УДК 539.12

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, КВИВЕРЫ И ИХ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

С.А. Дуплий[1], Г.Ч. Куринной[2]
[1]*Center for Mathematics, Science and Education, Rutgers University*
118 Frelinghuysen Rd., Piscataway, NJ 08854-8019
E-mail: duplij@math.rutgers.edu, URL: http://math.rutgers.edu/~duplij
[2]*Механико-математический факультет, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина*
пл. Свободы, 4, Харьков, 61022, Украина
Поступила в редакцию 20 сентября 2011 г.

В работе рассматриваются свойства и некоторые применения квиверов в математической физике. Вначале исследуюся графы, и для них определяются матрицы смежности и матрицы инцидентности, приводятся примеры. Затем определяется полугруппа путей и свободная полугрупповая алгебра над этой полугруппой, изучается возможность трактовки квиверов в рамках теории категорий, строятся алгебры путей над числовым полем. Подчеркивается важность квиверов для визуализации различных связей между исследуемыми объектами современных моделей элементарных частиц. Далее определяются квиверы над кольцами и представления квиверов, вначале как диаграмма конечного множества, затем как представление конгруэнциями. Далее указываются применения квиверов в информатике, и также кратко рассмотрены суперквиверы.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: граф, полугруппа путей, цикл, конгруэнция, кольцо, модуль, гомоморфизм, точная последовательность, диграмма Дынкина

REPRESENTATIONS, QUIVERS AND THEIR SUPERSYMMETRIC GENERALIZATIONS

S. A. Duplij[1], G. Ch. Kurinnoj[2]
[1]*Center for Mathematics, Science and Education, Rutgers University*
118 Frelinghuysen Rd., Piscataway, NJ 08854-8019
E-mail: duplij@math.rutgers.edu, URL: http://math.rutgers.edu/~duplij
[2]*Department of Mathematics and Mechanics, V. N. Karazin Kharkov National University*
4, Svoboda Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

The paper deals with properties and some applications of quivers in mathematical physics. Initially, we study the graphs and for them the adjacency matrix and incidence matrix are defined. Then the path semigroup and free semigroup algebra of this semigroup are considered. The possible treatment of quiver in category theory is given, and the path algebra over a number field is constructed. The importance of quiver to visualize different relationships between the studying modern models of elementary particles is emphasized. Further the quiver over the rings and quiver representations are defined, initially as a diagram over a finite set, then as a representation of congruences. Next, specify the application of quivers in computer science, and also superquivers are briefly considered.
KEYWORDS: graph, path semigroup, cycle, congruence, ring, module, homomorphism, exact sequence, Dynkin diagram

ПРЕДСТАВЛЕННЯ, КВІВЕРИ ТА ЇХ СУПЕРСИММЕТРИЧНІ УЗАГАЛЬНЕННЯ

С. А. Дуплій[1], Г.Ч. Курінний[2]
[1]*Center for Mathematics, Science and Education, Rutgers University*
118 Frelinghuysen Rd., Piscataway, NJ 08854-8019
E-mail: duplij@math.rutgers.edu, URL: http://math.rutgers.edu/~duplij
[2]*Механіко-математичний факультет, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна*
пл. Свободи, 4, Харків, 61022, Україна

У роботі розглядаються властивості та деякі застосування квіверів в математичній фізиці. Спочатку досліджуються графи, і для них визначаються матриці суміжності та матриці інцидентності. Потім визначається напівгрупа шляхів і вільна напівгрупова алгебра над цією напівгрупою, показана можливість трактування квіверів в рамках теорії категорій, будуються алгебри шляхів над числовим полем. Підкреслюється важливість квіверів для візуалізації різних зв'язків між досліджуваними об'єктами сучасних моделей елементарних частинок. Далі визначаються квівери над кільцями, і представлення квіверів як діаграм скінченних частково впорядкованих множин і як граток конгруенцій універсальної алгебри. Насамкінець вказуються застосування квіверів в інформатиці, а також стисло розглянуті суперквівери.
КЛЮЧОВІ СЛОВА: граф, напівгрупа шляхів, цикл, конгруєнція, кільце, модуль, гомоморфізм, точна послідовність, діаграма Динкіна

Неоспорим тот факт, что теория графов [1] применяется не только в разделах математической физике (см., например, [2–4]), но и других теоретических и прикладных отраслях знания [5]. При этом зачастую используется дублирующая терминология, и переоткрываются уже известные факты. Примером дублирования терминологии является понятие квивера или колчана, которое в математическом аппарате физики потеснило понятие ориентированный граф. Целью работы является последовательное изложение различных свойств и применений квиверов в современной математической физике и информатике.

ГРАФЫ И СПОСОБЫ ИХ ЗАДАНИЯ

Граф — это набор точек и линий, которые соединяют эти точки [1]. Точки называют вершинами, а линии называют ребрами. Графы нужны для визуализации различных задач математической физики. Обычно, не используется математически точное определение графа, поскольку самой визуализации достаточно. В стандартной ситуации ребра соединяют различные точки, причем данные две точки могут быть соеденены не более, чем одним ребром. Если ребро соединяет вершину с собой, то такое ребро называют петлей. Граф, в котором разрешены петли, называют графом с петлями. Если две вершины соединены более, чем одним ребром, такой граф называют мультиграфом. Иногда возникают задачи, в которых важны направления ребер — выделены начало и конец. Такие ребра называют ориентированными. Граф, в котором все ребра ориентированы, называют ориентированным. Если не все ребра графа ориентированы, он назвется смешанным. Обычно из контекста задачи ясно, какой именно тип графа рассматривается. В данной работе мы будем иметь дело в основном ориентированнами графами.

Рассмотрим способы задания графов. Неориентированный граф задают матрицей смежности, которая строится таким способом: вершины графа нумеруют последовательно, строки и столбцы соответствуют номерам вершин, а на их пересечении стоит натуральное число (или 0), которое показывает, сколько ребер соединют данные вершины. Матрица смежности для неориентированного графа всегда симметрична. Примером графа с вершинами 1,2,3 и его матрицы смежности будет

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, dash] \arrow[d, dash] & \\ 2 \arrow[r, dash, shift left] \arrow[r, dash, shift right] & 3 \end{tikzcd} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Для ориентированного графа матрица смежности строится иным способом: на пересечении i-той строки и j-того столбца стоит число, указывающее количество ребер, которые выходят из i-той вершины и приходят в j-тую вершину. Такая матрица может быть несимметричной.

Примером ориентированного графа с вершинами 1,2,3 и его матрицы смежности будет

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above] \arrow[d] & \\ 2 \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & 3 \end{tikzcd} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Очевидно, что матрица смежности графа без петель имеет нулевые диагональные элементы, а для обычного графа её элементами являются только 0 и 1.

Для задания графов с непустым множеством ребер используется также матрица инцидентности (принадлежности). Для этого вершины и ребра нумеруются произвольным способом, затем создается матрица, имеющая столько строк, сколько вершин у графа и столько столбцов, сколько ребер. На пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит число, показывающее, в каком отношении инцидентности j-ое ребро находится с i-ой вершиной. Для неориентированного графа можно писать +1, если ребро инцидентно вершине, и 0, если ребро неинцидентно вершине. Для ориентированного графа можно писать на пересечении i-ой строки и j-го столбца 0, если ребро не инциденно вершине, 2, если ребро является петлей в этой вершине, -1, если ребро выходит из вершины, +1, если ребро входит в вершину. Например, матрица смежности ориентированного графа с вершинами 1,2,3 и ребрами v_1, v_2, v_3, v_4 есть

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "v1"] \arrow[d, "v2"] & \\ 2 \arrow[r, bend left, "v3"] \arrow[r, bend right, "v4"'] & 3 \end{tikzcd} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

В дальнейшем, если Γ — граф, то Γ_0 — множество его вершин, а Γ_1 — множество его ребер, и мы будем писать $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$.

Ниже мы рассматриваем графы, вершинам и ребрам которых поставлены в соответствие определенные математические объекты. В качестве таких объектов могут выступать различные алгебраические структуры: поля, кольца, линейные пространства, алгебры, алгебры над полями и категории. В математической физике такими объектами могут быть струны, D-браны и т.д. (для обзора, см., например, [3,4]). Именно в этом контексте ориентированный граф называют квивером [6].

В данной работе мы рассматриваем конкретные конструкции сопоставления вершинам и ребрам вышеуказанных математических объектов, другими словами — представления квиверов [7].

ПУТИ И ЦИКЛЫ

Естественным математически объектом, который возникает при изучении квиверов и их представлений, является полугруппа путей, а также свободная полугрупповая алгебра над этой полугруппой (линейное пространство, в котором пути есть базисные векторы). Путем в ориентированном графе называют такую последовательность ребер, что конец предыдущего ребра является началом следующего. Рассматривают также путь, выходящий из заданной вершины i и не содержащий ни одного ребра, так называемый пустой путь e_i.

Пусть $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ — последовательность ребер графа Γ такая, что конец предыдущего ребра есть начало следующего, началом ребра b_1 есть вершина $a_1 \in \Gamma_0$ а концом ребра b_n есть вешина $a_2 \in \Gamma_0$. Тогда говорим, что мы имеем путь p из вершина a_1 в вершину a_2 и пишем

$$p = (a_1|b_1, b_2, \dots, b_n|a_2). \tag{4}$$

Путь из вершины в ту же вершину называют циклом. Множество путей обозначается $Path$. Это множество превращается в полугруппу введением ассоциативной бинарной операции — умножения путей. Так, если

$$p_1 = (a_1|b_1, b_2, \dots, b_n|a_2), \qquad p_2 = (a_3|b_{n+1}, b_{n+2}, \dots, b_{m+n}|a_4), \quad p_1, p_2 \in Path, \tag{5}$$

то

$$p_1 \cdot p_2 = \begin{cases} 0, \text{если } a_2 \neq a_3 \\ (a_1|b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \dots, b_{m+n}|a_4), \text{ если } a_2 = a_3 \end{cases}. \tag{6}$$

Кроме того, для любого пути p выполняется

$$p \cdot 0 = 0 \cdot p = 0, \tag{7}$$

то есть 0 играет роль нуля полугруппы путей.

Например, если квивер состоит из одной вершины и одной петли b, то полугруппа путей состоит из всех ненулевых степеней b, единицы e_1 и нуля — 0. Соответствущая линейная алгебра есть алгебра всех многочленов от одной переменной b.

Рассмотрим возможность трактовки квиверов в рамках теории категорий [8]. Известно, что понятие категории обобщает понятия линейного пространства с линейными операторами на нем, кольца с гомоморфизмами между ними и других универсальных алгебр с гомоморфизмами из одной универсальной алгебры в другую. Напомним, что категория состоит из объектов и морфизмов между ними. Морфизмы можно множить, причем это умножение ассоциативно. Точнее, если a, b, c, d — четыре объекта какой-то категории, и есть морфизмы f, g, h соответственно из a в b, из b в c и из c в d, то определены морфизмы gf, hg соответственно из a в c и из b в d, а также морфизмы $h(gf)$ и $(hg)f$ из объекта a в объект d, при этом выполняется равенство

$$h(gf) = (hg)f. \tag{8}$$

Новым примером категории, объектами которой являются не унверсальные алгебры с гомоморфизмами, есть квивер. Точнее, квивер определяет категорию, объектами которой являются вершины квивера, а множеством морфизмов из одной вершины (объекта) a в другую вершину (объект) b является множество путей из a в b.

Отметим, что сама по себе теория категорий широко используется в физике высоких энергий [9]. В качестве примера квивера как категории можно взять квивер МкКея, изображенный на следующей диграмме

$$\begin{tikzcd} C^a \arrow[rr] \arrow[dr] & & C^b \arrow[dl] \\ & C^c & \end{tikzcd} \tag{9}$$

Здесь C^x — объекты категории, квантовые числа a, b, c обозначают RR-заряды, характеризующие квивер [10].

АЛГЕБРА ПУТЕЙ НАД ЧИСЛОВЫМ ПОЛЕМ

Пути квивера позволяют построить алгебры над числовым полем, дающие примеры сложных конструкций, работающих в математической физике [7, 11]. Рассмотрим конкретные примеры.

Пусть квивером Γ является граф $1 \xrightarrow{\rho} 2 \xrightarrow{\sigma} 3$, тогда базис алгебры путей состоит из $e_1, e_2, e_3, \rho, \sigma$ и $\sigma\rho$, где через e_1, e_2, e_3 обозначены пустые пути с началом в 1,2,3 соответственно. Таблица умножения $x \cdot y$ в полугруппе путей имеет вид

x \ y	e_1	e_2	e_3	ρ	σ	$\sigma\rho$
e_1	e_1	0	0	0	0	0
e_2	0	e_2	0	ρ	0	0
e_3	0	0	e_3	0	σ	$\sigma\rho$
ρ	ρ	0	0	0	0	0
σ	0	σ	0	$\sigma\rho$	0	0
$\sigma\rho$	$\sigma\rho$	0	0	0	0	0

(10)

Если квивер состоит из одной вершины и n петель, то соответствующая алгебра (линейное пространство с ассоциативным умножением) изоморфна свободной ассоциативной алгебре, построенной над n-элементным алфавитом.

Если квивер имеет n вершин и от одной вершины к другой имеется не более одного пути (для любой пары вершин), то алгебра путей A квивера Γ изоморфна подалгебре алгебры матриц размера $n \times n$ над полем $\Bbbk$

$$\{C \in M_n(k) \mid c_{ij} = 0 \text{ не существует пути от вершины } i \text{ к } j\}. \tag{11}$$

В частности, если квивер Γ имеет вид

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \ldots \longrightarrow n, \tag{12}$$

то алгебра путей изоморфна алгебре нижне треугольных матриц размера $n \times n$ над полем $\mathbb{K}$.

Отметим важные свойства идемпотентов алгебры путей A квивера Γ с n вершинами.

1. Множество пустых путей e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, является ортогональной системой идемпотентов, т.е.

$$i \neq j \Rightarrow e_i e_j = 0, \qquad e_i^2 = e_i \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

2. Алгебра A имеет единицу 1 как сумму пустых путей

$$1 = \sum_{i=1}^{n} e_i. \tag{14}$$

3. Пути, a) начинающиеся в вершине с номером i, b) заканчивающся в вершине с номером j, c) начинающиея в вершине с номером i и заканчивающиеся в вершине с номером j образуют базис алгебр

$$a) \quad Ae_i, \qquad b) \quad e_j A, \qquad c) \quad e_j A e_i. \tag{15}$$

соответственно.

4. Напомним, что определение модуля отличается от определения линейного пространства тем, что в последнем определено умножение его элементов на элементы числового поля, а в определении модуля требуется наличие умножения элементов модуля на элементы числового кольца. Поскольку алгебра A является прямой суммой левых A-модулей Ae_i (как это следует из (15))

$$A = \oplus_{i=1}^{n} Ae_i, \tag{16}$$

то каждое слагаемое Ae_i является проективным левым A-модулем.

5. Если X является левым A-модулем, то множество гомоморфизмов из Ae_i в X есть

$$\mathrm{Hom}_A(Ae_i, X) \cong e_i X. \tag{17}$$

6. Если $0 \neq f \in Ae_i$, и $0 \neq g \in e_i A$, то $f \cdot g \neq 0$. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть самый длинный путь x с ненулевым коэффициентом, входящий в f, и самый длинный путь y, входящий в g и убедиться, что коэффииент при xy в fg будет ненулевым.

7. Идемпотенты e_i являются примитивными, т.е. модули Ae_i являются неразложимыми. Чтобы убедиться в этом, достаточно увидеть, что, если $\mathrm{Hom}_A(Ae_i) \cong e_i Ae_i$ содержит идемпотент f, $f^2 = f = fe_i$, $f(f - e_i) = 0$, и далее воспользоваться предыдущим свойством.

8. Если $e_i \in Ae_j A$, то $i = j$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что базисом в линейном пространстве $Ae_j A$ являются пути, проходящие через j-ю вершину.

9. Идемпотенты e_i являются неэквивалентными в том смысле, что
$$i \neq j \Rightarrow Ae_i \ncong Ae_j. \tag{18}$$
Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить свойство 5 которое в случае изоморфности указанных модулей даст два идемпотента
$$f \in e_i Ae_j, \qquad g \in e_j Ae_i, \tag{19}$$
со свойствами $fg = e_i$, $gf = e_j$, что противоречит предыдущему свойству.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КВИВЕРОВ ДЛЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ СООТНОШЕНИЙ

Здесь мы отметим важность квиверов для визуализации различных связей между исследуемыми объектами современных моделей элементарных частиц в самом абстрактном смысле.

Пусть мы имеем дело с абстрактными множествами A и B. Поскольку отображение f из множества A во множество B изображается стрелочкой, идущей от A к B:
$$A \xrightarrow{f} B,$$
то связи между отображениями определяются кiверами. Приведем несколько примеров такого использования кiверов в абстрактной алгебре, которая является основой физических теорий.

Пусть заданы кольца $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ (матрицы, многочлены, и т.п., возникающие при изучении той или иной модели) и гомоморфизмы колец (отображения, согласованные с операциями) $f_i : A_i \to A_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Квивер
$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \ldots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \tag{20}$$
называется точной последовательностью [12], если образ предыдущего гомоморфизма совпадает с ядром следующего
$$\mathrm{Im}\, f_i = \mathrm{Ker}\, f_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{21}$$

Напомним определение сюръективного гомоморфизма (эпиморфизма) в терминах кiверов. Гомоморфизм f из кольца A в кольцо B является эпиморфизмом, если последовательность
$$A \xrightarrow{f} B \to 0 \tag{22}$$
точна. Подобным образом определяется инъективный гомоморфизм — мономорфизм колец. Гомоморфизм f из кольца A в кольцо B является мономорфизмом тогда и только тогда, когда последовательность
$$0 \to A \xrightarrow{f} B \tag{23}$$
точна. Отметим, что в целом, точные последовательности являются важнейшим инструментом гомологической алгебры, которая интенсивно используется в теории струн [2].

Пусть заданы три множества A, B, C и три отображения
$$f : A \to B, \qquad g : B \to C, \qquad h : A \to C,$$
образующие квивер Γ_1.
$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd} \tag{24}$$

Тогда диаграмма (квивер) Γ_1 коммутативна, если выполняется равенство

$$h = g \cdot f. \tag{25}$$

Пусть заданы четыре множества A, B, C, D и четыре отображения

$$f_1 : A \to B, \qquad g_1 : B \to D, \qquad f_2 : A \to C, \qquad g_2 : C \to D$$

образующие квивер Γ_2

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & B \arrow[d, "g_1"] \\ C \arrow[r, "g_2"] & D \end{tikzcd}$$

Тогда о равенстве

$$g_1 \cdot f_1 = g_2 \cdot f_2 \tag{26}$$

говорят, что диаграмма (квивер) Γ_2 коммутативна.

Покажем, как для сжатой записи соотношений между гомоморфизмами можно эффективно использовать введенные понятия. Лаконичность и прозрачность формулировок, достигаемая за счет использования коммутативных диаграмм, продемонстрируем на примере леммы о пяти гомоморфизмах для модулей над определенным кольцом [12]. Формулировка этой леммы следующая: пусть имеем 10 модулей $A_2, A_1, A_0, A_{-1}, A_{-2}, B_2, B_1, B_0, B_{-1}, B_{-2}$. Если строки диаграммы (срелки изображают гомоморфизмы) точны и квадраты

$$\begin{tikzcd} A_2 \arrow[r] \arrow[d, "\chi_2"] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\chi_1"] & A_0 \arrow[r] \arrow[d, "\chi_0"] & A_{-1} \arrow[r] \arrow[d, "\chi_{-1}"] & A_{-2} \arrow[d, "\chi_{-2}"] \\ B_2 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B_0 \arrow[r] & B_{-1} \arrow[r] & B_{-2} \end{tikzcd} \tag{27}$$

коммутативны, то справедливы следующие импликации:

1) Если χ_2 — эпиморфизм, а χ_1, χ_{-1} — мономорфизмы, то χ_0 — мономорфизм.

2) Если χ_1, χ_{-1} — эпиморфизмы, а χ_{-2}, — мономорфизмы, то χ_0 — эпиморфизм.

В дополнение к этому, квиверы позволяют формулировать сжатые и ясные определения. Например, модуль P называется проективным, если всякая диаграмма

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] & \\ A \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{28}$$

с точной нижней строкой дополняется до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] \arrow[dl] & \\ A \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{29}$$

некоторым гомоморфизмом $P \to A$.

Меняя в этом определении направления стрелок приходим к следующему определению.

Модуль Q называется инъективным, если всякая диаграмма

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \\ & Q & \end{tikzcd} \tag{30}$$

с точной верхней строкой дополняется до коммутативной диаграммы некоторым гомоморфизмом $B \to Q$, а именно

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[dl] \\ & Q & \end{tikzcd} \qquad (31)$$

КВИВЕРЫ НАД КОЛЬЦАМИ

Более сложным объектом является квивер кольца [12]. Пусть R — кольцо и M — правый R-модуль. Проективным накрытием M называется такой проективный R-модуль P, что для некоторого эпиморфизма $\pi : P \longrightarrow M$ и для любого подмодуля $H \subseteq P$ истинна импликация

$$\operatorname{Ker} \pi + H = P \Rightarrow H = P. \qquad (32)$$

Правый R-модуль называется полусовершенным, если все его фактормодули обладают проективными накрытиями.

Рассмотрим полусовершенное кольцо R, в котором единица разложена в сумму попарно ортогональных неразложимых идемпотентов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (разложение Пирса), то есть

$$e_i e_j = \begin{cases} e_i, \text{ если } i = j, \\ 0, \text{ если } i \neq j, \end{cases} \qquad (33)$$

$$1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n. \qquad (34)$$

Квивером кольца R называется ориентированный граф $\Gamma(R)$, в котором вершинами являются идемпотенты e_i, а ребра определяюся следующим образом. С каждым идемпотентом e_i связывается проективное накрытие $P(e_i)$ правого R-модуля $e_i J$, где J — радикал Джекобсона (пересечение максимальных идеалов), которое имеет вид

$$P(e_i) \simeq (e_1 R)^{k_{i,1}} \oplus \ldots \oplus (e_n R)^{k_{i,n}} . \qquad (35)$$

Стрелка с началом e_i и концом e_j существует, когда $k_{i,j} \neq 0$.

ПРЕДСТВЛЕНИЯ КВИВЕРОВ

Как говорилось выше, термин “квивер“ введен для создания определенного контекста и подчеркивания того, что рассматриваются задачи классификации тех или иных объектов. Так что квивер может выполнять две роли: 1) визуализация постановки задачи; 2) обозначение того или иного типа решения в задаче классификации объктов. Заметим, что все объекты рассматриваются “с точностью до изоморфизма“. Детализируем сказанное. В задачах классификации важную роль играют неразложимые объекты, остальные тем или иным способом конструируются из неразложимых. Таким образом, возникает вопрос о количестве неразложимых объектов и об их описании. Наиболее явным образом это прослеживается при рассмотрении представлений квиверов линейными пространствами над числовым полем [13].

Хорошо известно, что линейные пространства одной размерности изоморфны, так что линейное пространство заданной размерности единственно “с точностью до изоморфизма“. Далее, любое линейное пространство является прямой суммой одномерных. Поэтому неразложимых объектов здесь ровно два — нулевое линейное пространство и одномерное, которое изоморфно самому числовому полю. Таким образом, в данном случае квивер, визуализирующий постановку задачи состоит из одной вершины, а ребер в нем нет.

Рассмотрим задачу о выборе n подпространств в пространстве V некоторой конечной размерности. Если в каждом из двух пространств V_1, V_2 выбраны по n подпространств $L'_1, L'_2, \ldots, L'_n \subseteq V_1$, $L''_1, L''_2, \ldots, L''_n \subseteq V_2$, и существует изоморфизм $f : V_1 \to V_2$ такой, что $f(L'_i) = L''_i$, то это одно представление квивера, состоящее из $(n+1)$-й вершины, помеченной соответственно $L_1, L_2, \ldots, L_n$ и V, а стрелочек есть n, которые выходят из вершин L_i $i = 1, 2, \ldots, n$ в вершину V. Если $n = 2$, то квивер Γ, визуализирующий постановку задачи, имеет вид $L_1 \longrightarrow V \longleftarrow L_2$. Каждое представление квивера Γ однозначно определяется числами

$$\dim V, \dim L_1, \dim L_2, \dim(L_1 \cap L_2),$$

поэтому в данном примере имеется лишь 4 неразложимых представления. При $n = 3$ существует уже 9 неразложимых представления. А при $n \geq 4$ неразложимых представлений уже бесконечно много.

Квивер называется конечно представимым, если у него существует лишь конечно число неразложимых представлений.

Пусть заданы два конечномерные линейные пространства V_1, V_2 над определенным полем $\mathbb{K}$ и линейный оператор f из V_1 в V_2. Постановка этой задачи изображается квивером $V_1 \xrightarrow{f} V_2$ у которого две вершины (линейные пространства V_1, V_2) и одно ребро из V_1 в V_2 (линейный оператор f). Этот квивер конечнопредставим, потому что неразложимых операторов три — два нулевых: $0 \to \mathbb{K}$, $\mathbb{K} \to 0$ и изоморфизм $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Если поле $\mathbb{K}$ алгебраическиз замкнуто, то неразложимыми составляющими оператора будут те, которые в некотром базисе имеют матрицей клетку Жордана. Таких клеток, имеющих собственными числами корни характеристического многочлена оператора f, конечное число. Если поле $\mathbb{K}$ не алгебраически замкнуто, то неразложимые компоненты являются операторами, чьи матрицы в определенном базисе имеют форму Фробениуса. Их также конечное число. Поэтому рассматриваемый квивер конечно представим.

В следующей задаче квивер имеет одну вершину и дву петли. Его представлением является сопоставление вершине линейного пространства, а петлям — линейные операторы в этом пространстве. Разумной классификации в этой задаче не ожидается, такие задачи называют “дикими“.

В общем случае, представление квивера сопоставляет каждой вершине линейное пространство, а каждому ребру — соответствующий линейный оператор. Оказывается, задача о классификации представлений имеет достаточно простое решение только в нескольких случаях, а именно, когда квивер имеет один из следующих 5 видов, которые называются диаграммами Дынкина (Рис.1).

КВИВЕР КАК ДИАГРАММА КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА

Одним из основных бинарных отношений при рассмотрении физических структур является отношение частичного порядка. Например, отношение включения между множествами объектов, отношение делимости на множетве чисел, отношение линейного порядка на множестве слов. Естественно изображать отношение частичного порядка квивером. Его вершинами должны служить элементы частично упорядоченного множества, а стрелки должны идти от большего элемента к меньшему. Однако такой прямой подход приводит к обилию стрелок, что затрудняет понимание задачи. Поэтому пользуются рядом договоренностей.

1. Если $x > y > z$, и нарисованы стрелочки от x к y и от y к z, то стрелочку от x к z не рисуют.

2. Направление стрелочки не указывается, а подразумевается. Таким образом, вместо стрелочки рисуется отрезок. Чтобы не потерять информативность, сравнимые элементы не изображают на одном уровне, больший изображают выше (или правее, если есть дополнительные типографские или эстетические соображения).

Приведем примеры. На рис. 2 визуализирется четырехмерный куб — частично упорядоченное множество всех подмножеств четырехэлементного множества $\{a, b, c, d\}$.

Использование квиверов (диаграмм частично упорядоченных множеств) в теории групп покажем на примере леммы “о бабочке“ Цассенхауза:

Пусть U, V — подгруппы некоторой группы, и пусть u, v — нормальные подгруппы в U и V соответственно. Тогда

$$u(U \cap v) \text{ нормальна в } u(U \cap V), \tag{36}$$

$$(u \cap V)v \text{ нормальна в } (U \cap V)v, \tag{37}$$

и соответствующие факторгруппы изоморфны, т.е.

$$u(U \cap v)/u(U \cap v) \approx (U \cap V)/(u \cap V)v. \tag{38}$$

Комбинация подгрупп и факторгрупп в этой лемме становится ясной, если создать соответствующую диаграмму. Эта диаграмма (рис.3, собственно, и дала название лемме [14].

Напомним, что унар это универсальная алгебра с одной унарной операцией, фактически это множество вместе с отображением этого множества в себя. Отображения конечных множеств в себя удобно задавать квивером. Пусть у нас есть унар, заданный квивером

$$\begin{tikzcd} \{a_1\} \arrow[rr] & & \{a_2\} \arrow[dr] & & \{b_1\} \arrow[r] & \{b_2\} \arrow[d] \\ & \{a_4\} \arrow[ur] & & \{a_3\} \arrow[ll] & \{b_3\} \arrow[u] & \{b_4\} \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{39}$$

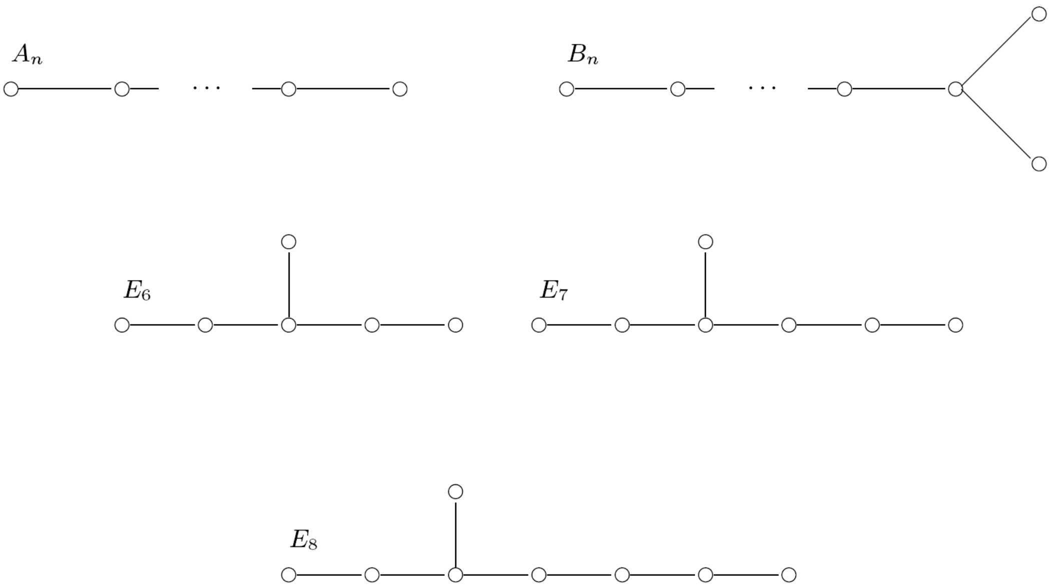


Рис.1. Диаграммы Дынкина. Направление ребер произвольно.

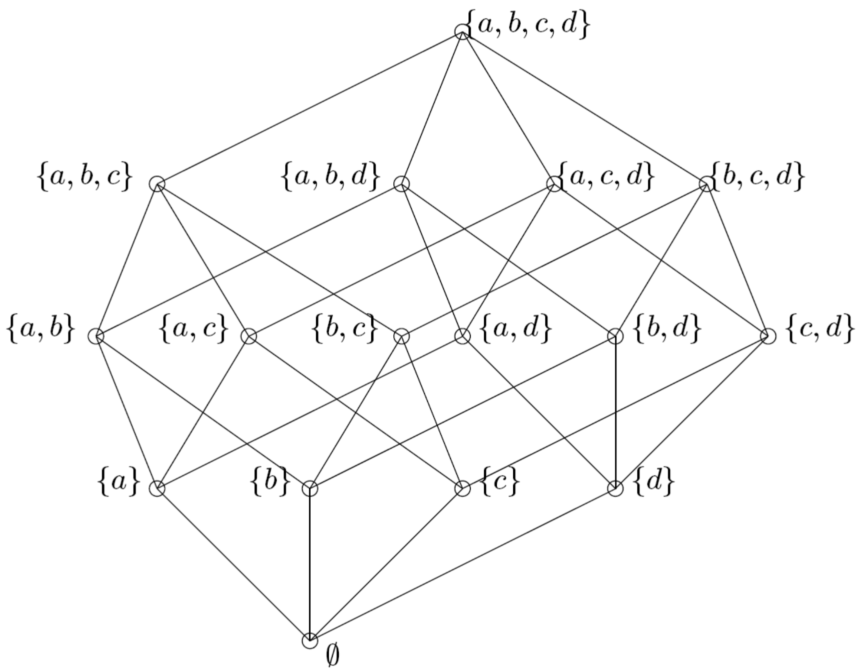


Рис.2. Четырехмерный куб.

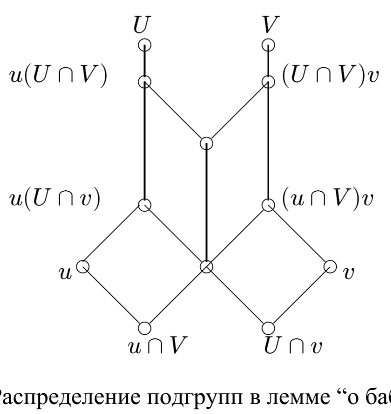
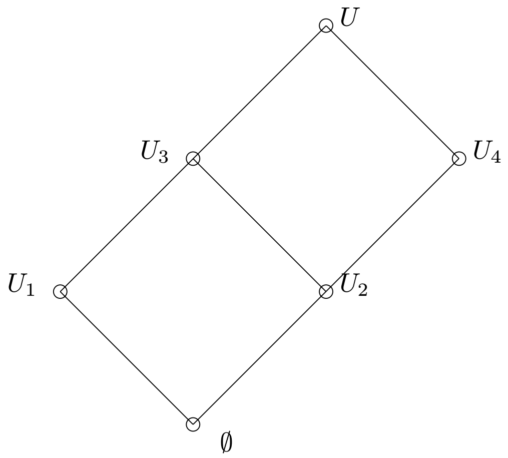


Рис. 3. Распределение подгрупп в лемме “о бабочке”.

Тогда частично упорядоченное множество всех подунаров (множеств, замкнутых относительно отображния), графически задается следующим квивером



(40)

где

$$U_1 = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}, \quad U_2 = \{a_2, a_3, a_4\}, \quad U_3 = U_1 \cup U_2 = \{a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4\},$$

$$U_4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}.$$

ПРЕДСТВАЛЕНИЕ КВИВЕРОВ КОНГРУЭНЦИЯМИ

В современной теоретической физике интенсивно используются различные неклассические и нетрадиционные операции, например дельта-функции, свертки, некоммутатвные алгебры и т.д. Свойства таких операций удобно описывать квиверами. В связи с этим естественно ввести общее понятие универсальной алгебры. Напомним, что универсальная алгебра — это пара $\mathcal{A} = \langle A, \Omega \rangle$, состоящая из множества A, называемого носителем, и набора операций Ω, называемого сигнатурой [15]. Конгруэнциями универсальной алгебры называются те эквивалентности (симметричные, рефлексивные и транзитивные бинарные отношения), которые согласованы с операциями из сигнатуры Ω. Точнее, пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ есть n-местная операция, тогда согласованность эквивалентности $\sim$ с этой операцией означает, что для любых $2n$ элементов из носителя A

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, a'_1, a'_2, \ldots, a'_n \tag{41}$$

выполняется

$$a_1 \sim a'_1, a_2 \sim a'_2, \ldots, a_n \sim a'_n \Rightarrow f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \sim f(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n). \tag{42}$$

Квивер конгруэнций универсальной алгебры имеет своими вершинами сами конгруэнции, а стрелки идут от конгруэнции $\sim_1$ к конгруэнции $\sim_2$ в том и только том случае, когда для любых a, b из носителя универсальной алгебры выполняется импликация

$$a \sim_1 b \Rightarrow a \sim_2 b. \tag{43}$$

В некоторых случаях квивер несет полную информацию об универсальной алгебре. Примером такой алгебры является линейное пространство размерности 3 или более над некоторым числовым полем. Известно, что если имеется два линейных пространства на некоторыми полями, причем одно из этих пространств имеет размерность три или более, а квиверы конгруэнций изоморфны, то поля, над которыми рассматриваются линейные пространства изоморфны, кроме того линейные пространства также изоморфны. Этот факт вытекает из того, что конгруэнции линейного пространства однозначно определяются его подпространствами.

Отметим, что в кольцах каждая конгруэнция определяется двусторонним идеалом, но соответствующей теоремы для них нет [16]. Соответствующие задачи рассматривались также и для унаров, то есть универсальных алгебр с одной унарной операцией (отображением носителя в себя) [15].

ДЕЙСТВИЕ МОНОИДА НА КВИВЕР

Пусть задано непустое множество L и моноид R. Если для всех $a \in L, \lambda \in R$ определено произведение $\lambda a \in L$, причем единица моноида R действует тождественно

$$1_R \cdot a = a, \tag{44}$$

и

$$(\lambda\mu) \cdot a = \lambda \cdot (\mu \cdot a), \qquad \lambda, \mu \in R, a \in L, \tag{45}$$

то говорят, что задан левый полигон над моноидом R [17].

Гомоморфизм из одной универсальной алгебры и другую или эндоморфизм переводят одно представление квивера в другое. Например, рассмотрим эндоморфизм λ универсальной алгебры A и конгруэнцию a этой универсальной алгебры. Тогда произведение λa (конгруэнция A) определяется следующим образом:

$$\lambda a = \{(x, y) \in A^2 | (x\lambda, y\lambda) \in a\}. \tag{46}$$

В частности,

$$\lambda A^2 = \{(x, y) \in A^2 | (x\lambda, y\lambda) \in A^2\} = A^2. \tag{47}$$

Таким образом возникает задача представления действий на квивере эндоморфизмов той или иной универсальной алгебры, которая участвует в представлении квивера.

КВИВЕРЫ В ИНФОРМАТИКЕ

Квиверы применяются также в программировании для верификации алгоритмов и программ. Алгоритм, устанавливающий последовательность действий над входным алфавитом для достижения определенного результата, т.е. определенного слова в выходном алфавите, можно записать в виде отдельных простых операций, соединенных между собой стрелками, указывающими, какая операция будет выполняться следующей, после выполнения предыдущей. Таким образом, алгоритму можно поставить в соответствие некоторый квивер. Одной из важнейших современных вычислительных проблем является верификация программы, т.е. доказательство того, что программа работает корректно. Задача состоит в том, чтобы по квиверу определить, остановится ли выполнение алгоритма, а если остановится, то с надлежащим ли (ожидаемым) результатом работы.

Каждому действию алгоритма можно сопоставить вершину квивера. Но в записи алгоритма действия существенно отличаются между собой, например, арифметическое действие, логическое, или операция чтения/записи. Поэтому вершины квивера неравноправны — они принадлежат разным множествам. Таким образом, возникают квиверы, в которых множество вершин многосортно [18]. Также возможны ситуации, когда многосортным оказывается и множество стрелок, например, при изображении различных физических взаимодействий. Такие квиверы уже рассматриваются, однако в отдельный объект изучения не выделены.

С помощью квиверов решается ряд задач вычислительного характера. Особенно важными задачами при создании и использовании баз данных являются задачи поиска и сортировки [5]. При этом данные очень часто имеют иерархическую структуту. Иерархической структуре данных соответствует квивер специального строения — для двух вершин квивера существует не более одного пути из одной вершины в другую. Такие квиверы называются лесом. Если квивер имеет вершину, в которую есть путь из любой другой вершины, то такой квивер называют деревом. Вот деревья и лес являются базовыми объектами при создании баз данных. Создаются алгоритмы поиска по дереву (и по лесу) а также сортировка данных, являющихся вершинами дерева (или леса). При создании электронных схем вершинами квивера являются элементы, а ребрами являются проводники. При этом важно, чтобы проводники не пересекались. Это означает что соответствующий квивер должен допускать изображение на плоскости, в котором ребра не пересекаются. Такие квиверы называются планарными. Известно, что неориентированный граф является плоским тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, изоморфного двудольному графу $K_{3,3}$ или полному пятивершинному графу M_5 [1]. Напомним, что в полном графе две разные вершины соединяются в точности одним ребром (рис. 4). А в двудольном графе (биграфе) вершины разбиваются на два подмножества, и ребра соединяют вершины из разных подмножеств (рис.5).

СУПЕРКВИВЕРЫ

Хорошо известно, что современные модели элементарных частиц являются суперсимметричными [19, 20], т.е. основаны на использовании супергрупп и супер態алгебр в качестве базовых алгебраических структур [21, 22]. Поэтому важным представляется рассмотрение соответствующих суперсимметричных обобщений квиверов [23].

Кратко напомним определения суперпространства и супералгебры [21]. Пусть $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ обозначает циклическую группу порядка 2. Линейным суперпространством называется $\mathbb{Z}_2$-градуированное векторное пространство, представимое в виде прямой суммы четной и нечетной частей $V = V_{\bar{0}} \otimes V_{\bar{1}}$. Четность p элемента пространства

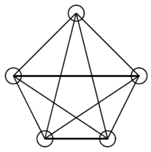


Рис. 4. Полный граф K5.

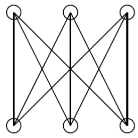


Рис. 5. Полный двудольный граф K3,3.

это отображение V в $\mathbb{Z}_2$, так что $p(v)=\overline{0}$ при $v\in V_{\overline{0}}$ и $p(v)=\overline{1}$ при $v\in V_{\overline{1}}$. Тогда соотношения суперкоммутации записываются в виде $uv=(-1)^{p(u)p(v)}vu$, т.е. четные элементы коммутируют, а нечетные – антикоммутирут. Аналогично линейной супералгеброй A называется $\mathbb{Z}_2$ – грудуированная алгебра, представимая в виде $A=A_{\overline{0}}\oplus A_{\overline{1}}$. Единица супералгебры всегда лежит в четном подпространстве.

Обобщение кiиверов на суперслучай фактически сводится к приписыванию стрелкам (морфизмам) определенной четности [24]. Суперквивером называется пара $\langle\Gamma,\pi\rangle$, где $\Gamma=(\Gamma_0,\Gamma_1)$ – квивер, а отображение четности $\pi:\Gamma_1\to\mathbb{Z}_2$. Тогда множества четных и нечетных стрелок $\Gamma_{1,\overline{0}}$, и $\Gamma_{1,\overline{1}}$ можно обозначить как $\pi^{-1}(\overline{0})$ и $\pi^{-1}(\overline{1})$ соответственно. Фиксация четности стрелок может бать интерпретирована как приписывание им определенного цвета. Обычно на диаграммах четные стрелки обозначают сплошной линией, а нечетные – пунктирной.

Основное утверждение в теории суперквиверов остается таким же, как и для обычных квиверов: представление супералгебры является конечномерным, если соответствующий квивер отображается специальной диаграммой Дынкина[23].

ВЫВОДЫ

Представленные выше рассуждения показывают, что квиверы являются новым и достаточно универсальным средством решения задач двух типов:

1. визуализация отношений между объектами изучения;
2. нахождение инвариантов в задачах классификации.

Кроме того, отмечено обобщение квиверов, полезное при изучении суперсимметрии. Показано также, что квиверы являются самостоятельным интересным объектом изучения как в физике высоких энергий, так и в разделах математики, используемых физикой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ore O. Theory of Graphs. - Providence: AMS, 1974. - 270p.
2. Maljuta Ju. M., Obihod T., Semenov V. Fizika vysokih energij i gomologicheskaja algebra // Dop. NANU. - 2008. - №5. - S.93-96.
3. Seki S. Comments on quiver gauge theories and matrix models // Nucl. Phys. - 2003. - Vol. B661. - P.257–272.
4. Drissi L.B. Contributions` a l’´etude des Branes // Rabat, 2006. - 252p. (Preprint Univ. V - Agdal, N2320).
5. Lorin H. Sorting and Sort Systems. - Reading: Addison - Wesley, 1975. - 373p.
6. Gabriel P. Unzerlegbare darstellungen. I. (Indecomposable representations. I) // Manuscr. Math. - 1972. – Vol. 6. - P. 71–103.
7. Derksen H., Weyman J. Quiver representations // Notices AMS. - 2005. – Vol. 52. - №2. - P.200–206.
8. Bucur I., Deleanu A. Introduction to the Theory of Categories and Functors. - London: Wiley, 1968. - 129p.
9. Govindarajana S., Jayaraman T. D - branes, exceptional sheaves and quivers on Calabi-Yau manifolds: from Mukaito McKay // Nucl. Phys. - 2001. - Vol. B600. - №3. - P.457–486.
10. Herzog C.P. Seiberg duality is an exceptional mutation // J. High Energy Phys. - 2004. - №08. – P.064.
11. Crawley-Boevey W. Lectures on representations of quivers // Oxford, 1992. - 38p. (Preprint Oxford Univ.).
12. Skornjakov L.A. Obschaja algebra. T.1. - M.: Nauka, 1990. - 592s.
13. Leng S. Algebra. - New York: Springer, 2002. - 912p.
14. Sergejchuk V.V. Klassifikacionnye zadachi dlja sistem form i linejnyh otobrazhenij // Izv. AN SSSR, ser. mat.-1987. - T.51. - №6. - S.1170–1190.
15. Cohn P.M. Universal Algebra. - New York: Harper&Row, 1965. - 352p.
16. Hartshorne R. Foundations of Projective Geometry. - New York: Benjamin, 1967.
17. Kilp M. Algebra I. - Tartu: Eesti Matemaatika Selts, 2005. - 311p.
18. Han Y., Zhao D. Superspecies and the irrepresentations // J. Algebra. - 2009. - Vol.321. - №12. – P.3668–3680.
19. Green M.B., SchwarzJ.H., Witten E. Superstring Theory. Vol.1,2 - Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.
20. Bailin D., Love A. Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory. - Bristol: Institute of Physics, 1994. - 322p.
21. Berezin F.A. Introduction to Superanalysis. - Dordrecht: Reidel, 1987. - 421p.
22. Leites D. Supermanifold Theory. – Petrozavodsk: Math. Methods Sci. Invest., 1983.
23. Leites D., Shchepochkina I. Quivers and Lie super algebras // Czech. J. Phys. - 2004. - Vol.47. - №12. - P.1221–1229.
24. Dong H., Huang H. Hopf superquivers // Chin. Ann. Math. - 2011. - Vol. 32B. - №2. - P.253–264.