УДК 530.1(075.8)

ОБ ОШИБКАХ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю.А. Кирочкин[1], А.Ю. Кирочкин[2]
[1]Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, 61004, Харьков, пл. Свободы, 4
[2]Национальный университет гражданской защиты Украины, 61023, Харьков, ул. Чернышевского, 94
Поступила в редакцию 25 января 2010 г., принята к публикации 12 марта 2010г.

Во всех изданиях «Теории поля» Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица при доказательстве теоремы Лармора используется функция Лагранжа нерелятивистской системы зарядов с одинаковым отношением заряда к массе, совершающей финитное движение в постоянных центрально-симметричном электрическом и однородном магнитном полях. При переходе к вращающейся с ларморовой частотой системе координат преобразованная функция Лагранжа отличается от исходной только отсутствием слагаемого, пропорционального магнитному полю. Далее утверждается, что эту ларморову прецессию момента импульса (и магнитного момента) рассматриваемой системы зарядов можно объяснить и путем усреднения уравнения моментов по временам, малым по сравнению с обратной ларморовой частотой. Но в «Теории поля» при преобразовании момента силы Лоренца отброшено слагаемое, являющееся полной производной по времени. В настоящей работе показано, что этим слагаемым пренебрегать нельзя.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: момент импульса, магнитный момент, магнитное поле, ларморова частота, диамагнетизм

ABOUT MISTAKES AT CALCULATING THE CHARGES SYSTEM ANGULAR MOMENTUM IN THE CONSTANT ELECTROMAGNETIC FIELD

Yu.A. Kirochkin[1], A.Yu. Kirochkin[2]
[1]Karazin National University, 61004, Kharkov, Svobody Sq., 4
[2]National Civil Defence University of Ukraine, 61023, Kharkov, Chernyshevskogo street, 94
In all editions of «Field Theory» of L.D. Landau and E.M. Lifshits when proving the Larmor theorem the Lagrangian function of nonrelativistic charges system with the same charge-to-mass ratio executing a finite motion in constant central-symmetric electric and homogeneous magnetic fields is used. When transforming to the coordinate system rotating with Larmor's frequency transformed Lagrangian function differs from the source only by the absence of term proportional to the magnetic field. Then it is stated that this Larmor's precession of angular momentum (and magnetic moment) of the considered charges system can be explained also by means of moment equation averaging of times small as compared to inverse Larmor's frequency. But in «Field Theory» when transforming the moment of Lorentz force a term being a total time derivative is neglected. In this paper it is shown that this term cannot be neglected.
KEY WORDS: angular momentum, magnetic moment, magnetic field, Larmor's frequency, diamagnetism

ПРО ПОМИЛКИ ПРИ ОБЧИСЛЕННІ МОМЕНТУ ІМПУЛЬСУ СИСТЕМИ ЗАРЯДІВ У ПОСТІЙНОМУ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПОЛІ

Ю.О. Кірочкін[1], О.Ю. Кірочкін[2]
[1]Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, 61004, Харків, пл. Свободи, 4
[2]Національний університет цивільного захисту України, 61023, Харків, вул. Чернишевського, 94
У всіх виданнях «Теорії поля» Л.Д. Ландау и Є.М. Ліфшиця при доведенні теореми Лармора використовується функція Лагранжа нерелятивістської системи зарядів з однаковим відношенням заряду до маси, яка здійснює фінітний рух у постійних центральносиметричному електричному та однорідному магнітному полях. При переході до системи координат, яка обертається з ларморовою частотою, перетворена функція Лагранжа відрізняється від вихідної тільки відсутністю доданка, пропорційного магнітному полю. Далі стверджується, що цю ларморову прецесію моменту імпульсу (і магнітного моменту) системи зарядів, що розглядається, можна пояснити також шляхом усереднення рівняння моментів за часами, які є малими у порівнянні зі зворотною ларморовою частотою. Але в «Теорії поля» при перетворенні моменту сили Лоренца відкинутий доданок, який є повною похідною за часом. У цій роботі показано, що цим доданком нехтувати не можна.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: момент імпульсу, магнітний момент, магнітне поле, ларморова частота, діамагнетизм

Целью данной работы является исправление ошибок, допущенных другими авторами, при получении и решении уравнения моментов для системы зарядов в рассматриваемом электромагнитном поле.

Пусть система зарядов находится в постоянном и однородном магнитном поле $\vec{H}$ и в постоянном центрально-симметричном электрическом поле $\vec{E}(\vec{R})=\frac{\vec{R}}{R}E(R)$, где $\vec{R}$ – радиус-вектор точки наблюдения. Найдем изменение в единицу времени момента импульса системы зарядов $\vec{M}=\sum_a \vec{R}_a\times\vec{p}_a$ (далее индекс «*a*» опущен)

$$\frac{d\vec{M}}{dt}=\sum\vec{R}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum\vec{R}\times\left\{q\vec{E}(\vec{R})+\frac{q}{c}\vec{v}\times\vec{H}\right\}=\frac{1}{c}\sum q\vec{R}\times\left(\vec{v}\times\vec{H}\right). \tag{1}$$

(Здесь в фигурных скобках – сила Лоренца, действующая на каждый заряд, $\vec{v}=\frac{d\vec{R}}{dt}$. Если электрическое поле не центрально, то в правой части (1) добавляется еще слагаемое $\sum q\vec{R}\times\vec{E}(\vec{R})$.) Совершим в (1) преобразование правой части

$$\vec{R}\times\left(\vec{v}\times\vec{H}\right)=\vec{v}\left(\vec{R}\vec{H}\right)-\vec{H}\left(\vec{v}\vec{R}\right)=\frac{1}{2}\vec{v}\left(\vec{R}\vec{H}\right)+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\vec{R}\vec{H}\right)\vec{R}-\frac{1}{2}\vec{R}\left(\vec{v}\vec{H}\right)-\frac{1}{2}\vec{H}\frac{d}{dt}R^2=\frac{1}{2}\left(\vec{R}\times\vec{v}\right)\times\vec{H}+\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\vec{R}\times\left(\vec{R}\times\vec{H}\right). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\frac{d}{dt}\left\{\vec{M}-\frac{1}{2c}\sum q\vec{R}\times\left(\vec{R}\times\vec{H}\right)\right\}=\vec{\mu}\times\vec{H}\ , \quad (3)$$

где

$$\vec{\mu}=\frac{1}{2c}\sum q\vec{R}\times\vec{v} \text{ – магнитный момент системы зарядов.} \quad (4)$$

Отметим, что во всех изданиях «Теории поля» Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшица (см., например, [1] стр. 152) вторым слагаемым в (3) пренебрегается. Ошибочность этого действия легко подтверждается в случае, когда $\vec{E}\left(\vec{R}\right)=0$, а $\vec{H}$ по-прежнему постоянное и однородное магнитное поле. Из уравнения движения

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{q}{c}\vec{v}\times\vec{H} \quad (5)$$

имеем

$$\vec{p}=\frac{q}{c}\vec{R}\times\vec{H}\ . \quad (6)$$

Из (3) и (6) находим

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum\vec{R}\times\vec{p}-\frac{1}{2}\sum\vec{R}\times\vec{p}\right\}=\vec{\mu}\times\vec{H}\ . \quad (7)$$

В (7) слагаемые слева одного порядка, и пренебрежение вторым слагаемым в (3) и (7) ошибочно.

Если ввести векторный потенциал $\vec{A}$ постоянного и однородного магнитного поля $\vec{H}$

$$\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{H}\times\vec{R}\ , \quad (8)$$

то выражение (3) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\sum\vec{R}\times\vec{P}=\vec{\mu}\times\vec{H}\ , \quad (9)$$

где $\vec{P}=\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A}$ – обобщенный импульс заряда.

Для нерелятивистской системы зарядов ($v<<c$) с одинаковым для всех зарядов отношением величины заряда к массе ($\frac{q}{m}=\text{const}$) выражения (7) и (3) принимают вид

$$\frac{d\vec{M}}{dt}=\vec{M}\times\vec{\omega}_H\ , \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt}\left(M_\alpha-J_{\alpha\beta}\Omega_\beta^{(L)}\right)=\left\{\vec{\Omega}^{(L)}\times\vec{M}\right\}_\alpha , \quad (11)$$

где

$$\vec{M}=\sum m\left(\vec{R}\times\vec{v}\right) \text{ – момент импульса нерелятивистской системы частиц,} \quad (12)$$

$$\vec{\omega}_H=\frac{q\vec{H}}{mc} \text{ – циклотронная частота,} \quad (13)$$

$$\vec{\Omega}^{(L)}=-\frac{q}{2mc}\vec{H} \text{ – ларморова частота,} \quad (14)$$

$$J_{\alpha\beta}=\sum m\left(R^2\delta_{\alpha\beta}-x_\alpha x_\beta\right) \text{ – тензор моментов инерции системы частиц.} \quad (15)$$

В «Теории поля» Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшица (см. [1], с. 150) утверждается, что «… среднее значение производной по времени от всякой величины, меняющейся в конечных пределах» обращается в нуль. Если следовать этому правилу, то при таком усреднении обратится в нуль и первое слагаемое слева в (11), что приведет к заведомо неверному результату. Это означает, что применять это правило надо осторожно. Еще раз подчеркнем, что при $\vec{E}\left(\vec{R}\right)=0$ только при удержании второго слагаемого в (7) получаем уравнение (10), описывающее прецессию момента каждого заряда и всей системы в целом вокруг направления $\vec{H}$ с циклотронной частотой, а не с ларморовой.

Направим ось z декартовой системы координат по направлению $\vec{H}$ и спроектируем (11) на оси координат

$$\frac{dM_x}{dt}+\Omega^{(L)}\frac{d}{dt}\sum mzx=-\Omega^{(L)}M_y\ , \quad (16)$$

$$\frac{dM_y}{dt}+\Omega^{(L)}\frac{d}{dt}\sum mzy=\Omega^{(L)}M_x\ , \quad (17)$$

$$\frac{dM_z}{dt} - \Omega^{(L)} \frac{d}{dt} \sum m\left(x^2 + y^2\right) = 0 \,, \tag{18}$$

$$\Omega^{(L)} = -\frac{q}{2mc} H \,. \tag{19}$$

Если описывать этими классическими выражениями состояние электронных оболочек атома, то после усреднения по промежутку времени τ, большому по сравнению с характерным атомным временем τ_A и малому по сравнению с промежутком $2\pi/\Omega^{(L)}$, с учетом цилиндрической симметрии получим

$$\frac{d\overline{M}_x}{dt} = -\Omega^{(L)} \overline{M}_y \,, \tag{20}$$

$$\frac{d\overline{M}_y}{dt} = \Omega^{(L)} \overline{M}_x \,, \tag{21}$$

$$\overline{M}_z - \Omega^{(L)} \sum m\left(\overline{x^2 + y^2}\right) = M_{0z} \,, \tag{22}$$

где $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = \text{const}$, M_{0z} – постоянная интегрирования, равная продольному моменту при $\vec{H} = 0$,

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \frac{1}{3} r_B^2 \text{ либо } \overline{x^2 + y^2} = b^2 \tag{23}$$

(боровский радиус r_B и величина b^2 вычисляются методами квантовой механики; см., например, [2] стр. 746, [3] стр. 288).

Из (20) и (21) находим

$$\overline{M}_x = M_{0\perp} \cos\left(\Omega^{(L)} t + \alpha_0\right), \ \overline{M}_y = M_{0\perp} \sin\left(\Omega^{(L)} t + \alpha_0\right) \tag{24}$$

($M_{0\perp}$ и α_0 – постоянные интегрирования).

Таким образом, вектор $\overline{\vec{M}_\perp}$ прецессирует вокруг направления $\vec{\Omega}^{(L)}$, оставаясь по величине равным $M_{0\perp}$ (в частности, для диамагнетиков при $\vec{H} = 0$ $M_{0\perp} = 0$).

Умножая (22) на величину гиромагнитного отношения $\dfrac{q}{2mc}$, получим соотношение для продольного магнитного момента системы зарядов

$$\bar{\mu}_z = \mu_{0z} - \sum \frac{q^2 r_B^2}{6mc^2} H \,. \tag{25}$$

Для диамагнетика в отсутствие магнитного поля $\mu_{0\perp} = 0$, $\mu_{0z} = 0$. Средний магнитный момент $\overline{\vec{\mu}_A}$ одного атома диамагнетика, возникающий в магнитном поле, согласно (25) равен

$$\overline{\vec{\mu}_A} = -\vec{H} \frac{q r_B^2}{6mc^2} \cdot \sum q = -\frac{Ze^2 r_B^2}{6mc^2} \vec{H} \,, \tag{26}$$

где e и m – заряд и масса электрона, Z – порядковый номер элемента.

Вектор намагниченности вещества определяется как средний магнитный момент единицы объема вещества

$$\vec{I} = n\overline{\vec{\mu}_A} = -\frac{nZe^2 r_B^2}{6mc^2} \vec{H} = \chi \vec{H} \,, \tag{27}$$

где n – плотность атомов вещества, $\chi = -\dfrac{nZe^2 r_B^2}{6mc^2}$ – диамагнитная восприимчивость вещества.

ВЫВОДЫ

Подчеркнем, что все последующие после (11) выводы основаны на удержании в (11) второго слева слагаемого, которое необоснованно выбрасывается в учебниках. Тем самым показана роль таких физических величин, как обобщенный импульс, тензор моментов инерции системы зарядов в уравнениях для моментов вообще и, в частности, при непосредственном определении в рамках полуклассической теории диамагнитной восприимчивости вещества. Удержание этого слагаемого в случае $\vec{E} = 0$ приводит к правильному описанию (10) прецессии зарядов с циклотронной частотой (13).

Изложенный материал может быть полезен преподавателям и студентам при изучении классической электродинамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц Теория поля. – М.: Физматлит, 2001. – 533 с.
2. В.Г. Левич Курс теоретической физики. Том 1. – М.: Наука, 1969. – 910 с.
3. М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин Классическая электродинамика. – М.: Наука, 1985. – 399 с.