,1,0,0,0,0 \right\}. \tag{16}$$

Четвертое и пятое собственные значения отвечают моде поперечных колебаний скорости вдоль оси x и компоненты $\left\langle B_x B_z \right\rangle$:

$$A_4 = \left\{ 0, \sqrt{3/4\pi \left\langle B_0^2 \right\rangle \rho_0}, 0,0,0,1,0,0,0 \right\}, \ A_5 = \left\{ 0, -\sqrt{3/4\pi \left\langle B_0^2 \right\rangle \rho_0}, 0,0,0,1,0,0,0 \right\}. \tag{17}$$

Шестое и седьмое собственные значения отвечают моде поперечных колебаний скорости вдоль оси y и компоненты $\left\langle B_y B_z \right\rangle$:

$$A_6 = \left\{ 0,0, \sqrt{3/4\pi \left\langle B_0^2 \right\rangle \rho_0}, 0,0,0,0,1,0 \right\}, \ A_7 = \left\{ 0,0, -\sqrt{3/4\pi \left\langle B_0^2 \right\rangle \rho_0}, 0,0,0,0,1,0 \right\}. \tag{18}$$

Последние два собственных значения отвечают моде продольных колебаний скорости вдоль оси z, плотности массы и диагональных компонент $\left\langle B_x B_x \right\rangle$ и $\left\langle B_y B_y \right\rangle$:

$$A_8 = \left\{ 3\rho_0 / 2\left\langle B_0^2 \right\rangle, 0,0, -3\sqrt{v_s^2 + \left\langle B_0^2 \right\rangle /6\pi\rho_0} \,/\, 2\left\langle B_0^2 \right\rangle, 1,0,1,0,0 \right\},$$

$$A_9 = \left\{ 3\rho_0 / 2\left\langle B_0^2 \right\rangle, 0,0, 3\sqrt{v_s^2 + \left\langle B_0^2 \right\rangle /6\pi\rho_0} \,/\, 2\left\langle B_0^2 \right\rangle, 1,0,1,0,0 \right\}. \tag{19}$$

Как видно из (15)-(19), имеются две поперечные моды колебаний со скоростью $v_t = \sqrt{\left\langle B_0^2 \right\rangle /12\pi\rho}$ и одна продольная со скоростью $v_l = \sqrt{v_s^2 + 2v_t^2}$. В этом смысле ситуация вполне аналогична звуковым модам в изотропном твёрдом теле [3, 6 с. 124-128].

ВЫВОДЫ

Таким образом, изучена эволюция магнитоактивной плазмы в приближении идеальной гидродинамики. Магнитное поле как случайная величина характеризовано ненулевым равновесным значением второго момента магнитной индукции. Получена линейная система уравнений для плотности массы, скорости и тензора второго момента магнитной индукции, которая позволила изучить адиабатические моды в данной системе. Найдены две поперечные с совпадающими фазовыми скоростями и продольная звуковые моды. При обращении в ноль равновесного значения второго момента магнитной индукции поперечные моды исчезают, а продольная мода переходит в обычный ионный звук в изотропной плазме.

Благодарю проф. А.И. Соколовского за полезное обсуждение задачи. Эта работа поддержана Государственным фондом фундаментальных исследований Украины (проект № 25.2.102).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основные понятия магнитной гидродинамики. МГД-устройства и МГД-установки: Сборник рекомендуемых терминов. - Москва: Наука, 1982. - 47 с.
2. Половин Р.В., Демуцкий В.П. Основы магнитной гидродинамики. - Москва: Энергоатомиздат, 1987. – 206 с.
3. Ступка А.А. Гідромагнітна теорія звуку в аморфному твердому тілі // XI міжнародна конференція "Людина і Космос": Тез. докл. - Дніпропетровськ, 2009. - С. 60.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10 т. - Теория поля. - Москва: Наука, 1988. - Т. 2:- 512 с.
5. Электродинамика плазмы /Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В., Ситенко А.Г., Степанов К. Н.; Под ред. А.И. Ахиезера. - Москва: Наука, 1974. - 720 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10 т. - Теория упругости. - Москва: Наука, 1987. - Т. 7 - 248 с.