

УДК 532.6

СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ И АВТОМОДЕЛЬНАЯ ДИНАМИКА ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКИХ СРЕДАХ ПРИ УМЕНЬШЕНИИ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ**Б.В. Борц¹⁾, С.Ф. Скоромная¹⁾, В.И. Ткаченко^{1,2)}**¹⁾ *ННЦ "Харьковский физико-технический институт"**г. Харьков, ул. Академическая, 1, Украина*²⁾ *Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина**г. Харьков, пл. Свободы, 4, Украина**E-mail: tkachenko@kipt.kharkov.ua**Поступила в редакцию 21 марта 2011 г.*

Получена система уравнений, описывающая фазовые превращения первого рода в различных средах с образованием газовых пузырьков. В предложенной системе уравнений учтены конвективные слагаемые в пространстве размеров пузырьков, которые преобразуют кинетическое уравнение для пузырьков в дивергентную форму с добавлением слагаемого, пропорционального функции распределения пузырьков в жидкости. Исследованы стационарные состояния газовых пузырьков в жидкости и их автомодельная динамика при уменьшении во времени по степенному закону внешнего давления.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: фазовый переход первого рода, газовые пузырьки, конвективные слагаемые, равновесное состояние газовых пузырьков, автомодельная динамика.

STATIONARY STATES AND SELF-SIMILAR DYNAMICS OF GAS BUBBLES IN LIQUID MEDIA AT REDUCING THE EXTERNAL PRESSURE**B.V. Borts¹⁾, S.F. Skoromnaya¹⁾, V.I. Tkachenko^{1,2)}**¹⁾ *National Science Center "Kharkiv Institute of Physics and Technology"**1, Akademicheskaya St., Kharkov, Ukraine*²⁾ *V.N. Karazin Kharkiv National University**4, Svobody Sq., Kharkov, Ukraine*

A system of equations describing the first-order phase transitions in various media with the formation of gas bubbles is obtained. The convective terms in the space of bubble size, which convert the kinetic equation for the bubbles in a divergence form, with the addition of term proportional to the bubbles distribution function in a liquid is taken into account in the proposed system of equations. The steady state of the gas bubbles in the liquid and its self-similar dynamics at a time-decreasing external pressure under the power law is investigated.

KEYWORDS: phase transition, gas bubbles, convection terms, the equilibrium state of gas bubbles, self-similar dynamics.

СТАЦІОНАРНІ СТАНИ ТА АВТОМОДЕЛЬНА ДИНАМІКА ГАЗОВИХ ПУХИРЦІВ В РІДКИХ СЕРЕДОВИЩАХ ПРИ ЗМЕНШЕННІ ЗОВНІШНЬОГО ТИСКУ**Б.В. Борц¹⁾, С.Ф. Скоромна¹⁾, В.І. Ткаченко^{1,2)}**¹⁾ *ННЦ "Харківський фізико-технічний інститут"**м. Харків, вул. Академічна, 1, Україна*²⁾ *Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна**м. Харків, м. Свободи, 4, Україна*

Отримано систему рівнянь, що описує фазові перетворення першого роду в різних середовищах з утворенням газових пухирців. У запропонованій системі рівнянь враховані конвективні доданки в просторі розмірів пухирців, які перетворюють кінетичне рівняння для пухирців у дивергентну форму з додаванням доданка, пропорційного функції розподілу пухирців у рідині. Досліджено стаціонарні стани газових пухирців у рідині і їх автомодельна динаміка при зменшенні в часі за степеневим законом зовнішнього тиску.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: фазовий перехід першого роду, газові пухирці, конвективні доданки, рівноважний стан газових пухирців, автомодельна динаміка.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследование стационарных состояний и автомодельной динамики газовых пузырьков в жидких средах при уменьшении внешнего давления непосредственно связано с использованием элементов теории фазовых превращений первого рода (превращения, при которых скачкообразно изменяются основные параметры среды, например, плотность, количество газовых пузырьков и т. п.).

Такого рода фазовые превращения имеют место, например, при образовании пор под воздействием внешних факторов в твердых растворах [1-4], при образовании новых, не газообразных фаз в процессах сверхкритической флюидной экстракции [5].

При исследовании фазовых превращений первого рода в жидких средах основное значение приобретает поиск метода получения фундаментальной системы уравнений, описывающей динамику их основных параметров.

Несмотря на большое количество научных статей и монографий, посвященных выводу таких уравнений, в настоящее время все еще продолжают исследования по поиску методов их получения в различных средах: в жидких или в твердых растворах (см., например, [1 - 4]) и библиографию к ним).

В простейшем случае, исследованию подлежит динамика переходов газа из одной фазы (растворенный в жидкости газ) в другую фазу (газ в пузырьке в жидкости). Как следует из цитированной литературы [1 - 4], уравнения, описывающие такие фазовые превращения первого рода, содержат коэффициенты, которые выражаются через параметры жидкости и растворенного в ней газа. Вид этих коэффициентов определен ранее и они могут быть использованы для построения фундаментальной системы уравнений, описывающей изменение во времени основных параметров пузырьков газа, растворенных в жидкости.

Однако, в полученных в [1 - 4] кинетических уравнениях оказались неучтенными конвективные слагаемые, которые описывают динамику газовых пузырьков в пространстве размеров пузырьков.

Основной целью настоящей работы является получение системы уравнений для описания фазовых превращений первого рода в жидких средах с образованием газовых пузырьков при учете конвективных процессов в пространстве размеров пузырьков. Немаловажной целью данной работы является также использование полученной системы уравнений для описания стационарных состояний газовых пузырьков в жидкости, а также анализа их автомодельной динамики при уменьшении во времени внешнего давления.

ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ

Будем считать, что распределение газовых пузырьков в вязких жидкостях и расплавах в данный момент времени t определяется функцией распределения $f(\vec{r}(t), \vec{v}(t), V(t), N(t), t)$ в которой переменными являются: $\vec{r}(t)$ и $\vec{v}(t)$ - соответственно координата и скорость пузырька, соотнесенные с его геометрическим центром; $V(t)$ - объем пузырька с координатой $\vec{r}(t)$ и скоростью $\vec{v}(t)$; $N(t)$ - число атомов газа в нем.

При получении уравнения, описывающего динамику функции распределения пузырьков в пространстве восьми переменных $\{\vec{r}(t), \vec{v}(t), V(t), N(t)\}$ и во времени t , удобно ввести безразмерное число $N_1(t) = V(t)/V_0$, где

V_0 - изменение объема пузырька за время δt , причем полагаем δt настолько малым, что при изменении объема на V_0 число атомов газа изменяется на единицу. За этот же промежуток времени δt координата центра пузырька $\vec{r}(t)$ сместится на малую величину $\delta \vec{r}_0$ с модулем $3 \cdot V_0^{1/3} / 4\pi$ и скорость изменится на малую величину $\delta \vec{v}(t) = \delta \vec{r}_0 / \delta t$ с модулем $3 \cdot V_0^{1/3} / (4\pi \cdot \delta t)$.

Необходимо отметить, что с введением числа $N_1(t)$ для функции распределения газовых пузырьков справедливо преобразование подобия:

$$f(\vec{r}(t), \vec{v}(t), V(t), N(t), t) dV = \bar{f}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), N_1(t), N(t), t) dN_1$$

или

$$V_0 \cdot f(\vec{r}(t), \vec{v}(t), V(t), N(t), t) = \bar{f}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), N_1(t), N(t), t).$$

С учетом вышеизложенного, изменение во времени функции распределения $\bar{f}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), N_1(t), N(t), t) \equiv \bar{f}(\vec{Q}_i, N_1(t), N(t), t)$, где: $i = 1, 2$, а набор векторов \vec{Q}_i , который обозначает координату ($i = 1$) и скорость ($i = 2$) центра пузырька соответственно, можно представить в виде [3]:

$$\frac{d\bar{f}}{dt} = -(I_N - I_{N-1}) - (I_{N_1} - I_{N_1-1}) = -\frac{\partial I_N}{\partial N} - \frac{\partial I_{N_1}}{\partial N_1}, \quad (1)$$

где: I_N - поток в пространстве N ; I_{N_1} - поток в пространстве N_1 ;

$$I_N = \mathbf{v}_{N, N+1} \bar{f}(\vec{Q}_i, N_1, N, t) - \mathbf{v}_{N+1, N} \bar{f}(\vec{Q}_i, N_1, N+1, t);$$

$$I_{N_1} = \mathbf{v}_{N_1, N_1+1} \bar{f}(\vec{Q}_i, N_1, N, t) - \mathbf{v}_{N_1+1, N_1} \bar{f}(\vec{Q}_i, N_1+1, N, t); \quad \mathbf{v}_{K, K+1} - \text{частота перехода из состояния } K \text{ в}$$

состояние $K + 1$, где $K = \{N, N_1\}$; $v_{K+1,K}$ - частота обратного перехода из состояния $K + 1$ в состояние K .

В дальнейших выкладках упростим их запись, вводя следующее обозначение $\bar{f}(\bar{Q}_i, N_1 + 1, N, t) \rightarrow f$. В левой части выражения (1), в отличие от [3], записана полная производная по времени от функции распределения \bar{f} . По нашему мнению такую замену необходимо выполнить, т.к. она позволяет учесть в исходном уравнении (1) конвективные слагаемые, пропорциональные $\frac{\partial N}{\partial t}$ и $\frac{\partial V}{\partial t}$.

Следуя работе [3], с учетом вышеизложенного, можно показать, что уравнение (1) преобразуется к уравнению диффузии в пространстве $\{N, V\}$:

$$\frac{df}{dt} = -\frac{\partial I_N}{\partial N} - \frac{\partial I_V}{\partial V}, \quad (2)$$

где:

$$I_N = \frac{dN}{dt} \cdot f(\bar{Q}_i, N_1 + 1, N, t) - D_N \cdot \frac{\partial f(\bar{Q}_i, N_1 + 1, N, t)}{\partial N};$$

$$I_V = \frac{dV}{dt} \cdot f(\bar{Q}_i, N_1 + 1, N, t) - D_V \cdot \frac{\partial f(\bar{Q}_i, N_1 + 1, N, t)}{\partial V};$$

$$\frac{dN}{dt} = -D_N \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{\delta F(V, N)}{\delta N}, \quad D_N = v_{N, N+1} = 4\pi\alpha R^2 \frac{D}{2l} n^L; \quad \frac{\delta F(V, N)}{\delta N} = T \cdot \ln \frac{p^V}{p}$$

$$\frac{dV}{dt} = -D_V \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{\delta F(V, N)}{\delta V}, \quad D_V = v_{N_1, N_1+1} \cdot V_0^2 = \frac{3VT}{4\eta}; \quad \frac{\delta F(V, N)}{\delta V} = p^L - p^V + \frac{2\sigma(R)}{R};$$

$$F(V, N) = V(p^L - p^V) + N(\mu^V - \mu^L) + \int_0^V \frac{2\sigma(R')}{R'} dV'; \quad F(V, N) - \text{разность свободной энергии среды с}$$

пузырьком объема $V = \frac{4\pi}{3} R^3$ и числом атомов N и свободной энергии среды с растворенным газом без

пузырька; T - температура среды; n^L - плотность газа в жидкости; μ^V - химический потенциал атома газа в пузырьке; μ^L - химический потенциал атомов газа в жидкости; p - насыщающее давление газа; p^V - давление газа в пузырьке; p^L - давление в вязкой жидкости; $\sigma(R)$ - коэффициент поверхностного натяжения на границе жидкость - вакуум, который в общем случае может зависеть от радиуса пузырька $R(t)$ (полагаем, что газ в пузырьке не влияет на поверхностное натяжение); η - динамическая вязкость жидкости; $0 \leq \alpha \leq 1$ - коэффициент, учитывающий дополнительный барьер, который может существовать для последнего скачка атома газа в пузырек; D - коэффициент диффузии атомов газа в среде; l - длина элементарного перемещения атома газа в среде.

Правая часть уравнения (2) полностью определена через параметры среды. Однако в левой части стоит полная производная функции распределения пузырьков по времени. Последовательное дифференцирование по времени левой части уравнения (2) дает четыре дополнительных конвективных слагаемых: два - в обычном координатном пространстве, два - в пространстве размеров пузырьков N, V . В итоге, уравнение диффузии газовых пузырьков (2) приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial f}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial I_N}{\partial N} - \frac{\partial I_V}{\partial V}. \quad (3)$$

В левой части уравнения (3) последние два слагаемых имеют отрицательный знак вследствие того, что в (1) рассматриваются переходы функции распределения $v_{K, K+1} f(K) - v_{K+1, K} f(K+1)$, в то время как по

определению производная $\frac{\partial f(K)}{\partial K}$ оперирует с обратным направлением перехода: $f(K+1) - f(K)$. Кроме

того, в (3) частные производные по времени от переменных $\bar{r}(t)$, $\bar{v}(t)$, $V(t)$ и $N(t)$ можно, следуя логике работы [3], рассматривать как полные. В этом случае имеем:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t); \quad \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{\vec{F}(t)}{m(t)}, \quad (4)$$

где $\vec{F}(t)$ - сила, действующая на пузырек; $m(t) = m_a N(t)$ - масса сосредоточенных в пузырьке атомов газа, вес каждого из которых равен m_a . Здесь необходимо отметить, что третье слагаемое в левой части уравнения (3) описывает силовое взаимодействие газовых пузырьков, которое связано с возбуждением пузырьками звука в среде, взаимодействием газовых пузырьков под действием сил Бьеркнеса [6], их коалесценцией и радиационным давлением, оказываемым на них со стороны собственных и внешних акустических волн [7].

Если предположить, что среда однородна и на газовые пузырьки не действуют внешние силы, то уравнение (3) упрощается и принимает следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Gamma(N, V) \cdot f + \frac{\partial}{\partial N} \left(D_N \frac{\partial f}{\partial N} \right) + \frac{\partial}{\partial V} \left(D_V \frac{\partial f}{\partial V} \right), \quad (5)$$

$$\text{где: } \Gamma(N, V) = \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{dN}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{dV}{dt} \right) \equiv \frac{d}{dt} \ln \left(\left| \frac{dV}{dt} \right| \left| \frac{dN}{dt} \right|^{\text{sign}(S)} \right), \quad S \equiv \frac{dN}{dt} \frac{dV}{dt}.$$

Запись слагаемого $\Gamma(N, V)$ в виде полной производной по времени соответствует перебору знаков производных $\frac{dN}{dt}$ и $\frac{dV}{dt}$, а также их производных по N и V .

Таким образом, учет конвективных слагаемых в уравнении диффузии газовых пузырьков в жидкости преобразует кинетическое уравнение из чисто дивергентной формы в пространстве размеров пузырьков (см. [3]) в аналогичную форму, но с добавлением в правой части пропорционального функции распределения пузырьков слагаемого.

Уравнение (5) должно быть дополнено уравнением, описывающим сохранение числа атомов газа в единичном объеме, включающем атомы газа в пузырьках и атомы газа, растворенные в жидкости [3]:

$$n^L(0) \left(1 - \int_0^\infty \int_0^\infty V f(V, N, t) dV dN \right) = n^L(t) \left(1 - \int_0^\infty \int_0^\infty V f(V, N, t) dV dN \right) + \int_0^\infty \int_0^\infty N f(V, N, t) dV dN \quad (6)$$

или в другой записи

$$1 \cdot n^L(t) + \int_0^\infty \int_0^\infty f(V, N, t) dV dN \left(\int_0^\infty \int_0^\infty N f(V, N, t) dV dN \right) = 1 \cdot n^L(0). \quad (7)$$

При переходе от выражения (6) к выражению (7) использован тот факт, что изменение объема жидкости в единичном объеме пропорционально количеству газовых пузырьков в последнем:

$$1 = \int_0^\infty \int_0^\infty f(V, N, t) dV dN \left(1 - \int_0^\infty \int_0^\infty V f(V, N, t) dV dN \right). \quad (8)$$

Уравнение (5) и одно из уравнений (6),(7) составляет фундаментальную систему уравнений, которая описывает динамику их параметров $f(V, N, t)$ и $n^L(t)$. Для полного описания временной динамики этих параметров в среде система уравнений должна быть дополнена начальными и граничными условиями.

Исходя из вида первого слагаемого правой части уравнения (5) можно сделать вывод о возможности существования равновесных распределений газовых пузырьков в жидкости. Ясно, что такие состояния

определяются условием $Q \left(\frac{dV}{dt}, \frac{dN}{dt} \right) \equiv \left| \frac{dV}{dt} \right| \left| \frac{dN}{dt} \right|^{\text{sign}(S)} = \text{const}$ (тривиальное условие $\text{const} = 0$ опускаем).

Из условия $Q\left(\frac{dV}{dt}, \frac{dN}{dt}\right) = const$ и из уравнения (5) следует, что $\Gamma(N, V) = 0$, т.е. функция распределения $f(V, N)$ однородна, а количество газовых пузырьков в жидкости $N_b = \iint_{\Omega} f(V, N) dNdV$ постоянно. Здесь: Ω - область интегрирования в пространстве размеров пузырьков $\{N, V\}$.

Далее рассмотрим возможные режимы существования равновесных пузырьков в жидкости.

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ПАРАМЕТРЫ РАВНОВЕСНЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ ПРИ $S < 0$

Из условия $S < 0$ следует, что объем пузырька $V(t)$ и количество атомов газа в нем $N(t)$ связаны между собой соотношением:

$$V(t) = C_{1,2} (N(t) - D_{1,2}), \quad (9)$$

где: $C_{1,2}$ и $D_{1,2}$ - константы интегрирования; $C_1 \equiv W_0 = (n^L(0))^{-1}$ - элементарный объем, занимаемый атомом газа в жидкости в начальный момент времени; $D_1 \equiv N_0$ - количество атомов газа в момент формирования пузырька; $C_2 \equiv -W_0$; $D_2 > 0$ - положительная по величине константа интегрирования, задающая динамику изменения параметров пузырька.

Учитывая равенство (9), величину минимального ($\alpha \approx 1$) стационарного радиуса пузырька R_b можно определить из уравнения:

$$\frac{R_b^2 \sigma_{\infty} l}{(R_T + R_b)^2} = 2\alpha \eta W_0 D n^L \ln \left(1 + \frac{2\sigma_{\infty}}{p^L (R_T + R_b)} \right). \quad (10)$$

При получении уравнения (10) использовано представление Толмена [8] для зависимости коэффициента поверхностного натяжения от радиуса пузырька

$$\sigma(R) = \frac{\sigma_{\infty} R}{R_T + R}, \quad (11)$$

а также предположение о справедливости условия равновесия на поверхности пузырька [3]:

$$p(R, t) \approx p^L, \quad (12)$$

где R_T - характерный радиус Толмена.

В выражении (11) параметр σ_{∞} характеризует поверхностное натяжение жидкой среды при больших размерах пузырьков $R \gg R_T$. С уменьшением радиуса пузырька $R \rightarrow 0$ коэффициент поверхностного натяжения среды также стремится к нулю. При этом параметр R_T достаточно мал, поскольку он характеризует поверхностное натяжение микроскопических пузырьков.

Величину R_T и стационарный радиус пузырька R_b можно оценить исходя из следующих соображений.

Из экспериментальных данных известно [9], что в водопроводной воде со временем отстаивания 0,25 — 5,0 часов присутствуют пузырьки радиусом от $R_{\max} \approx 3 \cdot 10^{-3}$ см до минимального, радиус которого определим как $R_b^{\min} \approx 2 \cdot R_0 = 6 \cdot 10^{-8}$ см, где $R_0 \approx 3 \cdot 10^{-8}$ см — эффективный радиус “атома” воздуха. Отметим, что значение R_0 попадает в теоретически рассчитанный интервал размеров пузырьков газа в области их зарождения $2,7 \cdot 10^{-8}$ см $< R_0 < 6,7 \cdot 10^{-8}$ см [10].

Тогда, решая уравнение (6) для пузырька воздуха наименьшего радиуса ($R_b \ll R_T$) в водопроводной воде

при атмосферном давлении (полагаем $\alpha \approx 1$), нетрудно определить минимальное значение параметра $R_T \approx 1,6 \cdot 10^{-6}$ см (с уменьшением α величина этого параметра растет).

Величина стационарного радиуса пузырька в этом случае также определяется из уравнения (5) и равна $R_b \approx 6,6 \cdot 10^{-6} \sim 10^{-5}$ см, что по порядку величины совпадает со значением "усредненного" радиуса, экспериментально установленного в [11]: $\bar{R} \approx (1,8 \pm 0,2) \cdot 10^{-5} \sim 10^{-5}$ см.

Таким образом, из приведенных расчетов видно, что величина равновесного радиуса пузырька в несколько раз превышает характерный радиус Толмена R_T , и, таким образом, в равновесном пузырьке микроскопические свойства коэффициента поверхностного натяжения незначительны. Из проведенного анализа также следует, что в жидкости всегда присутствуют равновесные газовые пузырьки, которые в дальнейшем могут изменять свои параметры в соответствии с уравнениями (5), (7), не изменяя при этом их общее количество.

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ПАРАМЕТРЫ РАВНОВЕСНЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ ПРИ $S > 0$

При $S > 0$ стационарное состояние пузырьков задается уравнением:

$$\frac{dV}{dN} = \pm M_0 \left(\frac{dV}{dt} \right)^2 \equiv \pm M_0 \left\{ \frac{3V}{4\eta} \left(p^V - p^L - \frac{2\sigma_\infty}{R_T + R} \right) \right\}^2, \quad (13)$$

где: M_0 - постоянная величина, не зависящая от переменных V и N .

Для идеального газа в пузырьке, например, воздуха в водопроводной воде, $p^V = \frac{NT}{V}$ и уравнение (13) преобразуется в виду:

$$\frac{dV}{dx} = \pm \left(ax - V \left(1 + b \left(1 + \left(\frac{V}{V_T} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{-1} \right) \right)^2, \quad (14)$$

$$\text{где: } x = NM_0 \left(\frac{3p^L}{4\eta} \right)^2; a = \frac{16T\eta^2}{9M_0(p^L)^3}; V_T = \frac{4\pi R_T^3}{3}; b = \frac{2\sigma_\infty}{R_T p^L}.$$

Из уравнения (14) следует, что объем стационарного пузырька $V(x)$ есть монотонная нарастающая (знак +) или убывающая (знак -) функция количества атомов газа в нем.

Качественно опишем монотонно нарастающее решение уравнения (14).

При малых значениях x, V ($x, V \rightarrow 0$) решение уравнения (14) имеет вид:

$$V \approx \frac{a}{1+b} x + \frac{\sqrt{a}}{(1+b)^{\frac{3}{2}}}. \quad (15)$$

В точках V_b, x_b , удовлетворяющих уравнению,

$$x_b = \frac{V_b}{a} \left(1 + b \left(1 + \left(\frac{V_b}{V_T} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^{-1} \right) \quad (16)$$

монотонно нарастающее решение уравнения (14) имеет локальный экстремум.

После прохождения экстремума при $x, V \rightarrow \infty$ решение снова асимптотически растет по линейному

закону:

$$V \approx ax - \sqrt{a}. \quad (17)$$

Таким образом, из уравнения (14) следует, что при условии $S > 0$ в жидкости существуют такие состояния пузырька, когда количество атомов газа в нем нелинейным образом нарастает с ростом его объема, хотя асимптотически, при больших и малых значениях объема пузырька, эта зависимость близка к линейной (см. Рис. 1., кривая *II*).

Определим теперь параметры монотонно убывающего решения уравнения (14) (см. Рис. 1., кривая *III*).

В области больших значений V ($V \gg ax, V_T$) решение уравнения (14) описывается гиперболой

$$V \approx (x - x_0)^{-1}, \text{ где } x_0 \ll x_b, \quad x_b = N_b M_0 \left(\frac{3p^L}{4\eta} \right)^2.$$

В точках V_b, x_b , монотонно убывающее решение уравнения (14) имеет локальный экстремум, и при $V \ll ax$ описывается параболой $V \approx V_b^{max} - \frac{a^2}{3}(x^3 - x_1^3)$,

$$\text{где } V_b^{max} - \text{начальный объем пузырька; } x_1 = N_1 M_0 \left(\frac{3p^L}{4\eta} \right)^2.$$

ПАРАМЕТРЫ СТАЦИОНАРНЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ

Решение (9) и решения уравнения (14) описывают возможные стационарные состояния газовых пузырьков в жидкости. Совместность этих решений предполагает, что монотонно нарастающие решения при больших значениях N и V асимптотически должны описываться одинаковой зависимостью $V(t) \approx W_0 (N(t) - N_0)$, которая соответствует кривой *I* на Рис. 1. Следует отметить, что при больших значениях N и V асимптотика

$$(17) \text{ совпадает с решением (9) при выполнении условий: } W_0 = \frac{T}{p^L}, \quad M_0 = \frac{p^L}{TN_0^2} \left(\frac{4\eta}{3p^L} \right)^2.$$

На Рис. 1. приведены совмещенные качественные зависимости объема пузырька от количества атомов газа в нем, соответствующие решению (6) и решениям уравнения (14) для всех знаков S .

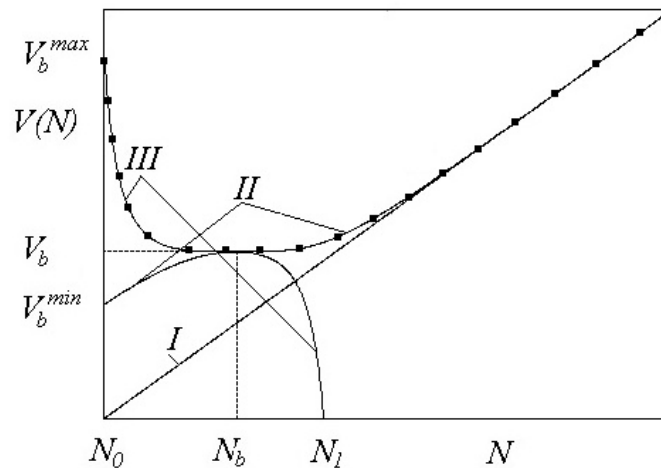


Рис. 1. Зависимости объема равновесного газового пузырька $V(N)$ от количества атомов газа N в нем.

Кривые, приведенные на рис. 1, не обеспечивают однозначности стационарного состояния пузырьков в жидкой среде: для одного значения N существует несколько равновесных значений V . Для устранения этой неоднозначности необходимо из кривых $I \div III$ составить кривую, которая имеет непрерывную производную по N , и обеспечивает максимум разности свободных энергий $F(V, N)$ [1]. Этому требованию отвечает кривая (отмечена черными квадратиками), состоящая из кривой *III* в интервале $N_0 < N \leq N_b$ и из кривой *II*

в интервале $N \geq N_b$. В точке соединения кривых $N = N_b$ производные $\frac{dV}{dN}$ кривых II и III равны нулю, т.е. производная в точке сочленения кривых II и III непрерывна.

Из анализа составленной кривой II + III следует, что объем равновесного пузырька $V(N)$, при $N = N_0$ скачком изменяется от нуля до значения $V = V_b^{max}$, с ростом N проходит через точку минимума V_b, N_b и при $N \gg 1$ асимптотически приближается к линейной зависимости, определяемой выражением (9) (кривая I). При этом пузырьки характеризуются линейной зависимостью между количеством атомов газа в пузырьке и его объемом, т.е. в таком равновесном пузырьке плотность газа постоянна.

Последнее подтверждается результатами численного моделирования, приведенного в работе [10], где плотность воздуха в пузырьках водопроводной воды (газосодержание на уровне 0,1) с точностью до 5% остается постоянной.

АВТОМОДЕЛЬНАЯ ДИНАМИКА ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ ПРИ УМЕНЬШЕНИИ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ $S < 0$

В некоторых случаях, удается получить автомодельные решения уравнения, которые характеризуют его внутренние свойства безотносительно от вида начальных и граничных условий. Ниже остановимся на анализе таких автомодельных решений уравнений (5), (7).

Найдем автомодельное решение уравнения (5). Для этого будем считать, что первоначально находящаяся под давлением p_0 жидкость подвергается его изменению во времени в соответствии с выражением $p(t) = p_0 (t + t_0)^\delta \cdot t_0^{-\delta}$, где: $\delta < 0$ - параметр, определяющий скорость изменения давления в жидкости, t_0 - заданное характерное время изменения давления.

Полагаем, что давление в жидкости и в газовом пузырьке отслеживает изменение внешнего давления, и изменяются во времени по аналогичному закону:

$$p(t) \simeq p^L = p_0^L (t + t_0)^\delta \cdot t_0^{-\delta}, \quad p^V = p_0^V (t + t_0)^\delta \cdot t_0^{-\delta}. \quad (18)$$

Для исследования динамики такого процесса целесообразно ввести автомодельную функцию $\Phi(\xi, \zeta)$ и автомодельные переменные ζ и ξ :

$$\Phi(\xi, \zeta) = f(V, N, t) (t + t_0)^\mu t_0^{-\mu}; \quad \zeta = \frac{3V}{4\pi} (t + t_0)^{3\delta} \cdot t_0^{-3\delta}; \quad \xi = N (t + t_0)^\nu t_0^{-\nu}, \quad (19)$$

где: μ, ν - показатели степени, определяемые из уравнения (5).

Предложенные подстановки (19), при условиях соблюдения стационарности $\frac{\partial \Phi(\xi, \zeta)}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} = 0$, $n^L(t) = const$ и справедливости соотношения (9), преобразуют исходное уравнение (5) к виду:

$$\mu = \frac{t_0 \sigma_\infty}{2\eta R_0} \left(1 - 2\eta \alpha W_0 \frac{D}{l \sigma_\infty} n^L \ln \frac{p_0^V}{p_0^L} \right), \quad (20)$$

где: R_0 - начальный радиус пузырька.

Из (20) следует, что для равновесного пузырька ($R_0 = R_b$) показатель степени $\mu = 0$. При $R_0 < R_b$ показатель степени отрицателен ($\mu < 0$), а при $R_0 > R_b$ - положителен ($\mu > 0$).

Рассмотрим далее динамику изменения во времени среднего числа пузырьков в жидкости $N_b(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(V, N, t) dV dN$ и их среднего размера $\bar{V}(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty V f(V, N, t) dV dN$ или среднего количества атомов газа в пузырьке $\bar{N}(t) = W_0^{-1} \cdot \bar{V}(t)$.

Изменение средних величин $N_b(t)$ и $\bar{V}(t)$, описываемое уравнением (5), приведено в таблице.

Таблица.

Динамика газовых пузырьков в воде при уменьшении внешнего давления. Знаки +, 0, — отвечают росту, постоянству или уменьшению соответствующего параметра.

μ	1	2	3	4	5
	$\mu < 6$	$\mu = 6$	$6 < \mu < 9$	$\mu = 9$	$\mu > 9$
$N_b(t)$	+	0	—	—	—
$\bar{V}(t), \bar{N}(t)$	+	+	+	0	—

Отмеченная в таблице динамика газовых пузырьков должна обеспечивать сохранение количества атомов газа в жидкости и в пузырьках. Закон сохранения атомов газа в единичном объеме жидкости в представлении (7) имеет вид:

$$N_b \cdot \bar{N} + 1 \cdot n^L(t) = const. \quad (21)$$

Тогда из (21), с учетом $n^L(t) = const$, следует, что $\mu = 7,5$ и динамика газовых пузырьков в воде попадает в диапазон 3, в котором среднее количество пузырьков уменьшается, а среднее число атомов в них возрастает за счет поглощения атомов газа, растворенных в жидкости.

ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе исследованы стационарные состояния газовых пузырьков в жидкости и их автомодельная динамика при уменьшении внешнего давления.

Учтены конвективные слагаемые в уравнении диффузии газовых пузырьков в пространстве размеров, которые преобразуют его в дивергентную форму с добавлением слагаемого, пропорционального функции распределения пузырьков в жидкости.

Исследованы условия существования и параметры стационарных пузырьков в жидкости при различных режимах изменения во времени их объема и количества атомов газа в них. Построена кривая зависимости объема равновесного газового пузырька от количества атомов газа в нем.

Получено хорошее количественное соответствие теоретических расчетов характерных размеров газовых пузырьков в водопроводной воде с экспериментальными данными.

На основе полученного в работе уравнения диффузии газовых пузырьков в жидкости описана их автомодельная динамика при уменьшении внешнего давления. Сделан вывод о том, что при уменьшении во времени по степенному закону внешнего давления среднее количество пузырьков автомодельно уменьшается, а среднее число атомов в них возрастает за счет поглощения атомов газа, растворенного в жидкости.

Авторы выражают благодарность Слезову В.В. за ценные замечания и интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zel'dovich Ja.B. K teorii obrazovaniya novoy fazy. Kavitacija // ZhJeTF. — 1942. - Т. 12. - Vyp. 11 – 12. – S. 525 – 538.
2. Slezov V.V. Theory of diffusive decomposition of solid solutions (I.M. Khalatnikov, Ed.) // Phys. Rev. — 1995. - Vol. 17, Part 3. - P. 1-214.
3. Slezov V.V. Metod virtual'nyh sred v teorii fazovyh prevrachenija pervogo roda // FTT. - 2000, - Т. 45. - Vyp. 4. - S. 733-740.
4. Slezov V.V. Gas bubbles in viscous liquids and melts // Journ. of colloid and interface science. — 2002. - Vol. 255. - P. 274-292.
5. Jurkin V.G. Teoreticheskie osnovy ispol'zovaniya osobennostej okolo-kriticheskogo sostojaniya vewestva dlja celej izvlechenija, razdelenija i koncentrirovaniya. Puti okolo-kriticheskoy sverhjekstrakcii // Uspehi himii. — 1995. - Т. 64, - Vyp. 3. - S. 237-250.
6. Crum L.A. Bjerknes forces on bubbles in a stationary sound field // J. Acoust. Soc. Am. — 1975. - Vol. 57, №6. - P. 1363–1370.
7. Kapustina O.A. Degazacija zhidkostej // V kn. Fizika i tehnika mownogo ul'trazvuka. Т. III Fizicheskie osnovy ul'trazvukovoj tehnologii. Pod. red. L.D. Rozenberga. - М.: Nauka, 1970. - S. 254 - 336.
8. Tolman R.C. The effect of droplet size on surface tension // J. Chem. Phys. — 1949. - Vol. 17, № 2. - P. 333-340.
9. Gavrilov L.R. Soderzhanie svobodnogo gaza v zhidkostjah i metody ego izmerenija // V kn. Fizika i tehnika mownogo ul'trazvuka. Т. III Fizicheskie osnovy ul'trazvukovoj tehnologii. Pod. red. L.D. Rozenberga. — М.: Nauka, 1970. - S. 305 - 426.
10. Makarov V.K., Makarova T.V. Raspredelenie po razmeram puzyr'kov svobodnogo gaza v zhidkosti pri razlichnyh urovnjah ee gazosoderzhanija // Trudy Odesskogo politehnicheskogo universiteta. — 2008. - Vyp. 2(30). - S. 219 – 223.
11. Emets B.G. Opredelenie metodom jadernogo magnitnogo rezonansa srednih razmerov i koncentracii vozdušnyh puzyr'kov, soderzhawihjsja v vode // Pis'ma v ZhTF. — 1997. - Т. 23. - Vyp. 19. - S. 42-45.