УДК 539.12

КРИТИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ И ОТСУТСТВИЕ НЕФИЗИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ В ДРЕВЕСНЫХ АМПЛИТУДАХ РАССЕЯНИЯ NSR СТРУН В ТЕНЗОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.Ю. Нурмагамбетов
Институт теоретической физики им. А.И. Ахиезера ННЦ ХФТИ
Академическая 1, 61108, Харьков
e-mail: ajn@kipt.kharkov.ua
Поступила в редакцию 8 февраля 2010 г.

Рассмотрен способ вычисления критической размерности спиновой струны в тензорном пространстве, основанный на применении техники суперсимметричной конформной теории поля (СКТП). Вычислены корреляторы суперполей материи и духовых полей, возникающих при закреплении суперконформной калибровки, а также стандартные операторные разложения тензоров энергии-импульса, приводящие к возникновению суперконформной аномалии. Продемонстрировано сокращение аномального члена в пространствах размерности D=4 и D=5. Показано, что стандартный набор условий, накладываемых на физические состояния спектра модели, приводит к отщеплению нефизических состояний в древесных амплитудах рассеяния бозонного предела NSR струн.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: спиновая струна, тензорное пространство, суперконформая теория поля

CRITICAL DIMENSION AND THE ABSENCE OF NON-PHYSICAL STATES IN TREE AMPLITUDES OF NSR STRINGS IN TENSORIAL SPACE

A.J. Nurmagambetov
A.I. Akhiezer Institute for Theoretical Physics, NSC KIPT
1 Akademicheskaya St., 61108 Kharkov
We consider a method of calculating the critical dimension of a spinning string in tensorial space based on applying the Supersymmetric Conformal Field Theory (SCFT) technique. We calculate correlators of the matter and ghosts superfields under the superconformal gauge fixing, together with the standard energy-momentum tensors OPEs leading to the superconformal anomaly. The anomaly term is absent in spaces of dimensions D=4 and D=5. It is demonstrated that the standard set of conditions on physical states of the spectrum provides the decoupling of non-physical states in trees amplitudes of NSR tensorial strings in the bosonic limit.
KEY WORDS: spinning string, tensorial space, superconformal field theory

КРИТИЧНА РОЗМІРНІСТЬ І ВІДСУТНІСТЬ НЕФІЗИЧНИХ СТАНІВ У ДЕРЕВНИХ АМПЛІТУДАХ РОЗСІЯННЯ NSR СТРУН В ТЕНЗОРНОМУ ПРОСТОРІ

О.Ю. Нурмагамбетов
Інститут теоретичної фізики ім. О.І. Ахієзера ННЦ ХФТІ
вул. Академічна 1, 61108 Харків
Розглянутий спосіб обчислення критичної розмірності спінової струни в тензорному просторі, заснований на застосуванні техніки Суперсиметричної Конформної Теорії Поля (СКТП). Обчислені корелятори суперполів матерії і духових полів, що виникають при закріпленні суперконформної калібровки, а також стандартні операторні розкладання тензорів енергії-імпульсу, що приводять до виникнення суперконформної аномалії. Продемонстровано скорочення аномального члена в просторах розмірності D=4 і D=5. Показано, що стандартний набір умов, що накладаються на фізичні стани спектру моделі, приводить до відщеплення нефізичних станів у деревних амплітудах розсіяння бозонної межі NSR струн.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: спінова струна, тензорний простір, суперконформна теорія поля

В недавней работе [1] мной была предложена формулировка суперструны Грина-Шварца (GS) в тензорном суперпространстве. Основой для построения функционала действия суперструны данного типа служит наличие в пятимерном плоском пространстве[1] специального тождества Фирца [1,2] для D=5 спиноров

$$(d\bar{\theta}\,\Gamma^{ab}\,d\theta)(d\bar{\theta}\,\Gamma_{ab}\,d\theta)=0\,. \qquad (1)$$

Используя данное тождество, легко восстановить вид топологического слагаемого Весса-Зумино в действии суперструны. Кинетический член действия описывается аналогом действия струны типа Намбу-Гото, а относительный коэффициент между кинетическим и топологическим слагаемыми действия фиксируется (с точностью до знака) требованием инвариантности функционала относительно локальной фермионной симметрии (каппа-симметрии). В окончательном виде предложенный функционал действия имеет следующий вид

[1] Под плоским суперпространством подразумевается как плоское суперпространство с метрикой Минковского в бозонном пределе, так и суперпространство, бозонный сектор которого описывается композитной метрикой, построенной из метрики Минковского (см. выражение (5) ниже).

$$S = S_{кин.} + S_{топ.} = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\xi\left(\sqrt{-\det h_{\mu\nu}} + i\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\mu z^{ab}(\bar\theta\Gamma_{ab}\partial_\nu\theta)\right), \qquad (2)$$

и является инвариантным как относительно преобразований глобальной «суперсимметрии» с параметром ε

$$\delta z^{ab} = -i\bar\theta\Gamma^{ab}\varepsilon\,, \quad \delta\theta = \varepsilon\,, \qquad (3)$$

так и преобразований локальной фермионной симметрии со спинорным параметром κ^μ [2]

$$\delta z^{ab} = +i\bar\theta\Gamma^{ab}(\omega_\mu^{cd}\Gamma_{cd}P_+^{\mu\nu}\kappa_\nu)\,, \quad \delta\theta = \omega_\mu^{ab}\Gamma_{ab}P_+^{\mu\nu}\kappa_\nu\,. \qquad (4)$$

Тождество (1) является ключевым для доказательства инвариантности действия (2) относительно преобразований (3) и (4).

Используемые в (2)–(4) обозначения являются стандартными; в частности, h обозначает детерминант симметричной 2×2 матрицы индуцированной метрики

$$h_{\mu\nu} = \omega_\mu^{ab}\omega_\nu^{cd}G_{ab|cd}\,,$$

построенной из образа (pullback) ω_μ^{ab} пространственно-временной явно инвариантной относительно (3) один-формы $\omega^{ab} = dz^{ab} - i\bar\theta\Gamma^{ab}d\theta$ на мировой лист струны. $G_{ab|cd}$ является аналогом метрического тензора в пространстве, параметризуемом тензорными координатами $z^{ab} = -z^{ba}$,

$$G_{ab|cd} = \frac{1}{2}\left(\eta_{ac}\eta_{bd} - \eta_{ad}\eta_{bc}\right). \qquad (5)$$

В преобразования каппа-симметрии входит один из проекционный операторов, стандартно используемых при доказательстве каппа-инвариантности действия суперструны Грина-Шварца,

$$P_\pm^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h^{\mu\nu} \pm \frac{1}{\sqrt{h}}\varepsilon^{\mu\nu}\right),$$

в который, помимо обратной индуцированной метрики $h^{\mu\nu}$, входит и двумерный единичный антисимметричный тензор Леви-Чивита $\varepsilon^{\mu\nu}$. Из явного вида «метрики» $G_{ab|cd}$ следует, что она обладает следующими свойствами

$$G_{ab|cd} = -G_{ba|cd} = -G_{ab|dc} = G_{cd|ab}\,, \quad G_{a[b|cd]} = 0\,.$$

Последнее соотношение оказывается решающим при доказательстве каппа-инвариантности действия (2).

Отметим, что наличие функционала действия для протяженного объекта в выделенной размерности пространства-времени не является гарантией того, что рассматриваемый объект будет обладать хорошо определенными квантовыми свойствами. Процедура квантования может сопровождаться возникновением квантовых аномалий, чье присутствие является недопустимым в корректно сформулированной квантовой теории. В качестве хорошо известного примера можно привести стандартную суперструну Грина-Шварца, классическое действие для которой существует в пространстве-времени размерности D=3,4,6 и 10, и только лишь последняя размерность, D=10, является ее критической размерностью, в которой отсутствуют квантовые аномалии [3,4]. Поэтому особую важность приобретает вопрос о вычислении критической размерности рассматриваемого в данной работе объекта.

Другим не менее важным свойством любой корректно сформулированной теории является отщепление состояний с отрицательной нормой из квантовых амплитуд рассеяния. Как правило, в теориях с пространственно-временной метрикой Минковского, фоковское пространство операторов рождения и уничтожения квантовых полей является индефинитным, т.е. включающим в себя состояния с отрицательной нормой.[3] Этот факт должен быть учтен при построении согласованной теории путем привлечения дополнительных условий, вырезающих сектор духовых состояний с отрицательной нормой. Примером таких условий является выбор специальных калибровок (Кулоновская калибровка в электродинамике, калибровка светового конуса в теории струны), нарушающих Лоренц-инвариантность, но позволяющих явно выделить сектор мод, образующих состояния с положительно-определенной нормой, либо использование ковариантных калибровок (калибровка Лоренца в электродинамике) с последующим использованием дополнительных условий (условия Гупты-Блеера в электродинамике, условия Вирасоро в теории струны), вырезающих сектор духовых полей [5]. Целью настоящей работы является определение критической размерности предложенной формулировки суперструны, а также доказательство отсутствия вклада нефизических состояний в древесные амплитуды рассеяния в ее бозонном пределе.

Следует отметить, что расчет критической размерности суперструны Грина-Шварца ранее проводился

[2] В принятых обозначениях $\mu,\nu = 0,1$ являются мировыми векторными индексами на двумерной поверхности струны, индексы $a,b,c,d = 0,\ldots,4$ – векторные индексы плоского пятимерного пространства.

[3] Современное изложение данного вопроса в контексте теории струн может быть найдено в монографии [5].

только в калибровке светового конуса [4,6]. Вычисление критической размерности в ковариантном формализме, с применением техники BRST-BFV подхода [7 - 10], затруднено в силу ряда препятствий, возникающих при ковариантном квантовании суперструны. Одним из таких препятствий является бесконечная приводимость локальной фермионной симметрии [3], играющей важную роль для обеспечения равенства бозонных и фермионных степеней свободы суперструны Грина-Шварца на массовой оболочке. Рассматриваемая здесь модель суперструны также страдает этим недостатком, поскольку, в силу $G_{a[b|cd]}=0$ и стандартных свойств гамма-матриц, нетрудно показать, что параметр преобразований каппа-симметрии может быть представлен в виде

$$\kappa_\mu=\kappa_\mu^{(0)}+\omega_\rho^{bc}\Gamma_{bc}P_{-\mu}^{\rho}\left(\kappa^{(1)}+\omega_\lambda^{de}\Gamma_{de}P_{+\mu}^{\lambda}\left[\kappa^{(2)}+\ldots\right]\right),$$

что и является определением бесконечной приводимости локальной фермионной симметрии [11]. Поэтому ковариантный подход не является оптимальным для вычисления критической размерности тензорной суперструны, а использование нековариантной калибровки типа калибровки светового конуса также не представляется возможным в силу отсутствия ее прямого аналога в применении к рассматриваемой ситуации. Выход может быть найден за счет обращения к другой формулировке описываемой здесь модели – так называемой спиновой струне или суперструне Невье-Шварца-Рамона (NSR) [12, 13]. Напомним, что существует тесная связь между двумя различными подходами в описании теории суперструны: квантовый спектр NSR и GS суперструн, после применения специальной проекции Глиоцци-Шерка-Олайва (GSO) в спектре NSR [14], становится идентичным, что позволяет однозначно говорить о том, что и другие квантовые свойства этих объектов находятся в однозначном соответствии. В частности, критическая размерность двух формулировок, с явной пространственно-временной суперсимметрией (GS), и суперсимметрией на мировом листе струны (NSR), в точности совпадает. Поэтому в дальнейшем я акцентирую внимание на вычисления критической размерности аналога спиновой струны Невье-Шварца-Рамона, соответствующего модели тензорной суперструны с действием (2).

Статья организована следующим образом. В последующих разделах сначала рассматривается модель спиновой струны в пространстве с координатами тензорного типа и вычисляется ее критическая размерность. Далее, в работе обсуждается достаточность условий Вирасоро в бозонном пределе тензорной суперструны для отщепления нефизических духовых состояний в древесных амплитудах рассеяния открытых и замкнутых струн. В заключительном разделе работы дан анализ полученных результатов и дальнейших шагов в развитие модели.

КРИТИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ТЕНЗОРНОЙ СПИНОВОЙ СТРУНЫ

Для нахождения критической размерности тензорной струны в формализме Невье-Шварца-Рамона, в качестве первого шага построим действие NSR струны в тензорном пространстве произвольной размерности. С этой целью удобно перейти от пространства Минковского к евклидову пространству, в котором мировой лист спиновой тензорной струны описывается двумерной суперконформной теорией поля [15 - 17], состоящей из суперполя материи $Z^{ab}=-Z^{ba}$, $a,b=1,\ldots D$, определяющего вложение мировой поверхности в D-мерное евклидово пространство (target space), а также суперполей гостов[4] B и C, возникающих при закреплении суперконформной калибровки на мировом листе струны. Действие для суперполя материи имеет следующий вид

$$S_{мат.}=\frac{1}{2\pi}\int d^2z\,d^2\eta\,\overline{D}Z^{ab}DZ_{ab}\ . \tag{6}$$

$Z^{ab}(z,\bar z)$ зависит от комплексных координат мирового листа струны $z=\sigma+i\tau$, $\bar z=\sigma-i\tau$, причем эти координаты предполагаются независимыми. В определение z и $\bar z$ входят оригинальные координаты (τ,σ), параметризующие мировой лист струны, а переход к комплексным координатам является аналогом перехода к координатам двумерного светового конуса в переменных (τ,σ). Материальное суперполе также зависит от Грассмановых координат η, $\overline{\eta}$ на мировом листе струны, параметризующих совместно с $(z,\bar z)$ суперпространство мирового листа. В компонентном представлении

$$Z^{ab}(z,\bar z)=z^{ab}+\eta\psi^{ab}+\overline{\eta}\,\overline{\psi}^{ab}+\overline{\eta}\eta F^{ab}.$$

Действуя на суперполе $Z^{ab}(z,\bar z)$ суперковариантными производными

$$D=\frac{\partial}{\partial\eta}+\eta\partial,\qquad \overline{D}=\frac{\partial}{\partial\overline{\eta}}+\overline{\eta}\,\overline{\partial},\quad \left(\partial\equiv\frac{\partial}{\partial z}\quad \overline{\partial}\equiv\frac{\partial}{\partial\bar z}\ \right),$$

после интегрирования по Грассмановым переменным и отбрасывания вспомогательного поля F^{ab}, получим

[4] Употребление термина «госты» позволяет избежать путаницы в определении духовых полей. Под термином «духовое поле» понимается нефизическое состояние с отрицательно-определенной нормой.

компонентное действие струны типа NSR с координатами тензорного типа в суперконформной калибровке

$$S = \frac{1}{2\pi}\int d^2 z\left(\partial z^{ab}\bar{\partial} z_{ab} - \psi^{ab}\bar{\partial}\psi_{ab} - \bar{\psi}^{ab}\partial\bar{\psi}_{ab}\right). \quad (7)$$

Суммирование по векторным индексам в (6) и (7) осуществляется с помощью евклидового аналога метрики (5), т.е.

$$f^{ab} f_{ab} = f^{ab}\tilde{G}_{ab|cd} f^{cd}, \qquad \tilde{G}_{ab|cd} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}\right).$$

Из компонентного действия (7) становится ясно, что, в силу уравнений движения $\bar{\partial}\psi^{ab} = 0$, $\partial\bar{\psi}^{ab} = 0$, $\bar{\partial}\partial z^{ab} = 0$, поля ψ^{ab} и $\bar{\psi}^{ab}$ являются, соответственно, голоморфными и анти-голоморфными полями $\psi^{ab}(z)$ и $\bar{\psi}^{ab}(\bar{z})$, а поле z^{ab} представляет суперпозицию голоморфного и анти-голоморфного поля $z^{ab}(z,\bar{z}) = z^{ab}{}_R(z) + z^{ab}{}_L(\bar{z})$. Как следствие, материальное суперполе представляет суперпозицию голоморфного и анти-голоморфного суперполей $Z^{ab}(z,\bar{z}) = Z^{ab}{}_R(z) + Z^{ab}{}_L(\bar{z})$ и физические степени свободы описываются суперполями

$$Z^{ab}{}_R(z) = z^{ab}{}_R(z) + \eta\psi^{ab}(z), \qquad Z^{ab}{}_L(\bar{z}) = z^{ab}{}_L(\bar{z}) + \bar{\eta}\,\bar{\psi}^{ab}(\bar{z}).$$

Поэтому голоморфный и анти-голоморфный секторы модели могут рассматриваться независимо. В дальнейшем сфокусируем внимание на голоморфном секторе.

Голоморфный сектор гостов описывается действием [15 - 17]

$$S_{гост.} = \frac{1}{\pi}\int d^2 z\, d^2\eta\, B\,\bar{D}C,$$

с $B(z) = \beta(z) + \eta b(z)$ и $C(z) = c(z) + \eta\gamma(z)$. В компонентой форме действие гостов сводится к [5]

$$S_{гост.} = \frac{1}{\pi}\int d^2 z\,\left(b\bar{\partial}c + \beta\bar{\partial}\gamma\right).$$

Используя хорошо известные тождества $\partial\bar{\partial}\ln|z|^2 = \pi\delta^{(2)}(z)$ и $\bar{\partial}z^{-1} = \pi\delta^{(2)}(z)$, легко получить двух-точечные функции полей [15 - 17]. В суперполевых обозначениях двух-точечные функции выглядят как

$$Z^{ab}(z_1)Z^{cd}(z_2) \propto -g^{ab|cd}\ln z_{12}, \quad B(z_1)C(z_2) \propto \eta_{12}\, z_{12}{}^{-1} \propto C(z_1)B(z_2), \quad (7)$$

где $z_{12} = z_1 - z_2 - \eta_1\eta_2$ и $\eta_{12} = \eta_1 - \eta_2$. Строго говоря, выражения (7) включают в себя дополнительные, регулярные части разложения по голоморфным суперкоординатам. Однако компактность подхода суперконформной теории поля (СКТП) по сравнению с другими методами вычислений (например, со стандартным операторным методом квантования) состоит в том, что вся необходимая информация о поведении операторов в близких точках, а как следствие и явный вид аномальных, или центральных, членов операторной алгебры, заключена в нерегулярной части операторных разложений. Поэтому использование символа $\propto$ свидетельствует об удержании только нерегулярных членов разложения. Разлагая корреляторы (7) по степеням η и используя явные выражения для суперполей Z^{ab}, B и C, можно легко восстановить двух-точечные функции для компонентных полей, однако в этом нет никакой необходимости. Отметим, что тензор $g^{ab|cd}$, входящий в определение (7), определяется из соотношения

$$\tilde{G}_{ab|cd}\, g^{ab|cd} = \frac{1}{2}D\left(D-1\right),$$

и является согласованным с алгеброй операторов рождения-уничтожения мод возбуждений тензорной струны [2].

Тензоры энергии импульса полей модели определятся следующим образом в терминах суперполей

$$T_{мат.} = -\frac{1}{2}DZ^{ab}\partial Z_{ab},$$

$$T_{гост.} = -C\partial B + \frac{1}{2}DCDB - \frac{3}{2}\partial C\,B.$$

Отметим, что тензор энергии-импульса играет в СКТП ключевую роль. С помощью вычисления операторного разложения произвольного поля с тензором энергии-импульса легко определить как характер поля (примарное, квази-примарное), так и его конформый вес. Операторное разложение двух тензоров энергии-импульса полей в различных, но близких точках, позволяет вычислить как алгебру операторов Вирасоро, являющихся

---

[5] Нужно отметить, что поля гостов не являются скалярными относительно двумерных диффеоморфизмов полями. Восстанавливая индексы, имеем $b_{z\bar{z}}$, $\beta_{z\bar{z}}$, c^z и γ^z. Следует также помнить, что (b,c) система подчиняется ферми-статистике, (β,γ) – статистике бозе.

коэффициентами разложения тензора энергии-импульса в ряд Лорана, так и определить значение центральных членов алгебры Вирасоро, являющихся показателем наличия квантовой аномалии.

Исходя из определения тензоров энергии-импульса, операторные TT разложения вычисляются с использованием 2-точечных функций (7) и очевидных соотношений $D_1 z_{12} = \eta_{12} = D_2 z_{12}$, $D_1\eta_{12} = 1 = -D_2\eta_{12}$. При этом, интересующей нас величиной являются центральные члены, значения которых определяются двойными свертками. В явном виде

$$T_{мат.}(z_1)T_{мат.}(z_2) \propto \frac{1}{4}(\left\langle D_1 Z^{ab}\, D_2 Z^{cd}\right\rangle\left\langle\partial_1 Z_{ab}\partial_2 Z_{cd}\right\rangle + \left\langle D_1 Z^{ab}\,\partial_2 Z^{cd}\right\rangle\left\langle\partial_1 Z_{ab} D_2 Z_{cd}\right\rangle),$$

$$T_{гост.}(z_1)T_{гост.}(z_2) \propto \frac{1}{2}\left\langle C_1 D_2 B\right\rangle\left\langle\partial_1 B D_2 C\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle D_1 C\partial_2 B\right\rangle\left\langle D_1 B\, C_2\right\rangle - \frac{3}{4}\left\langle D_1 C\, B_2\right\rangle\left\langle D_1 B\partial_2 C\right\rangle + \frac{3}{4}\left\langle\partial_1 C D_2 B\right\rangle\left\langle B_1 D_2 C\right\rangle.$$

Из этих соотношений следует, что

$$\left\langle T_1 T_2\right\rangle_{мат.} \propto \frac{1}{2}D(D-1)\frac{1}{4z_{12}^3}\ ,\quad \left\langle T_1 T_2\right\rangle_{гост.} \propto -\frac{5}{2z_{12}^3}.$$

Поэтому условием отсутствия аномалии является выражение вида

$$\frac{3}{4}D(D-1) = +15,$$

из которого следует, что критической размерностью рассматриваемой здесь модели является размерность пространства-времени D=5. Точнее, данная размерность является критической размерностью открытой струны NSR-типа. В случае замкнутой струны, степени свободы которой описываются суммой голоморфных и анти-голоморфную секторов полей открытой струны, аналогичные вычисления приводят к такому же значению критической размерности.

ОТЩЕПЛЕНИЕ НЕФИЗИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ В ДРЕВЕСНЫХ АМПЛИТУДАХ РАССЕЯНИЯ ТЕНЗОРНОЙ СТРУНЫ

Выше уже отмечалось, что для корректной формулировки теории необходимо быть уверенным в том, что нефизические духовые состояния отщепляются от физических состояний в амплитудах рассеяния, и тем самым не вносят нетривиального вклада в конечную амплитуду. Покажем, что в бозонном пределе рассматриваемой здесь модели струны реализуется тот же самый механизм отщепления нефизических состояний [18, 21], характерный для бозонной струны в ее стандартной формулировке.

Введем для начала понятие физического состояния. Физическим мы будем называть такое состояние $\left|\lambda\right\rangle$, которое является полюсом в дуальной амплитуде, и которое не является ортогональным к другим физическим состояниям. Первое требование является аналогом условия массовой поверхности в Теории Поля, второе условие гарантирует наличие в теории нетривиальных процессов взаимодействия.

Общее выражение для древесной амплитуды рассеяния (N-хвостки) открытой струны имеет следующий вид [19 - 22]

$$A(k_1, \ldots, k_N) = \left\langle 0; k_N\left|V(k_{N-1},1)D(p)V(k_{N-2},1)D(p)\ldots D(p)V(k_2,1)\right|0; k_1\right\rangle. \tag{8}$$

Здесь k_i, $i = 1,\ldots,N$ – импульсы физических состояний, $V(k_j,1)$ – вершинные операторы, отвечающие за испускание струной физического состояния с импульсом k_j, $j = 2,\ldots,N-1$, и $D(p)$ является аналогом пропагатора промежуточных состояний. Несущественный для дальнейшего рассмотрения параметр константы взаимодействия в вершине выбран равным единицы. В такой форме древесная амплитуда рассеяния теории струн максимально близка к N-точечной древесной амплитуде рассеяния квантовой теории поля.[6]

В максимально общем виде вершинный оператор является функцией комплексных переменных z и $\bar{z}$, $V(k_j, z, \bar{z})$, что соответствует амплитудам рассеяния замкнутых струн. Для открытых струн оператор вершины является голоморфной функцией. Отметим, что в выражение (8) входят вершинные операторы в точке $z = 1$, связанные с вершинными операторами в произвольной точке комплексной полуплоскости переменной z преобразованием

$$V(k,z) = z^{L_0}\, V(k,1)\, z^{-L_0},$$

где L_0 – оператор Гамильтона в квантовой теории струны, явный вид которого в терминах квантовых осцилляторов мод возбуждений [2]

[6] Очевидно, что пропагаторы $D(p)$, входящие в (8) зависят от *разных* значений импульсов, определяемых кинематикой процесса. Однако, вне зависимости от конкретного значения p , все промежуточные состояния удовлетворяют универсальному условию массовой оболочки (10) . Точное выражение для амплитуды (8) с учетом кинематики N-хвостки может быть найдено в [19].

$$L_0 - 1 = -\frac{1}{2}p^2 + \sum_1^\infty \alpha_{-n}^{ab}\,\alpha_n^{ab} - 1\,. \tag{9}$$

Пропагатор является обратным к (9) оператором, $D(p) = (L_0 - 1)^{-1}$, поэтому полюсами дуальной амплитуды рассеяния являются состояния вида

$$(L_0 - 1)|\lambda\rangle = 0\ . \tag{10}$$

Из определения физических состояний ясно, что они должны удовлетворять условию (10). Однако, следует отметить, что (10) является лишь частью условий, накладываемых на физические состояния. Полный набор условий дополнительно включает соотношения вида [18, 2]

$$L_n|\lambda\rangle = 0,\quad n > 1\quad,\quad L_n = \frac{1}{2}\sum_{m\neq 0}\alpha_{n-m}^{ab}\,\alpha_m^{ab}\ . \tag{11}$$

Условия (10) и (11) являются аналогом условия массовой оболочки и условия Гупты-Блеера в квантовой электродинамике, вырезающего положительно-частотные моды фотона. Наша задача – показать, что (10) и (11) являются достаточным набором, которому должны удовлетворять физические состояния.

В дальнейших рассуждениях я буду следовать логике работы [20]. Предположим, что физическое состояние $|\lambda\rangle = L_0|\lambda\rangle$ не является фундаментальным состоянием (более точно, не является представлением алгебры Вирасоро с максимальным весом), т.е. может быть представлено в виде $|\lambda\rangle = L_{-n}|\chi\rangle$, где $n > 0$ и $|\chi\rangle$ – некоторое другое физическое состояние. Из такого представления немедленно следует, что $L_0 L_{-n}|\chi\rangle = L_{-n}|\chi\rangle$. Используя следствие алгебры Вирасоро $[L_0, L_{-n}]|\chi\rangle = nL_{-n}|\chi\rangle$, нетрудно показать, что $L_{-n}(L_0 + n - 1)|\chi\rangle = 0$, поэтому состояния вида $(L_0 + n - 1)|\chi\rangle$ являются ядром оператора L_{-n}. Примем для простоты, что $(L_0 + n - 1)|\chi\rangle = 0$.[7]

Если состояние $|\lambda\rangle$ является физическим, то амплитуда рассеяния для такого начального состояния отлична от нуля,

$$\langle\lambda|V(k_{N-1},1)D(p)V(k_{N-2},1)D(p)\ldots D(p)V(k_2,1)|0;k_1\rangle \neq 0\,.$$

С учетом вышеупомянутых предположений, такая амплитуда может быть представлена в виде

$$\langle\lambda|(L_n - L_0 - n + 1)V(k_{N-1},1)D(p)V(k_{N-2},1)D(p)\ldots D(p)V(k_2,1)|0;k_1\rangle \neq 0\,.$$

Докажем, что такая амплитуда обращается в ноль, и следовательно физическое состояние, удовлетворяющее условию массовой оболочки (10), является представлением алгебры Вирасоро с максимальным весом.

С этой целью заметим, что для любого оператора, преобразующегося при замене комплексных координат как

$$t(z') = \left(\frac{dz'}{dz}\right)^h t(z)\,, \tag{12}$$

его коммутатор с операторами Вирасоро выглядит следующим образом [15 - 17]

$$[L_m, t(z)] = z^m\left(z\frac{\partial}{\partial z} + h(m+1)\right)t(z)\,. \tag{13}$$

Целочисленный параметр h называется конформным весом, а преобразования вида (12) являются определением примарных операторов веса h, играющих ключевую роль в конформной теории поля. Используя (13), легко увидеть, что

$$(L_m - L_0 - hm + 1)\,t(1) = t(1)\,(L_m - L_0 + 1), \tag{14}$$

откуда становится очевидно, что для оператора конформной размерности единица

$$\langle\lambda|(L_n - L_0 - n + 1)V(k_{N-1},1)DV(k_{N-2},1)D\ldots DV(k_2,1)|0;k_1\rangle = \langle\lambda|V(k_{N-1},1)(L_n - L_0 + 1)DV(k_{N-2},1)D\ldots DV(k_2,1)|0;k_1\rangle$$

Далее, используя $[L_0, L_{-n}] = nL_{-n}$, легко убедиться в наличии следующего соотношения

$$(L_n - L_0 + 1)\frac{1}{L_0 - 1} = \frac{1}{L_0 + n - 1}(L_n - L_0 - n + 1)\,.$$

Таким образом, только при условии равенства конформной размерности вершинного оператора единице, оператор $(L_n - L_0 - n + 1)$ воспроизводится при протаскивании через произведение вершинного оператора и пропагатора слева направо. Окончательное выражение для амплитуды рассеяния приобретает следующий вид

$$\langle\chi|\ldots(L_n - L_0 + 1)|0;k_1\rangle,$$

[7] Состояния такого типа называются шпурионными состояниями [21,22].

и оно равно нулю в силу соотношений (10), (11). Следовательно, условия (10), (11) являются достаточными для выделения физических состояний, и при этих условиях вклад нефизических шпурионных состояний в древесные амплитуды рассеяния открытых струн равен нулю.

Аналогичные рассуждения могут быть использованы для доказательства отщепления нефизических шпурионных состояний в древесных амплитудах замкнутых струн. В этом случае аналогом выражения (8) является [22]

$$A(k_1, \ldots, k_N) = \langle 0; k_N | \, \mathrm{P} \, [V(k_{N-1}, 1, 1)\Delta(p)V(k_{N-2}, 1, 1)\Delta(p)\ldots\Delta(p)V(k_2, 1, 1)] | 0; k_1 \rangle , \tag{15}$$

где P – оператор всевозможных перестановок вершин, а сами вершинные операторы являются функциями координат z, $\bar{z}$. Как и для случая открытых струн, в (15) входят вершинные операторы в фиксированной точке комплексной плоскости. Явным выражением для пропагатора является $\Delta(p) = (L_0 + \bar{L}_0 - 2)^{-1} \delta(L_0 - \bar{L}_0)$, где L_0 определяется соотношением (9), а $\bar{L}_0$ аналогичным (9) выражением, в котором «правые» осцилляторные моды α_n^{ab} заменяются соответствующими им «левыми» осцилляторами $\bar{\alpha}_n^{ab}$. Используя независимость правого и левого секторов замкнутой струны и следуя логике рассуждений для случая открытых струн, легко продемонстрировать, что физические состояния замкнутой струны определяются связями

$$\begin{gathered} (L_0 - 1)|\lambda\rangle = 0 \ , \quad (\bar{L}_0 - 1)|\lambda\rangle = 0 \ , \\ L_n|\lambda\rangle = 0 \, , \quad \bar{L}_n|\lambda\rangle = 0, \ \ n > 1 \ , \\ (L_0 - \bar{L}_0)|\lambda\rangle = 0 \ , \end{gathered} \tag{16}$$

обобщающими связи (10), (11) для открытых струн, а шпурионные состояния не вносят вклада в древесные амплитуды рассеяния замкнутых струн. Ключевыми соотношениями для вывода данного результата являются соотношения типа (14) для вершинных операторов конформной размерности единица (аналогично и для $L_0 \to \bar{L}_0$), а также

$$\begin{gathered} (L_n - L_0 + 1)\frac{1}{L_0 + \bar{L}_0 - 2} = \frac{1}{L_0 + \bar{L}_0 + 2n - 2}(L_n - L_0 - n + 1), \\ (\bar{L}_n - \bar{L}_0 + 1)\frac{1}{L_0 + \bar{L}_0 - 2} = \frac{1}{L_0 + \bar{L}_0 + 2n - 2}(\bar{L}_n - \bar{L}_0 - n + 1) \end{gathered}$$

с учетом дополнительной связи $L_0 = \bar{L}_0$.

ВЫВОДЫ

Остановимся на обсуждении полученных результатов. В работе построен функционал действия спиновой струны Невье-Шварца-Рамона с координатами тензорного типа в суперконформной калибровке и вычислена ее критическая размерность. Найденное значение соответствует размерности пространства D=5, что является непрямым аргументом в пользу существования свободной от аномалий теории струны типа Грина-Шварца, описываемой действием (2), при том же самом значении D. Отметим, что более веским аргументом в пользу совпадения критических размерностей двух различных формулировок струн с координатами тензорного типа является совпадение их квантовых спектров, и предварительный анализ спектров рассматриваемых здесь моделей на уровне безмассовых мод подтверждает это предположение. Также заметим, что разбиение тензорных координат Z^{ab} на векторные координаты четырехмерного пространства-времени X^A и тензорные координаты $Z^{AB} = -Z^{BA}$ приводит к модели струны Грина-Шварца, рассмотренной в [23]. Анализ критической размерности ее NSR аналога [24] демонстрирует отсутствие квантовых аномалий в реалистичной размерности пространства-времени D=4, что является несомненным достоинством предложенной модели. Результат работы [24] может быть легко воспроизведен методами СКТП, рассмотренными выше, с учетом отсутствия в действии D=4 тензорной струны NSR типа слагаемых, одновременно содержащих как стандартные векторные координаты, так и дополнительные координаты тензорного типа. Условием отсутствия аномалий является выражение

$$\frac{3}{4}D(D+1) = +15 \, ,$$

из которого с очевидностью следует, что D=4.

Другим принципиальным моментом для существования последовательной формулировки струны в тензорном пространстве является отщепление нефизических степеней свободы в струнных амплитудах рассеяния. Наличие такого результата принципиально зависит от выбора ограничений на физические состояния модели. Оказывается, что стандартные условия (10) и (11), накладываемые на физические состояния квантового спектра струны являются достаточными для отщепления нефизических состояний в древесных амплитудах рассеяния. Однако, нужно иметь в виду, что, во-первых, полученный результат справедлив только для так называемых шпурионных состояний, образующихся в результате действия оператора L_{-n} с $n>0$ на векторы состояний, удовлетворяющих уравнению $(L_0+n-1)|\chi\rangle=0$, и не распространяется на случай, когда само шпурионное состояние является одновременно и физическим состоянием. Последнее условие определяет состояния с нулевой нормой, которые являются ортогональными ко всем физическим состояниям, и играют важную роль в теории струн. В частности, наличие нулевых состояний позволяет реализовать калибровочный принцип на уровне векторов состояний, поскольку физические состояния $|\lambda\rangle$ и $|\lambda\rangle+|null\rangle$ являются неотличимыми. Во-вторых, приведенное доказательство отщепления нефизических мод реализуется только для диаграмм древесного типа, и требует дополнительной модификации при рассмотрении петлевых амплитуд рассеяния теории струн.

Тем не менее, демонстрация отщепления нефизических шпурионных состояний в древесных амплитудах рассеяния является первым шагом при доказательстве теоремы об отсутствии духовых состояний в теории струн. Тот факт, что для реализации такого отщепления достаточными «калибровочными» условиями являются условия (10), (11) является вполне ожидаемым, поскольку рассматриваемая модель струны структурно близка к стандартной формулировке, и сохраняет ключевые свойства последней, такие, например, как наличие бесконечномерной (супер)конформной алгебры, реализуемой на операторах Вирасоро. Однако, существуют и более тонкие отличия в структуре сектора духовых полей рассматриваемой здесь модели, связанные с композитным характером метрики (5). Строго говоря, сигнатура метрики $G_{ab|cd}$ эффективно включает в себя четыре, а не одну, временно-подобные координаты, и, следовательно, фоковское пространство состояний с отрицательной нормой имеет более сложную, по сравнению со стандартной моделью струны, структуру. Детальное исследование духовых состояний и формулировка аналога теоремы об отсутствии духов в модели тензорной (супер)струны будет проведено в последующих публикациях.

Автор выражает искреннюю благодарность И.А. Бандосу и Д.П. Сорокину за обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нурмагамбетов А.Ю. Локальная фермионная симметрия суперструны Грина-Шварца в тензорном суперпространстве // Вісник ХНУ, серія фізична «Ядра, частинки, поля». – 2009. – № 845. – С. 21-24.
2. Nurmagambetov A.J. Quantum-consistent superstring models in four dimensional space-time // ВАНТ.–2009.– №5.– С. 3-11.
3. Green M.B., Schwarz J.H. and Witten E. Superstring theory.–Cambridge: Cambridge University Press, 1987. - Vol.1.– P. 470.
4. Green M.B., Schwarz J.H. Supersymmetrical dual string theory // Nucl. Phys.–1981.– Vol. B181.– P. 502-530.
5. Kaku M. Introduction to superstrings and M-theory.–New York: Springer-Verlag Inc., 1999, 2nd ed.– 585 p.
6. Schwarz J.H. Superstring theory// Phys. Rep.–1982.– Vol. 89.– P. 223-322.
7. Becchi C., Rouet A. and Stora R. Renormalization of gauge theories // Ann. Phys.–1976.– Vol. 98.– P. 287-321.
8. Tyutin I.V. Gauge Invariance in Field Theory and Statistical Physics in Operator Formalism // Preprint LEBEDEV-75-39, 1975, 62pp.; arXiv:0812.0580 [hep-th].
9. Fradkin E.S. and Vilkovisky G.A. Quantization of relativistic systems with constraints // Phys. Lett.–1975.– Vol. B55.– P. 224-226.
10. Batalin I.A. and Vilkovisky G.A. Relativistic S Matrix of Dynamical Systems with Boson and Fermion Constraints // Phys. Lett.–1977.– Vol. B69.– P. 309-312.
11. Sorokin D. Superbranes and superembeddings // Phys. Rep. – 2000. – Vol. 329.– P. 1-101.
12. Deser S. and Zumino B. A. Complete Action for the Spinning String // Phys. Lett.–1976. – Vol. B65. – P. 369-373.
13. Brink L., Di Vecchia P. and Howe P.S. A Locally Supersymmetric and Reparametrization Invariant Action for the Spinning String // Phys. Lett.–1976. – Vol. B65. – P. 471-474.
14. Gliozzi F., Scherk J. and Olive D. Supersymmetry, Supergravity Theories and the Dual Spinor Model // Nucl. Phys.–1977.– Vol. B122.– P. 253-290.
15. Friedan D., Martinec E. and Shenker S. Conformal invariance, supersymmetry and string theory // Nucl. Phys.–1986.– Vol. B271.– P. 93-165.
16. Friedan D. Notes on String Theory and Two Dimensional Conformal Theory // Proc. of the Workshop on Unified String Theories, Santa Barbara, 1985; Preprint Enrico Fermi Institute, Chicago, USA, EFI 85-99, 60 p.
17. Peskin M.E. Introduction to String and Superstring Theory// Preprint Stanford Linear Acceleration Center, Stanford, USA, SLAC-PUB-4251, March 1987, 132 p.
18. Virasoro M.A. Subsidiary conditions and ghosts in dual-resonance models // Phys. Rev.–1970.– Vol. D1.– P. 2933-2936.
19. Thorn C.B. Computing the Kac determinant using dual models technique and more about the No-ghost theorem // Nucl. Phys.–1984.– Vol. B248.– P. 551-569.
20. Gomez C. and Ruiz-Altaba M. From dual amplitudes to non-critical strings: a brief review // Riv. Nuovo Cim.–1993.– Vol. 16.– P. 1-124.
21. Brower R.C. and Thorn C.B. Eliminating spurious states from the dual resonance model // Nucl. Phys.–1971.– Vol. B31.– P. 163-182.
22. Schwarz J.H. Dual resonance theory // Phys. Rep.–1973.– Vol. C8.– P. 269-335.
23. Amorim R. and Barcelos-Neto J. Superstrings with tensor degrees of freedom // Z. Phys. – 1994. – Vol. C64.– P. 345-347.
24. Amorim R. and Barcelos-Neto J. Extensions of string theories // Z. Phys.–1993.– Vol. C58.– P. 513-518.